Частинні похідні складених функцій. Частинні похідні вищих порядків

Частинні похідні складених функцій

Оскільки диференціал функції є головною лінійною відносно приростів змінних частиною приросту функції декількох змінних, за його допомогою можна обчислювати похідні від складених функцій. Для цього достатньо просто знайти відповідні коефіцієнти при приростах з використанням виведених раніше формул.

Повна похідна $z = z(x, y)$, якщо $y = y(x)$

Знайдемо повну похідну за змінною x від функції $z = z(x, y)$, якщо відомо, що $y = y(x)$.

Повна похідна $z = z(x, y)$, якщо $y = y(x)$

Знайдемо повну похідну за змінною x від функції $z = z(x, y)$, якщо відомо, що $y = y(x)$.

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

Повна похідна $z = z(x, y)$, якщо $y = y(x)$

Знайдемо повну похідну за змінною x від функції $z = z(x, y)$, якщо відомо, що $y = y(x)$.

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

Повна похідна $z = z(x, y)$, якщо $y = y(x)$

Знайдемо повну похідну за змінною x від функції $z = z(x, y)$, якщо відомо, що $y = y(x)$.

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x,$$

Повна похідна $z = z(x, y)$, якщо $y = y(x)$

Знайдемо повну похідну за змінною x від функції $z = z(x, y)$, якщо відомо, що $y = y(x)$.

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x,$$

тому

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Повна похідна $z = z(x, y)$, якщо $x = x(t)$, $y = y(t)$

Знайдемо повну похідну за змінною t від функції $z = z(x, y)$, якщо відомо, що $x = x(t)$, $y = y(t)$.

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

Повна похідна $z = z(x, y)$, якщо $x = x(t)$, $y = y(t)$

Знайдемо повну похідну за змінною t від функції $z = z(x, y)$, якщо відомо, що $x = x(t)$, $y = y(t)$.

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t,$$

Повна похідна $z = z(x, y)$, якщо $x = x(t)$, $y = y(t)$

Знайдемо повну похідну за змінною t від функції $z = z(x, y)$, якщо відомо, що $x = x(t)$, $y = y(t)$.

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t,$$

тому

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Приклад

Знайти повну похідну $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ функції $z = \sin\frac{x}{y}$, де $x = e^t$; $y = t^2$.

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Маємо

$$z = \sin\frac{x}{y}; x = e^t; y = t^2.$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Маємо

$$z = \sin\frac{x}{y}; x = e^t; y = t^2.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Маємо

$$z = \sin\frac{x}{y}; x = e^t; y = t^2.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Маємо

$$z = \sin\frac{x}{y}; x = e^t; y = t^2.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Маємо

$$z = \sin\frac{x}{y}; x = e^t; y = t^2.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Маємо

$$z = \sin\frac{x}{y}; x = e^t; y = t^2.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^t$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Маємо

$$z = \sin\frac{x}{y}; x = e^t; y = t^2.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^t$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2t$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}e^{t} - \frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cdot 2t$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}e^t - \frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cdot 2t =$$

$$= \frac{1}{t^2}\cos\frac{e^t}{t^2}e^t - \frac{e^t}{t^4}\cos\frac{e^t}{t^2}\cdot 2t$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}e^t - \frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cdot 2t =$$

$$= \frac{1}{t^2}\cos\frac{e^t}{t^2}e^t - \frac{e^t}{t^4}\cos\frac{e^t}{t^2}\cdot 2t =$$

$$= (t-2)\cdot\frac{e^t}{t^3}\cdot\cos\frac{e^t}{t^2}.$$

Повна похідна $z = z(x, y)$, якщо $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$

Знайдемо частинні похідні за змінними u та v від функції $z = z(x, y)$, якщо відомо, що $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$.

Повна похідна $z = z(x, y)$, якщо $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$

Знайдемо частинні похідні за змінними u та v від функції $z = z(x, y)$, якщо відомо, що $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$.

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

Повна похідна $z = z(x, y)$, якщо $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$

Знайдемо частинні похідні за змінними u та v від функції $z = z(x, y)$, якщо відомо, що $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$.

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v\right)$$

Повна похідна $z = z(x, y)$, якщо $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$

Знайдемо частинні похідні за змінними u та v від функції $z = z(x, y)$, якщо відомо, що $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$.

