Похідні і диференціали функцій декількох змінних

Частинні прирости

<u>**Означення**</u> Нехай у деякій області задана функція $z = f(x, y)$. Візьмемо довільну точку $M(x, y)$ і задамо приріст Δx до змінної x. Тоді величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ називається **частинним приростом функції за** x

Частинні прирости

<u>**Означення**</u> Нехай у деякій області задана функція $z = f(x, y)$. Візьмемо довільну точку $M(x, y)$ і задамо приріст Δx до змінної x. Тоді величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ називається **частинним приростом функції за** x

Можна записати

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Частинні похідні

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

називається **частинною похідною** функції $z = f(x, y)$ за x.

Частинні похідні

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

називається **частинною похідною** функції $z = f(x, y)$ за x.

Позначення:

$$\frac{\partial z}{\partial x}; \quad z'_x; \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}; \quad f'_x(x,y)$$

Частинні похідні

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

називається **частинною похідною** функції $z = f(x, y)$ за x.
Позначення:

$$\frac{\partial z}{\partial x}; \quad z'_x; \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}; \quad f'_x(x, y)$$

Аналогічно визначається частинна похідна функції за y.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Геометричний зміст

Геометричним змістом частинної похідної (наприклад $\dfrac{\partial z}{\partial x}$) є тангенс кута нахилу дотичної, проведеної у точці $N_0(x_0, y_0, z_0)$ до перетину поверхні площиною $y = y_0$.

Повний приріст

Означення Для функції $f(x, y)$ вираз $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ називається **повним приростом**.

Повний приріст

<u>**Означення**</u> Для функції $f(x, y)$ вираз $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ називається **повним приростом**.
Якщо функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні, то

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) =$$

Повний приріст

<u>Означення</u> Для функції $f(x, y)$ вираз $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ називається **повним приростом**.
Якщо функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні, то

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) =$$

$$= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]$$

Повний приріст

<u>Означення</u> Для функції $f(x,y)$ вираз $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ називається **повним приростом**.

Якщо функція $f(x,y)$ має неперервні частинні похідні, то

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) + f(x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) =$$

$$= [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)]$$

Застосуємо теорему Лагранжа до виразів, що стоять у квадратних дужках.

$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \Delta y \frac{\partial f(x,\overline{y})}{\partial y}$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \Delta x \frac{\partial f(\overline{x}, y+\Delta y)}{\partial x}$$

тут $\overline{y} \in (y, y+\Delta y)$; $\quad \overline{x} \in (x, x+\Delta x)$

Повний диференціал

Тоді одержуємо

$$\Delta z = \Delta x \frac{\partial f(\overline{x}, y + \Delta y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(x, \overline{y})}{\partial y}$$

Повний диференціал

Тоді одержуємо

$$\Delta z = \Delta x \frac{\partial f(\overline{x}, y + \Delta y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(x, \overline{y})}{\partial y}$$

Оскільки частинні похідні неперервні, то можна записати рівності:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(\overline{x}, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

Повний диференціал

Тоді одержуємо

$$\Delta z = \Delta x \frac{\partial f(\overline{x}, y + \Delta y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(x, \overline{y})}{\partial y}$$

Оскільки частинні похідні неперервні, то можна записати рівності:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(\overline{x}, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(x, \overline{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

Повний приріст функції двох змінних

<u>Означення</u> Вираз $\Delta z = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$ називається **повним приростом** функції $f(x,\, y)$ у деякій точці $(x,\, y)$, де α_1 і α_2 – нескінченно малі функції при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$ відповідно.

Диференціал функції двох змінних

Означення: **Повним диференціалом** функції $z = f(x, y)$ називається головна лінійна відносно Δx і Δy частина приросту функції Δz у точці (x, y).

$$\mathrm{d}z = f'_x(x, y)\mathrm{d}x + f'_y(x, y)\mathrm{d}y$$

Диференціал функції довільної кількості змінних

Для функції довільного числа змінних:

$$\mathrm{d}f(x, y, z, ..., t) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + ... + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t$$

Приклад

Знайти повний диференціал функції $u = x^{y^2 z}$.

Розв'язання

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$$

Розв'язання

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} \ln x \cdot y^2;$$

Розв'язання

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} \ln x \cdot y^2;$$

$$\mathrm{d}u = y^2 z x^{y^2 z - 1}\mathrm{d}x + 2x^{y^2 z} yz \ln x \mathrm{d}y + y^2 x^{y^2 z} \ln x \mathrm{d}z$$

Приклад

Знайти повний диференціал функції $z = \dfrac{y}{x^2 - y^2}$.

