Числові послідовності

Числова послідовність

Означення. Якщо кожному натуральному числу n поставлено у відповідність число x_n, то кажуть, що задано **послідовність**

$$x_1, x_2, \dots, x_n \dots = \{x_n\}$$

Загальний елемент послідовності

Загальний елемент послідовності є залежним від n.

$$x_n = f(n)$$

Приклад

$$\{x_n\} = \{(-1)^n\}$$

Приклад

$$\{x_n\} = \{(-1)^n\}$$

або

$$\{x_n\} = -1; 1; -1; 1; \ldots$$

Приклад

$$\{x_n\} = \{(-1)^n\}$$

або

$$\{x_n\} = -1; 1; -1; 1; \ldots$$

$$\{x_n\} = \{\sin \pi n/2\}$$

Приклад

$$\{x_n\} = \{(-1)^n\}$$

або

$$\{x_n\} = -1; 1; -1; 1; \dots$$

$$\{x_n\} = \{\sin \pi n/2\}$$

або

$$\{x_n\} = 1; 0; -1; 0; \dots$$

Дії з послідовностями

1. Множення послідовності на число m: $m\{x_n\} = \{mx_n\}$, тобто mx_1, mx_2, $\dots$

Дії з послідовностями

1. Множення послідовності на число m: $m\{x_n\} = \{mx_n\}$, тобто mx_1, mx_2, ...
2. Додавання (віднімання) послідовностей: $\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\}$.

Дії з послідовностями

1. Множення послідовності на число m: $m\{x_n\} = \{mx_n\}$, тобто mx_1, mx_2, ...
2. Додавання (віднімання) послідовностей: $\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\}$.
3. Добуток послідовностей: $\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}$.

Дії з послідовностями

1. Множення послідовності на число m: $m\{x_n\} = \{mx_n\}$, тобто mx_1, mx_2, $\ldots$
2. Додавання (віднімання) послідовностей: $\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\}$.
3. Добуток послідовностей: $\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}$.
4. Ділення послідовностей: $\dfrac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ при $\{y_n\} \neq 0$.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається **обмеженою**, якщо існує таке число $M > 0$, що для будь-якого n виконується нерівність:

$$|x_n| < M$$

тобто всі члени послідовності належать проміжку $(-M; M)$.

Обмежена згори послідовність

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається **обмеженою згори**, якщо для будь-якого n існує таке число M, що

$$x_n \leqslant M.$$

Обмежена знизу послідовність

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається **обмеженою знизу**, якщо для будь-якого n існує таке число M, що

$$x_n \geqslant M.$$

Приклад

$\{x_n\} = n$ – обмежена знизу $\{1, 2, 3, \dots\}$.

Границя послідовності

Означення. Число a називається **границею** послідовності $\{x_n\}$, якщо для будь-якого додатного $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, що для всіх $n > N$ виконується умова:

$$|a - x_n| < \varepsilon.$$

Границя послідовності

<u>**Означення.**</u> Число a називається **границею** послідовності $\{x_n\}$, якщо для будь-якого додатного $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, що для всіх $n > N$ виконується умова:

$$|a - x_n| < \varepsilon.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Границя послідовності

<u>Означення.</u> Число a називається **границею** послідовності $\{x_n\}$, якщо для будь-якого додатного $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, що для всіх $n > N$ виконується умова:

$$|a - x_n| < \varepsilon.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

У цьому випадку говорять, що послідовність $\{x_n\}$ **збігається** до a при $n \to \infty$.

Властивість збіжних послідовностей

<u>Властивість:</u> Якщо відкинути якусь скінченну кількість членів послідовності, то виходить нова послідовність, при цьому якщо збігається одна з них, то збігається і інша.

Приклад

Довести, що границя послідовності $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0.$

Приклад

Довести, що границя послідовності $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0.$

Доведення

Нехай при $n>N$ виконується $\left|0-\dfrac{(-1)^n}{n}\right|<\varepsilon$, тобто $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$.