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\mathrm{d}u + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\mathrm{d}v,$$

Повна похідна $z = z(x, y)$, якщо $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$

Знайдемо частинні похідні за змінними u та v від функції $z = z(x, y)$, якщо відомо, що $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$.

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\mathrm{d}u + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\mathrm{d}v,$$

тому

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}; \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Приклад

Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, де $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$; $x = u\sin v$; $y = u\cos v$.

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}; \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}; \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Маємо

$$z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}; x = u\sin v; y = u\cos v.$$

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}; \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Маємо

$$z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}; x = u\sin v; y = u\cos v.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}$$

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}; \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Маємо

$$z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}; x = u\sin v; y = u\cos v.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}; \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Маємо

$$z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}; x = u\sin v; y = u\cos v.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}; \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Маємо

$$z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}; x = u\sin v; y = u\cos v.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

Розв'язання

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \sin v;$$

Розв'язання

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \sin v; \frac{\partial x}{\partial v} = u \cos v;$$

Розв'язання

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \sin v; \frac{\partial x}{\partial v} = u \cos v;$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \cos v;$$

Розв'язання

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \sin v; \frac{\partial x}{\partial v} = u\cos v;$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \cos v; \frac{\partial y}{\partial v} = -u\sin v;$$

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \sin v - \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \cos v$$

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{y}{x^2+y^2} \cdot \sin v - \frac{x}{x^2+y^2} \cdot \cos v =$$

$$= \frac{u \sin v \cos v - u \sin v \cos v}{u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v}$$

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \sin v - \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \cos v =$$

$$= \frac{u \sin v \cos v - u \sin v \cos v}{u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v} = 0.$$

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{y}{x^2+y^2} \cdot \sin v - \frac{x}{x^2+y^2} \cdot \cos v =$$

$$= \frac{u \sin v \cos v - u \sin v \cos v}{u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v} = 0.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{y}{x^2+y^2} \cdot u \cos v + \frac{x}{x^2+y^2} \cdot u \sin v$$

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{y}{x^2+y^2} \cdot \sin v - \frac{x}{x^2+y^2} \cdot \cos v =$$

$$= \frac{u \sin v \cos v - u \sin v \cos v}{u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v} = 0.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{y}{x^2+y^2} \cdot u \cos v + \frac{x}{x^2+y^2} \cdot u \sin v =$$

$$= \frac{u^2 \cos^2 v}{u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v} + \frac{u^2 \sin^2 v}{u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v}$$

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{y}{x^2+y^2} \cdot \sin v - \frac{x}{x^2+y^2} \cdot \cos v =$$

$$= \frac{u \sin v \cos v - u \sin v \cos v}{u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v} = 0.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{y}{x^2+y^2} \cdot u \cos v + \frac{x}{x^2+y^2} \cdot u \sin v =$$

$$= \frac{u^2 \cos^2 v}{u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v} + \frac{u^2 \sin^2 v}{u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v} = 1.$$

Похідна у даному напрямі

Нехай маємо якусь вісь (напрямок) l, на якій розташовано дві точки, M_0 та M.

Похідна у даному напрямі

Нехай маємо якусь вісь (напрямок) l, на якій розташовано дві точки, M_0 та M. Нехай також маємо деяку функцію $f(M)$, визначену у достатньо великому околі точки M_0, такому, щоб до нього потрапила точка M.

Похідна у даному напрямі

Нехай маємо якусь вісь (напрямок) l, на якій розташовано дві точки, M_0 та M.
Нехай також маємо деяку функцію $f(M)$, визначену у достатньо великому околі точки M_0, такому, щоб до нього потрапила точка M.
Тоді, взявши довжину відрізка M_0M із належним знаком («$+$», якщо напрямок руху від M_0 до M збігається із напрямком l і «$-$», якщо навпаки), будемо називати границю

$$\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)-f(M_0)}{MM_0}$$

похідною від функції $f(M)$ за напрямком l у точці M_0.

Позначення похідної за напрямком

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l}.$$

Похідна за напрямком через частинні похідні

Якщо напрямними косинусами вісі l (вектора $\overrightarrow{M_0M}$) у координатній системі xyz тривимірного простору є $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, похідну за напрямом можна записати через частинні похідні:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

Градієнт

Можна показати, що найбільшого значення похідна за напрямком досягає у напрямку вектора, координатами якого є частинні похідні функції у точці M_0.

