Формула Тейлора. Розклади за формулою Маклорена основних елементарних функцій

Теорема Тейлора

Теорема Тейлора[1] 1) *Нехай функція* $f(x)$ *має у точці* $x = a$ *і деякому її околі похідні порядку до* $n + 1$ *включно. Тобто і всі попередні до порядку* n *функції і їхні похідні неперервні і диференційовані у цьому околі*

[1] Брук Тейлор (Brook Taylor) (1685–1731) – англійський математик

Теорема Тейлора

Теорема Тейлора[1] 1) *Нехай функція* $f(x)$ *має у точці* $x = a$ *і деякому її околі похідні порядку до* $n + 1$ *включно. Тобто і всі попередні до порядку* n *функції і їхні похідні неперервні і диференційовані у цьому околі*
2) *Нехай* x *– будь-яке значення з цього околу, але* $x \neq a$

[1] Брук Тейлор (Brook Taylor) (1685–1731) – англійський математик

Теорема Тейлора

Теорема Тейлора[1] 1) *Нехай функція* $f(x)$ *має у точці* $x = a$ *і деякому її околі похідні порядку до* $n+1$ *включно. Тобто і всі попередні до порядку* n *функції і їхні похідні неперервні і диференційовані у цьому околі*
2) *Нехай* x *– будь-яке значення з цього околу, але* $x \neq a$
Тоді між точками x *і* a *знайдеться така точка* ε, *що справедлива формула:*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

[1] Брук Тейлор (Brook Taylor) (1685–1731) – англійський математик

<u>**Теорема Тейлора**</u>[1] 1) *Нехай функція* $f(x)$ *має у точці* $x = a$ *і деякому її околі похідні порядку до* $n+1$ *включно. Тобто і всі попередні до порядку* n *функції і їхні похідні неперервні і диференційовані у цьому околі*
2) *Нехай* x *– будь-яке значення з цього околу, але* $x \neq a$
Тоді між точками x *і* a *знайдеться така точка* ε*, що справедлива формула:*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Цей вираз називається **формулою Тейлора**.

[1] Брук Тейлор (Brook Taylor) (1685–1731) – англійський математик

Теорема Тейлора

Теорема Тейлора[1] 1) *Нехай функція* $f(x)$ *має у точці* $x = a$ *і деякому її околі похідні порядку до* $n+1$ *включно. Тобто і всі попередні до порядку* n *функції і їхні похідні неперервні і диференційовані у цьому околі*
2) *Нехай* x *– будь-яке значення з цього околу, але* $x \neq a$
Тоді між точками x *і* a *знайдеться така точка* ε*, що справедлива формула:*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Цей вираз називається **формулою Тейлора**.

$$\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = R_{n+1}(x)$$

називається **залишковим членом у формі Лагранжа**.

[1] Брук Тейлор (Brook Taylor) (1685–1731) – англійський математик

Доведення

Представимо функцію $f(x)$ у вигляді деякого многочлена $P_n(x)$, значення якого у точці $x = a$ дорівнює значенню функції $f(x)$, а значення його похідних дорівнює значенням відповідних похідних функції у точці $x = a$.

$$P_n(a) = f(a); \quad P_n'(a) = f'(a); \quad P_n''(a) = f''(a); \quad \dots \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \qquad (1)$$

Доведення

Многочлен $P_n(x)$ буде близький до функції $f(x)$. Чим більше значення n, тим ближче значення многочлена до значень функції, тим точніше він повторює функцію.

Доведення

Многочлен $P_n(x)$ буде близький до функції $f(x)$. Чим більше значення n, тим ближче значення многочлена до значень функції, тим точніше він повторює функцію.
Представимо цей многочлен з невизначеними поки коефіцієнтами:

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + ... + C_n(x-a)^n \tag{2}$$

Доведення

Многочлен $P_n(x)$ буде близький до функції $f(x)$. Чим більше значення n, тим ближче значення многочлена до значень функції, тим точніше він повторює функцію.
Представимо цей многочлен з невизначеними поки коефіцієнтами:

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + ... + C_n(x-a)^n \tag{2}$$

Для знаходження невизначених коефіцієнтів обчислюємо похідні многочлена у точці $x = a$ і встановлюємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} P_n'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + ... + nC_n(x-a)^{n-1} \\ P_n''(x) = 2C_2 + 3\cdot 2C_3(x-a) + ... + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)...2\cdot 1\cdot C_n \end{cases} \tag{3}$$

Доведення

Розв'язання цієї системи при $x = a$ не викликає утруднень, одержуємо:

$$f(a) = C_0$$

Доведення

Розв'язання цієї системи при $x = a$ не викликає утруднень, одержуємо:

$$f(a) = C_0$$

$$f'(a) = C_1$$

Доведення

Розв'язання цієї системи при $x = a$ не викликає утруднень, одержуємо:

$$f(a) = C_0$$

$$f'(a) = C_1$$

$$f''(a) = 2 \cdot 1 \cdot C_2$$

Доведення

Розв'язання цієї системи при $x = a$ не викликає утруднень, одержуємо:

$$f(a) = C_0$$

$$f'(a) = C_1$$

$$f''(a) = 2 \cdot 1 \cdot C_2$$

$$f'''(a) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot C_3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Доведення