Приклад

Довести, що границя послідовності $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0.$

Доведення

Нехай при $n > N$ виконується $\left|0 - \dfrac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon$, тобто $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

Це вірно при $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, таким чином, якщо за N взяти цілу частину від $\dfrac{1}{\varepsilon}$, то твердження, наведене вище, виконується.

Приклад

Показати, що при $n \to \infty$ послідовність $3,\ 2\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{3},\ 2\frac{1}{4}, ...,\ 2+\frac{1}{n}$ має границею число 2.

Приклад

Показати, що при $n \to \infty$ послідовність $3,\ 2\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{3},\ 2\frac{1}{4}, ...,\ 2 + \frac{1}{n}$ має границею число 2.

Доведення

Маємо: $\{x_n\} = \{2 + 1/n\}$; $1/n = x_n - 2$.

Приклад

Показати, що при $n \to \infty$ послідовність $3,\ 2\dfrac{1}{2},\ 2\dfrac{1}{3},\ 2\dfrac{1}{4}, \dots,\ 2 + \dfrac{1}{n}$ має границею число 2.

Доведення

Маємо: $\{x_n\} = \{2 + 1/n\}$; $1/n = x_n - 2$.

Очевидно, що існує таке число n, що $|x_n - 2| = \left|\dfrac{1}{n}\right| < \varepsilon$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Єдиність границі

Теорема. *Послідовність не може мати більше однієї границі.*

Єдиність границі

Теорема. *Послідовність не може мати більше однієї границі.*
Доведення. Припустимо, що послідовність $\{x_n\}$ має дві границі a і b, не рівні одна одній.

$$x_n \to a; x_n \to b; a \neq b.$$

Єдиність границі

Теорема. *Послідовність не може мати більше однієї границі.*
Доведення. Припустимо, що послідовність $\{x_n\}$ має дві границі a і b, не рівні одна одній.

$$x_n \to a; x_n \to b; a \neq b.$$

Тоді за означенням для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число N, що для будь-якого $n > N$:

$$|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|b - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Єдиність границі

Теорема. *Послідовність не може мати більше однієї границі.*
Доведення. Припустимо, що послідовність $\{x_n\}$ має дві границі a і b, не рівні одна одній.

$$x_n \to a; x_n \to b; a \neq b.$$

Тоді за означенням для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число N, що для будь-якого $n > N$:

$$|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$|b - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Запишемо вираз: $|a - b| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \leqslant |a - x_n| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Єдиність границі

Теорема. *Послідовність не може мати більше однієї границі.*
Доведення. Припустимо, що послідовність $\{x_n\}$ має дві границі a і b, не рівні одна одній.

$$x_n \to a; x_n \to b; a \neq b.$$

Тоді за означенням для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число N, що для будь-якого $n > N$:

$$|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$|b - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Запишемо вираз: $|a - b| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \leqslant |a - x_n| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
А оскільки ε – **будь-яке** число, $|a - b| = 0$, тобто $a = b$. Теорему доведено.

Границя послідовності з модулів

Теорема. *Якщо* $x_n \to a$, *то* $|x_n| \to |a|$.

Границя послідовності з модулів

Теорема. *Якщо* $x_n \to a$, *то* $|x_n| \to |a|$.
Доведення. З $x_n \to a$ слідує, що $|x_n - a| < \varepsilon$.

Границя послідовності з модулів

Теорема. *Якщо* $x_n \to a$, *то* $|x_n| \to |a|$.
Доведення. З $x_n \to a$ слідує, що $|x_n - a| < \varepsilon$.
У той же час:
$||x_n| - |a|| \leqslant |x_n - a|$,

Границя послідовності з модулів

Теорема. *Якщо* $x_n \to a$, *то* $|x_n| \to |a|$.
Доведення. З $x_n \to a$ слідує, що $|x_n - a| < \varepsilon$.
У той же час:
$||x_n| - |a|| \leqslant |x_n - a|$,тобто $||x_n| - |a|| < \varepsilon$,

Границя послідовності з модулів

<u>Теорема.</u> *Якщо* $x_n \to a$, *то* $|x_n| \to |a|$.