Градієнт

Можна показати, що найбільшого значення похідна за напрямком досягає у напрямку вектора, координатами якого є частинні похідні функції у точці M_0. Цей вектор називається **градієнтом**:

$$\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Частинна похідна у напрямку як проєкція градієнта

Частинну похідну можна розглядати як проєкцію градієнта на напрямок вектора MM_0:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\left(\operatorname{grad} f; \overrightarrow{M_0M}\right)}{\left|\overrightarrow{M_0M}\right|}.$$

Частинні похідні першого порядку

Якщо функція $f(x, y)$ визначена в деякій області D, то її частинні похідні $f'_x(x, y)$ і $f'_y(x, y)$ теж будуть визначені у тій же області або її частині.

Частинні похідні першого порядку

Якщо функція $f(x, y)$ визначена в деякій області D, то її частинні похідні $f'_x(x, y)$ і $f'_y(x, y)$ теж будуть визначені у тій же області або її частині. Будемо називати ці похідні **частинними похідними першого порядку**

Частинні похідні другого порядку

Похідні цих функцій будуть **частинними похідними другого порядку**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y);$$

Частинні похідні вищих порядків

Продовжуючи диференціювати отримані рівності, одержимо частинні похідні вищих порядків.

Мішані похідні

Означення Частинні похідні виду $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

Мішані похідні

Означення Частинні похідні виду $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x};$

Мішані похідні

Означення Частинні похідні виду $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x};$

Мішані похідні

<u>**Означення**</u> Частинні похідні виду $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}$ і далі називаються **мішаними похідними**

Теорема Шварца

Теорема Якщо функція $f(x,y)$ і її частинні похідні $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ визначені і неперервні у точці $M(x,\, y)$ і її околі, то виконується співвідношення:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

[1] Герман Шварц (Karl Hermann Amandus Schwarz) (1843–1921) – німецький математик.

Теорема Шварца

Теорема Якщо функція $f(x, y)$ і її частинні похідні $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ визначені і неперервні у точці $M(x,\ y)$ і її околі, то виконується співвідношення:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Тобто частинні похідні вищих порядків не залежать від порядку диференціювання (теорема Шварца[1]).

[1] Герман Шварц (Karl Hermann Amandus Schwarz) (1843–1921) – німецький математик.

Диференціали вищих порядків

$$\mathrm{d}z = f'_x(x, y)\mathrm{d}x + f'_y(x, y)\mathrm{d}y$$

Диференціали вищих порядків

$$\mathrm{d}z = f'_x(x, y)\mathrm{d}x + f'_y(x, y)\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}\left[f'_x(x, y)\mathrm{d}x + f'_y(x, y)\mathrm{d}y\right] = f''_{x^2}(x, y)(\mathrm{d}x)^2 + 2f''_{xy}(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{y^2}(x, y)(\mathrm{d}y)^2$$

Диференціали вищих порядків

$$\mathrm{d}z = f'_x(x,y)\mathrm{d}x + f'_y(x,y)\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}\left[f'_x(x,y)\mathrm{d}x + f'_y(x,y)\mathrm{d}y\right] = f''_{x^2}(x,y)(\mathrm{d}x)^2 + 2f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{y^2}(x,y)(\mathrm{d}y)^2$$

$$\mathrm{d}^3 z = f'''_{x^3}(x,y)(\mathrm{d}x)^3 + 3f'''_{x^2y}(x,y)(\mathrm{d}x)^2\mathrm{d}y + 3f'''_{xy^2}(x,y)\mathrm{d}x(\mathrm{d}y)^2 + f'''_{y^3}(x,y)(\mathrm{d}y)^3$$

Диференціали вищих порядків

$$\mathrm{d}z = f'_x(x,y)\mathrm{d}x + f'_y(x,y)\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}\left[f'_x(x,y)\mathrm{d}x + f'_y(x,y)\mathrm{d}y\right] = f''_{x^2}(x,y)(\mathrm{d}x)^2 + 2f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{y^2}(x,y)(\mathrm{d}y)^2$$

$$\mathrm{d}^3 z = f'''_{x^3}(x,y)(\mathrm{d}x)^3 + 3f'''_{x^2y}(x,y)(\mathrm{d}x)^2\mathrm{d}y + 3f'''_{xy^2}(x,y)\mathrm{d}x(\mathrm{d}y)^2 + f'''_{y^3}(x,y)(\mathrm{d}y)^3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathrm{d}^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^n f(x,y)$$