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2yx}{(x^2 - y^2)^2}$$

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2yx}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y'(x^2 - y^2) - y(-2y)}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

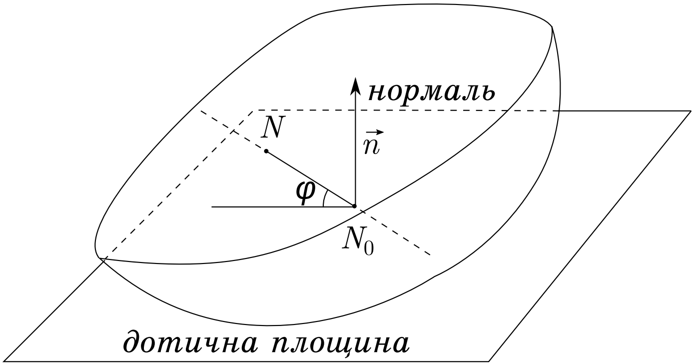
Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2yx}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y'(x^2 - y^2) - y(-2y)}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$\mathrm{d}z = -\frac{2xy}{(x^2 - y^2)}\mathrm{d}x + \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}\mathrm{d}y$$

Дотична площина



Нехай N і N_0 – точки даної поверхні. Проведемо пряму NN_0. Площина, що проходить через точку N_0, називається **дотичною площиною** до поверхні, якщо кут між січною NN_0 і цією площиною прямує до нуля, коли прямує до нуля відстань NN_0.

Нормаль до поверхні

Означення **Нормаллю** до поверхні у точці N_0 називається пряма, що проходить через точку N_0 перпендикулярно дотичній площини до цієї поверхні.

Рівняння дотичної площини

У будь-якій точці поверхня має або тільки одну дотичну площину, або не має її зовсім.

Якщо поверхня задана рівнянням $z = f(x, y)$, де $f(x, y)$ – функція, диференційована у точці $N_0(x_0, y_0)$, дотична площина у точці $N_0(x_0, y_0)$ існує і має рівняння:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Рівняння нормалі

Рівняння нормалі до поверхні у цій точці:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

Рівняння дотичної площини і нормалі для нерозв'язного щодо z рівняння поверхні

Нехай поверхню задано рівнянням $F(x, y, z) = 0$.

Рівняння дотичної площини і нормалі для нерозв'язного щодо z рівняння поверхні

Нехай поверхню задано рівнянням $F(x, y, z) = 0$.
Рівняння дотичної площини у точці $M(x_0; y_0; z_0)$:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Рівняння дотичної площини і нормалі для нерозв'язного щодо z рівняння поверхні

Нехай поверхню задано рівнянням $F(x, y, z) = 0$.
Рівняння дотичної площини у точці $M(x_0; y_0; z_0)$:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Рівняння нормалі до поверхні у цій точці:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$$

Геометричний зміст повного диференціала

Геометричним змістом повного диференціала функції двох змінних $f(x, y)$ у точці (x_0, y_0) є приріст аплікати (координати z) дотичної площини до поверхні при переході від точки (x_0, y_0) до точки $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Геометричний зміст повного диференціала

Геометричним змістом повного диференціала функції двох змінних $f(x, y)$ у точці (x_0, y_0) є приріст аплікати (координати z) дотичної площини до поверхні при переході від точки (x_0, y_0) до точки $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.
Як видно, геометричний зміст повного диференціала функції двох змінних є просторовим аналогом геометричного змісту диференціала функції однієї змінної.

Приклад

Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні

$$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$$

у точці $M(1, 1, 1)$.

Розв’язання

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$$

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -1; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 2;$$

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -1; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 2;$$

Рівняння дотичної площини:

$$z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1); \qquad x - 2y + z = 0;$$

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -1; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 2;$$

Рівняння дотичної площини:

$$z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1); \qquad x - 2y + z = 0;$$

Рівняння нормалі:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1};$$

Наближені обчислення за допомогою повного диференціала

Нехай функція $f(x, y)$ диференційована у точці (x, y). Знайдемо повний приріст цієї функції:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Наближені обчислення за допомогою повного диференціала

Нехай функція $f(x, y)$ диференційована у точці (x, y). Знайдемо повний приріст цієї функції:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z$$

Якщо підставити у цю формулу вираз

$$\Delta z \approx \mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

Наближені обчислення за допомогою повного диференціала

Нехай функція $f(x, y)$ диференційована у точці (x, y). Знайдемо повний приріст цієї функції:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z$$

Якщо підставити у цю формулу вираз

$$\Delta z \approx \mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

то одержимо наближену формулу:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y$$

Приклад

Обчислити приблизно значення $\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02}$, виходячи зі значення функції $u = \sqrt{x^y + \ln z}$ при $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$.