<u>Доведення.</u> З $x_n \to a$ слідує, що $|x_n - a| < \varepsilon$.

У той же час:

$||x_n| - |a|| \leqslant |x_n - a|$,тобто $||x_n| - |a|| < \varepsilon$,тобто $|x_n| \to |a|$. Теорему доведено.

Обмеженість збіжних послідовностей

Теорема. *Якщо* $x_n \to a$, *то послідовність* $\{x_n\}$ *обмежена.*

Обмеженість збіжних послідовностей

Теорема. *Якщо* $x_n \to a$, *то послідовність* $\{x_n\}$ *обмежена.*
Обернене твердження не є правильним, тобто з обмеженості послідовності не випливає її збіжність.

Обмеженість збіжних послідовностей

Теорема. *Якщо* $x_n \to a$, *то послідовність* $\{x_n\}$ *обмежена.*

Обернене твердження не є правильним, тобто з обмеженості послідовності не випливає її збіжність.

Приклад:

$$x_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n}, & \text{при парному } n \\ 2 - \frac{1}{n}, & \text{при непарному } n \end{cases}$$

Обмеженість збіжних послідовностей

<u>Теорема.</u> *Якщо* $x_n \to a$, *то послідовність* $\{x_n\}$ *обмежена.*
Обернене твердження не є правильним, тобто з обмеженості послідовності не випливає її збіжність.
Приклад:

$$x_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n}, & \text{при парному } n \\ 2 - \frac{1}{n}, & \text{при непарному } n \end{cases}$$

Немає границі, хоча $|x_n| \leqslant 2$.

Теорема про трьох собачок

Теорема. *Якщо* $x_n \to a$ *і* $z_n \to a$ *і* $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, *то* $y_n \to a$.

Монотонні послідовності

<u>Означення.</u>

1. Якщо $x_{n+1} > x_n$ для всіх n, то послідовність зростаюча.

Монотонні послідовності

Означення.

1. Якщо $x_{n+1} > x_n$ для всіх n, то послідовність зростаюча.
2. Якщо $x_{n+1} \geqslant x_n$ для всіх n, то послідовність неспадна.

Монотонні послідовності

Означення.

1. Якщо $x_{n+1} > x_n$ для всіх n, то послідовність зростаюча.
2. Якщо $x_{n+1} \geqslant x_n$ для всіх n, то послідовність неспадна.
3. Якщо $x_{n+1} < x_n$ для всіх n, то послідовність спадна.

Монотонні послідовності

Означення.

1. Якщо $x_{n+1} > x_n$ для всіх n, то послідовність зростаюча.
2. Якщо $x_{n+1} \geqslant x_n$ для всіх n, то послідовність неспадна.
3. Якщо $x_{n+1} < x_n$ для всіх n, то послідовність спадна.
4. Якщо $x_{n+1} \leqslant x_n$ для всіх n, то послідовність незростаюча

Всі ці послідовності називаються **монотонними.** Зростаючі і спадні послідовності називаються **строго монотонними**.

Приклад

$\{x_n\} = 1/n$ – спадна і обмежена

Приклад

$\{x_n\} = 1/n$ – спадна і обмежена
$\{x_n\} = n$ – зростаюча і необмежена.

Приклад

Довести, що послідовність $\{x_n\} = \left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}$ – монотонна зростаюча.

Приклад

Довести, що послідовність $\{x_n\} = \left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}$ – монотонна зростаюча.

<u>**Доведення**</u>

Знайдемо член послідовності $x_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n+2+1} = \dfrac{n+1}{2n+3}$.

Приклад

Довести, що послідовність $\{x_n\} = \left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}$ – монотонна зростаюча.