Диференціали вищих порядків

$$\mathrm{d}z = f'_x(x,y)\mathrm{d}x + f'_y(x,y)\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}\left[f'_x(x,y)\mathrm{d}x + f'_y(x,y)\mathrm{d}y\right] = f''_{x^2}(x,y)(\mathrm{d}x)^2 + 2f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{y^2}(x,y)(\mathrm{d}y)^2$$

$$\mathrm{d}^3 z = f'''_{x^3}(x,y)(\mathrm{d}x)^3 + 3f'''_{x^2y}(x,y)(\mathrm{d}x)^2\mathrm{d}y + 3f'''_{xy^2}(x,y)\mathrm{d}x(\mathrm{d}y)^2 + f'''_{y^3}(x,y)(\mathrm{d}y)^3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathrm{d}^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^n f(x,y)$$

Тут n – символічний степінь похідної, на який заміняється дійсний степінь після піднесення до нього виразу в дужках.

Приклад

Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції $z = e^{2x+y^2}x$.

Розв'язання

$$z = e^{2x+y^2}x$$

Розв'язання

$$z = e^{2x+y^2}x$$

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}y$$

Розв'язання

$$z = e^{2x+y^2}x$$

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x+y^2}x + e^{2x+y^2}$$

Розв'язання

$$z = e^{2x+y^2}x$$

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x+y^2}x + e^{2x+y^2} = (2x+1)e^{2x+y^2}$$

Розв'язання

$$z = e^{2x+y^2}x$$

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x+y^2}x + e^{2x+y^2} = (2x+1)e^{2x+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{2x+y^2}x \cdot 2y$$

Розв'язання

$$z = e^{2x+y^2}x$$

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x+y^2}x + e^{2x+y^2} = (2x+1)e^{2x+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{2x+y^2}x \cdot 2y = 2xye^{2x+y^2}$$

$$\mathrm{d}z = (2x+1)e^{2x+y^2}\mathrm{d}x + 2xye^{2x+y^2}\mathrm{d}y$$

Розв'язання

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\mathrm{d}x)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(\mathrm{d}y)^2$$

Розв'язання

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\mathrm{d}x)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(\mathrm{d}y)^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2e^{2x+y^2} + (2x+1)e^{2x+y^2} \cdot 2$$

Розв'язання

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\mathrm{d}x)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(\mathrm{d}y)^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2e^{2x+y^2} + (2x+1)e^{2x+y^2} \cdot 2 = (4x+4)e^{2x+y^2}$$

Розв'язання

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\mathrm{d}x)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(\mathrm{d}y)^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2e^{2x+y^2} + (2x+1)e^{2x+y^2} \cdot 2 = (4x+4)e^{2x+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (2x+1)e^{2x+y^2} \cdot 2y$$

Розв'язання

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\mathrm{d}x)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(\mathrm{d}y)^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2e^{2x+y^2} + (2x+1)e^{2x+y^2} \cdot 2 = (4x+4)e^{2x+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (2x+1)e^{2x+y^2} \cdot 2y = (4x+2)ye^{2x+y^2}$$

Розв'язання

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2e^{2x+y^2} + (2x+1)e^{2x+y^2} \cdot 2 = (4x+4)e^{2x+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (2x+1)e^{2x+y^2} \cdot 2y = (4x+2)ye^{2x+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2xe^{2x+y^2} + 2xye^{2x+y^2} \cdot 2y$$

Розв'язання

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\mathrm{d}x)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(\mathrm{d}y)^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2e^{2x+y^2} + (2x+1)e^{2x+y^2} \cdot 2 = (4x+4)e^{2x+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (2x+1)e^{2x+y^2} \cdot 2y = (4x+2)ye^{2x+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2xe^{2x+y^2} + 2xye^{2x+y^2} \cdot 2y = 2x(2y^2+1)e^{2x+y^2}$$

Розв'язання

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\mathrm{d}x)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(\mathrm{d}y)^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2e^{2x+y^2} + (2x+1)e^{2x+y^2} \cdot 2 = (4x+4)e^{2x+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (2x+1)e^{2x+y^2} \cdot 2y = (4x+2)ye^{2x+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2xe^{2x+y^2} + 2xye^{2x+y^2} \cdot 2y = 2x(2y^2+1)e^{2x+y^2}$$

$$\mathrm{d}^2 z = (4x+4)e^{2x+y^2}(\mathrm{d}x)^2 + (8x+4)ye^{2x+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2x(2y^2+1)e^{2x+y^2}(\mathrm{d}y)^2$$