Розв'язання

Із заданого виразу визначимо $\Delta x = 1,04 - 1 = 0,04$, $\Delta y = 1,99 - 2 = -0,01$,

Розв'язання

Із заданого виразу визначимо $\Delta x = 1,04 - 1 = 0,04$, $\Delta y = 1,99 - 2 = -0,01$,

$$\Delta z = 1,02 - 1 = 0,02.$$

Розв'язання

Із заданого виразу визначимо $\Delta x = 1,04 - 1 = 0,04$, $\Delta y = 1,99 - 2 = -0,01$,

$$\Delta z = 1,02 - 1 = 0,02.$$

Знайдемо значення функції $u(1,2,1) = \sqrt{1^2 + \ln 1} = 1$

Розв'язання

Із заданого виразу визначимо $\Delta x = 1,04 - 1 = 0,04$, $\Delta y = 1,99 - 2 = -0,01$,

$$\Delta z = 1,02 - 1 = 0,02.$$

Знайдемо значення функції $u(1,2,1) = \sqrt{1^2 + \ln 1} = 1$
Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,2,1) = \left.\frac{y \cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}}\right|_{(1,2,1)}$$

Розв'язання

Із заданого виразу визначимо $\Delta x = 1,04 - 1 = 0,04$, $\Delta y = 1,99 - 2 = -0,01$,

$$\Delta z = 1,02 - 1 = 0,02.$$

Знайдемо значення функції $u(1,2,1) = \sqrt{1^2 + \ln 1} = 1$
Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,2,1) = \left.\frac{y \cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}}\right|_{(1,2,1)} = \frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{1}} = 1$$

Розв'язання

Із заданого виразу визначимо $\Delta x = 1,04 - 1 = 0,04$, $\Delta y = 1,99 - 2 = -0,01$,

$$\Delta z = 1,02 - 1 = 0,02.$$

Знайдемо значення функції $u(1,2,1) = \sqrt{1^2 + \ln 1} = 1$
Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,2,1) = \left.\frac{y \cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}}\right|_{(1,2,1)} = \frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{1}} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,2,1) = \left.\frac{x^y \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}}\right|_{(1,2,1)}$$

Розв'язання

Із заданого виразу визначимо $\Delta x = 1,04 - 1 = 0,04$, $\Delta y = 1,99 - 2 = -0,01$,

$$\Delta z = 1,02 - 1 = 0,02.$$

Знайдемо значення функції $u(1,2,1) = \sqrt{1^2 + \ln 1} = 1$
Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,2,1) = \left.\frac{y \cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}}\right|_{(1,2,1)} = \frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{1}} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,2,1) = \left.\frac{x^y \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}}\right|_{(1,2,1)} = 0$$

Розв'язання

Із заданого виразу визначимо $\Delta x = 1,04 - 1 = 0,04$, $\Delta y = 1,99 - 2 = -0,01$,

$$\Delta z = 1,02 - 1 = 0,02.$$

Знайдемо значення функції $u(1,2,1) = \sqrt{1^2 + \ln 1} = 1$
Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,2,1) = \left.\frac{y \cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}}\right|_{(1,2,1)} = \frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{1}} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,2,1) = \left.\frac{x^y \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}}\right|_{(1,2,1)} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(1,2,1) = \left.\frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y + \ln z}}\right|_{(1,2,1)}$$

Розв'язання

Із заданого виразу визначимо $\Delta x = 1,04 - 1 = 0,04$, $\Delta y = 1,99 - 2 = -0,01$,

$$\Delta z = 1,02 - 1 = 0,02.$$

Знайдемо значення функції $u(1,2,1) = \sqrt{1^2 + \ln 1} = 1$
Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,2,1) = \left. \frac{y \cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} \right|_{(1,2,1)} = \frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{1}} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,2,1) = \left. \frac{x^y \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}} \right|_{(1,2,1)} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(1,2,1) = \left. \frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} \right|_{(1,2,1)} = \frac{1}{2}$$

Розв'язання

Повний диференціал функції u дорівнює:

$$\mathrm{d}u = 0,04 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - 0,01 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 0,02 \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$$

Розв'язання

Повний диференціал функції u дорівнює:

$$\mathrm{d}u = 0,04 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - 0,01 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 0,02 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 1 \cdot 0,04 - 0 \cdot 0,01 + \frac{1}{2} \cdot 0,02 = 0,04 + 0,01 = 0,05$$

Розв'язання

Повний диференціал функції u дорівнює:

$$\mathrm{d}u = 0,04 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - 0,01 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 0,02 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 1 \cdot 0,04 - 0 \cdot 0,01 + \frac{1}{2} \cdot 0,02 = 0,04 + 0,01 = 0,05$$

$$\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02} \approx u(1,2,1) + \mathrm{d}u = 1 + 0,05 = 1,05$$

Розв'язання

Повний диференціал функції u дорівнює:

$$\mathrm{d}u = 0,04 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - 0,01 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 0,02 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 1 \cdot 0,04 - 0 \cdot 0,01 + \frac{1}{2} \cdot 0,02 = 0,04 + 0,01 = 0,05$$

$$\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02} \approx u(1,2,1) + \mathrm{d}u = 1 + 0,05 = 1,05$$

Точніше значення цього виразу: $1,049275225687319176$.