Розв'язання цієї системи при $x = a$ не викликає утруднень, одержуємо:

$$f(a) = C_0$$

$$f'(a) = C_1$$

$$f''(a) = 2 \cdot 1 \cdot C_2$$

$$f'''(a) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot C_3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)...2 \cdot 1 \cdot C_n$$

Доведення

Підставляючи отримані значення C_i до формули (2), одержуємо:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Доведення

Підставляючи отримані значення C_i до формули (2), одержуємо:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Як було зазначено вище, многочлен не точно збігається з функцією $f(x)$, тобто відрізняється від неї на деяку величину.

Доведення

Підставляючи отримані значення C_i до формули (2), одержуємо:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Як було зазначено вище, многочлен не точно збігається з функцією $f(x)$, тобто відрізняється від неї на деяку величину. Позначимо цю величину $R_{n+1}(x)$.

Доведення

Підставляючи отримані значення C_i до формули (2), одержуємо:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Як було зазначено вище, многочлен не точно збігається з функцією $f(x)$, тобто відрізняється від неї на деяку величину. Позначимо цю величину $R_{n+1}(x)$.Тоді:

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$$

Доведення

Підставляючи отримані значення C_i до формули (2), одержуємо:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

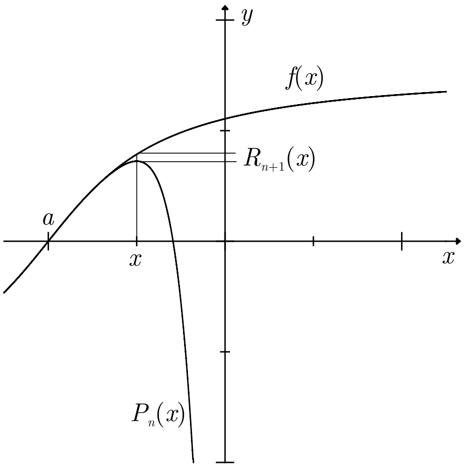
Як було зазначено вище, многочлен не точно збігається з функцією $f(x)$, тобто відрізняється від неї на деяку величину. Позначимо цю величину $R_{n+1}(x)$.Тоді:

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$$

Теорему доведено.

Залишковий член

Розглянемо докладніше величину $R_{n+1}(x)$, яку називають **залишковим членом**.



Залишковий член

Як видно на рисунку, у точці $x = a$ значення многочлена у точності збігається зі значенням функції. Однак, при віддаленні від точки $x = a$ розбіжність значно збільшується.

Залишковий член

Як видно на рисунку, у точці $x = a$ значення многочлена у точності збігається зі значенням функції. Однак, при віддаленні від точки $x = a$ розбіжність значно збільшується.
Іноді використається інший запис для $R_{n+1}(x)$. Оскільки точка $\varepsilon \in (a, x)$, то найдеться таке число θ з інтервалу $0 < \theta < 1$, що $\varepsilon = a + \theta(x - a)$.

Залишковий член

Як видно на рисунку, у точці $x = a$ значення многочлена у точності збігається зі значенням функції. Однак, при віддаленні від точки $x = a$ розбіжність значно збільшується.

Іноді використається інший запис для $R_{n+1}(x)$. Оскільки точка $\varepsilon \in (a, x)$, то найдеться таке число θ з інтервалу $0 < \theta < 1$, що $\varepsilon = a + \theta(x - a)$.

Тоді можна записати:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}\left[a + \theta\left(x - a\right)\right]}{(n+1)!}\left(x - a\right)^{n+1}$$

Формула Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа

Тоді, якщо прийняти $a = x_0$, $x - a = \Delta x$, $x = x_0 + \Delta x$, формулу Тейлора можна записати у вигляді:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n +$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}$$

де $0 < \theta < 1$.

Формула Лагранжа

Якщо прийняти $n = 0$, одержимо: $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta\Delta x) \cdot \Delta x$ – цей вираз називається **формулою Лагранжа**[2].

[2] Жозеф Луї Лагранж (Joseph Louis Lagrange) (1736–1813) французький математик і механік.

Формула Маклорена

Формулою Маклорена[3] називається формула Тейлора при $a = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}; \quad 0 < \theta < 1$$

Ми одержали так звану формулу Маклорена із залишковим членом у формі Лагранжа.

[3]Колін Маклорен (Colin Maclaurin) (1698–1746) шотландський математик.

Застосування формули Маклорена

Слід зазначити, що при розкладі функції, застосування формули Маклорена краще, ніж застосування безпосередньо формули Тейлора, оскільки обчислення значень похідних у нулі простіше, ніж у будь-якій іншій точці, природно, за умови, що ці похідні існують.