Доведення

Знайдемо член послідовності $x_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n+2+1} = \dfrac{n+1}{2n+3}$.

Знайдемо знак різниці:

Приклад

Довести, що послідовність $\{x_n\} = \left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}$ – монотонна зростаюча.

<u>**Доведення**</u>

Знайдемо член послідовності $x_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n+2+1} = \dfrac{n+1}{2n+3}$.

Знайдемо знак різниці:

$$x_n - x_{n+1} = \frac{n}{2n+1} - \frac{n+1}{2n+3} = \frac{2n^2+3n-2n^2-2n-n-1}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{-1}{(2n+1)(2n+3)} < 0,$$

оскільки при $n \in \mathbb{N}$ знаменник додатний при будь-якому n.

Приклад

Довести, що послідовність $\{x_n\} = \left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}$ – монотонна зростаюча.

Доведення

Знайдемо член послідовності $x_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n+2+1} = \dfrac{n+1}{2n+3}$.

Знайдемо знак різниці:

$$x_n - x_{n+1} = \frac{n}{2n+1} - \frac{n+1}{2n+3} = \frac{2n^2+3n-2n^2-2n-n-1}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{-1}{(2n+1)(2n+3)} < 0,$$

оскільки при $n \in \mathbb{N}$ знаменник додатний при будь-якому n.

Таким чином, $x_{n+1} > x_n$. Послідовність зростаюча, що і слід було довести.

Приклад

З'ясувати чи є зростаючою або спадною послідовність $\{x_n\} = \dfrac{n}{5^n}$.

Приклад

З'ясувати чи є зростаючою або спадною послідовність $\{x_n\} = \dfrac{n}{5^n}$.

Знайдемо $x_{n+1} = \dfrac{n+1}{5^{n+1}}$.

Приклад

З'ясувати чи є зростаючою або спадною послідовність $\{x_n\} = \dfrac{n}{5^n}$.

Знайдемо $x_{n+1} = \dfrac{n+1}{5^{n+1}}$.

Знайдемо різницю

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{5 \cdot 5^n} - \frac{n}{5^n} = \frac{n+1-5n}{5 \cdot 5^n} = \frac{1-4n}{5 \cdot 5^n},$$

оскільки при $n \in \mathbb{N}$; $1 - 4n < 0$, $x_{n+1} < x_n$.

Приклад

З'ясувати чи є зростаючою або спадною послідовність $\{x_n\} = \dfrac{n}{5^n}$.

Знайдемо $x_{n+1} = \dfrac{n+1}{5^{n+1}}$.

Знайдемо різницю

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{5 \cdot 5^n} - \frac{n}{5^n} = \frac{n+1-5n}{5 \cdot 5^n} = \frac{1-4n}{5 \cdot 5^n},$$

оскільки при $n \in \mathbb{N}$; $1 - 4n < 0$, $x_{n+1} < x_n$.

Послідовність монотонно спадає.

Збіжність монотонних обмежених послідовностей

Теорема. *Монотонна обмежена послідовність має границю.*

Збіжність монотонних обмежених послідовностей

Теорема. *Монотонна обмежена послідовність має границю.*
Доведення. Розглянемо монотонну неспадну послідовність

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots$$

Збіжність монотонних обмежених послідовностей

Теорема. *Монотонна обмежена послідовність має границю.*
Доведення. Розглянемо монотонну неспадну послідовність

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots$$

Ця послідовність обмежена згори: $x_n \leqslant M$, де M – деяке число.

Збіжність монотонних обмежених послідовностей

Теорема. *Монотонна обмежена послідовність має границю.*
Доведення. Розглянемо монотонну неспадну послідовність

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots$$

Ця послідовність обмежена згори: $x_n \leqslant M$, де M – деяке число.
Оскільки будь-яка, обмежена згори, числова множина має точну верхню грань, то для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке число N, що $x_N > a - \varepsilon$, де a – деяка верхня грань множини.

Збіжність монотонних обмежених послідовностей

Теорема. *Монотонна обмежена послідовність має границю.*
Доведення. Розглянемо монотонну неспадну послідовність

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots$$

Ця послідовність обмежена згори: $x_n \leqslant M$, де M – деяке число.
Оскільки будь-яка, обмежена згори, числова множина має точну верхню грань, то для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке число N, що $x_N > a - \varepsilon$, де a – деяка верхня грань множини.
Оскільки $\{x_n\}$ – неспадна послідовність, при $n > N$: $a - \varepsilon < x_N \leqslant x_n$,
$x_n > a - \varepsilon$.

Збіжність монотонних обмежених послідовностей

Теорема. *Монотонна обмежена послідовність має границю.*
Доведення. Розглянемо монотонну неспадну послідовність

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots$$

Ця послідовність обмежена згори: $x_n \leqslant M$, де M – деяке число.
Оскільки будь-яка, обмежена згори, числова множина має точну верхню грань, то для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке число N, що $x_N > a - \varepsilon$, де a – деяка верхня грань множини.
Оскільки $\{x_n\}$ – неспадна послідовність, при $n > N$: $a - \varepsilon < x_N \leqslant x_n$,
$x_n > a - \varepsilon$.
Звідси $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$

Збіжність монотонних обмежених послідовностей

<u>**Теорема.**</u> *Монотонна обмежена послідовність має границю.*
<u>**Доведення.**</u> Розглянемо монотонну неспадну послідовність

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots$$

Ця послідовність обмежена згори: $x_n \leqslant M$, де M – деяке число.
Оскільки будь-яка, обмежена згори, числова множина має точну верхню грань, то для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке число N, що $x_N > a - \varepsilon$, де a – деяка верхня грань множини.
Оскільки $\{x_n\}$ – неспадна послідовність, при $n > N$: $a - \varepsilon < x_N \leqslant x_n$,
$x_n > a - \varepsilon$.
Звідси $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$
$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ або $x_n - a < \varepsilon$, тобто $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Збіжність монотонних обмежених послідовностей

Теорема. *Монотонна обмежена послідовність має границю.*
Доведення. Розглянемо монотонну неспадну послідовність

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots$$

Ця послідовність обмежена згори: $x_n \leqslant M$, де M – деяке число.
Оскільки будь-яка, обмежена згори, числова множина має точну верхню грань, то для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке число N, що $x_N > a - \varepsilon$, де a – деяка верхня грань множини.
Оскільки $\{x_n\}$ – неспадна послідовність, при $n > N$: $a - \varepsilon < x_N \leqslant x_n$,
$x_n > a - \varepsilon$.
Звідси $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$
$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ або $x_n - a < \varepsilon$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.
Для інших монотонних послідовностей доведення аналогічне. Теорему доведено.

Число e

Розгляньмо послідовність $\{x_n\} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Число e

Розглянемо послідовність $\{x_n\} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Якщо послідовність $\{x_n\}$ монотонна і обмежена, то вона має скінченну границю.

Число e

Розгляньмо послідовність $\{x_n\} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Якщо послідовність $\{x_n\}$ монотонна і обмежена, то вона має скінченну границю.

За формулою бінома Ньютона:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

Число e

Розгляньмо послідовність $\{x_n\} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Якщо послідовність $\{x_n\}$ монотонна і обмежена, то вона має скінченну границю.

За формулою бінома Ньютона:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$x_n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Число e

Покажемо, що послідовність $\{x_n\}$ – зростаюча.

Число e

Покажемо, що послідовність $\{x_n\}$ – зростаюча.

$$x_{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+...+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

Покажемо, що послідовність $\{x_n\}$ – зростаюча.

$$x_{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+...+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

Кожний доданок у виразі x_{n+1} більше відповідного значення x_n, і, крім того, в x_{n+1} додається ще один додатний доданок. Таким чином, послідовність $\{x_n\}$ зростаюча.

Число e

Доведемо тепер, що при будь-якому n її члени не перевищують трьох: $x_n < 3$.

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n+1}} =$$

Число e

Доведемо тепер, що при будь-якому n її члени не перевищують трьох: $x_n < 3$.

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n+1}} =$$

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

Число e

Отже, послідовність $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ – монотонно зростаюча і обмежена зверху, тобто має скінченну границю. Цю границю прийнято позначати літерою e.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Число e

Отже, послідовність $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ – монотонно зростаюча і обмежена зверху, тобто має скінченну границю. Цю границю прийнято позначати літерою e.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

З нерівності $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ випливає, що $e \leqslant 3$.

Число e

Отже, послідовність $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ – монотонно зростаюча і обмежена зверху, тобто має скінченну границю. Цю границю прийнято позначати літерою e.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

З нерівності $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ випливає, що $e \leqslant 3$. Відкидаючи в рівності для $\{x_n\}$ всі члени, починаючи із четвертого, маємо:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

Число e

Отже, послідовність $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ – монотонно зростаюча і обмежена зверху, тобто має скінченну границю. Цю границю прийнято позначати літерою e.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

З нерівності $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ випливає, що $e\leqslant 3$. Відкидаючи в рівності для $\{x_n\}$ всі члени, починаючи із четвертого, маємо:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

Переходячи до границі, одержуємо

$$e\geqslant 2+\frac{1}{2} = 2,5$$

Число e

Таким чином, число e розміщене між числами $2,5$ і 3. Якщо взяти більшу кількість членів послідовності, то можна одержати більш точну оцінку значення числа e.

Число e

Таким чином, число e розміщене між числами $2,5$ і 3. Якщо взяти більшу кількість членів послідовності, то можна одержати більш точну оцінку значення числа e.
Можна показати, що число e ірраціональне і його значення дорівнює $2,71828...$

Число е

Таким чином, число e розміщене між числами $2,5$ і 3. Якщо взяти більшу кількість членів послідовності, то можна одержати більш точну оцінку значення числа e.
Можна показати, що число e ірраціональне і його значення дорівнює $2,71828...$
Аналогічно можна показати, що $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$, розширивши вимоги щодо x до будь-якого дійсного числа:
Припустімо: $n\leqslant x\leqslant n+1$

$$\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{x}\geqslant\frac{1}{n+1}$$

$$1+\frac{1}{n}\geqslant 1+\frac{1}{x}\geqslant 1+\frac{1}{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$$

Число e

Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e\cdot 1 = e;$$

Число e

Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e\cdot 1=e;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\frac{e}{1}=e;$$

Число e

Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e\cdot 1=e;$$

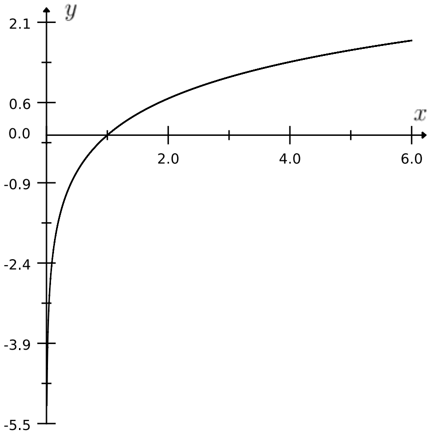
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\frac{e}{1}=e;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Число e

Число e є основою натурального логарифма.

$$\log_e x = \ln x = y, \quad \text{якщо} \quad e^y = x.$$



Зв'язок натурального і десяткового логарифмів

Нехай $x = 10^y$, тоді $\ln x = \ln 10^y$, отже $\ln x = y \ln 10$.
$y = \lg x = \dfrac{\ln x}{\ln 10} = M \ln x;\quad \ln x = \dfrac{1}{M} \lg x$, де $M = \dfrac{1}{\ln 10} \approx 0,43429\ldots$ – модуль переходу.