Застосування формули Маклорена

Слід зазначити, що при розкладі функції, застосування формули Маклорена краще, ніж застосування безпосередньо формули Тейлора, оскільки обчислення значень похідних у нулі простіше, ніж у будь-якій іншій точці, природно, за умови, що ці похідні існують.
Однак, вибір числа a дуже важливий для практичного використання. Справа у тому, що при обчисленні значення функції у точці, розташованої відносно близько до точки a, значення, отримане за формулою Тейлора, навіть при обмеженні трьома – чотирма першими доданками, збігається з точним значенням функції практично абсолютно. При віддаленні ж розглянутої точки від точки a для одержання точного значення треба брати все більшу кількість доданків формули Тейлора, що незручно.

Застосування формули Маклорена

Слід зазначити, що при розкладі функції, застосування формули Маклорена краще, ніж застосування безпосередньо формули Тейлора, оскільки обчислення значень похідних у нулі простіше, ніж у будь-якій іншій точці, природно, за умови, що ці похідні існують.
Однак, вибір числа a дуже важливий для практичного використання. Справа у тому, що при обчисленні значення функції у точці, розташованої відносно близько до точки a, значення, отримане за формулою Тейлора, навіть при обмеженні трьома – чотирма першими доданками, збігається з точним значенням функції практично абсолютно. При віддаленні ж розглянутої точки від точки a для одержання точного значення треба брати все більшу кількість доданків формули Тейлора, що незручно.
Тобто чим більше за модулем значення різниці $(x - a)$, тим точніше значення функції відрізняється від знайденого за формулою Тейлора.

Залишковий член у формі Пеано

Крім того, можна показати, що залишковий член $R_{n+1}(x)$ є нескінченно малою функцією при $x \to a$, причому більш високого порядку, ніж $(x-a)^n$, тобто (залишковий член у формі Пеано[4])

$$R_{n+1}(x) = o\left([x-a]^n\right).$$

[4] Джузеппе Пеано (Giuseppe Peano) (1858–1932) – італійський математик.

Розклад e^x

Функція $f(x) = e^x$
Знаходимо:

$$f(x) = e^x, f(0) = 1;$$

Розклад e^x

Функція $f(x) = e^x$
Знаходимо:

$$f(x) = e^x, f(0) = 1;$$

$$f'(x) = e^x, f'(0) = 1;$$

Розклад e^x

Функція $f(x) = e^x$
Знаходимо:

$$f(x) = e^x, f(0) = 1;$$

$$f'(x) = e^x, f'(0) = 1;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Розклад e^x

Функція $f(x) = e^x$
Знаходимо:

$$f(x) = e^x, f(0) = 1;$$

$$f'(x) = e^x, f'(0) = 1;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1.$$

Розклад e^x

Функція $f(x) = e^x$
Знаходимо:

$$f(x) = e^x, f(0) = 1;$$

$$f'(x) = e^x, f'(0) = 1;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

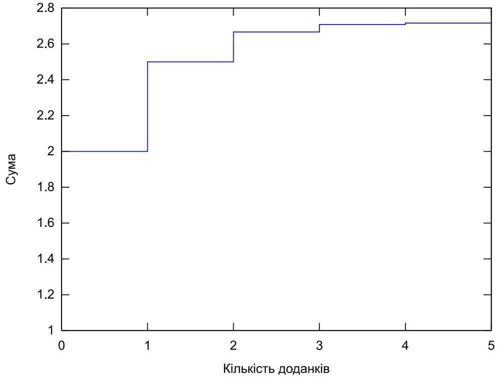
$$f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1.$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \qquad 0 < \theta < 1$$

Приклад

Знайдемо значення числа e.
В отриманій вище формулі покладемо $x = 1$.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta}$$



Залежність від кількості членів у розкладі

Для 8 членів розкладу: $e = 2,71827876984127003$

Залежність від кількості членів у розкладі

Для 8 членів розкладу: $e = 2,71827876984127003$
Для 10 членів розкладу: $e = 2,71828180114638451$

Залежність від кількості членів у розкладі

Для 8 членів розкладу: $e = 2,71827876984127003$
Для 10 членів розкладу: $e = 2,71828180114638451$
Для 100 членів розкладу: $e = 2,71828182845904553$

Залежність від кількості членів у розкладі

Для 8 членів розкладу: $e = 2,71827876984127003$
Для 10 членів розкладу: $e = 2,71828180114638451$
Для 100 членів розкладу: $e = 2,71828182845904553$
На графіку показані значення числа e з точністю, що залежить від кількості членів розкладу Тейлора.

Залежність від кількості членів у розкладі

Для 8 членів розкладу: $e = 2,71827876984127003$
Для 10 членів розкладу: $e = 2,71828180114638451$
Для 100 членів розкладу: $e = 2,71828182845904553$
На графіку показані значення числа e з точністю, що залежить від кількості членів розкладу Тейлора.
Як видно, для досягнення точності, достатньої для розв'язання більшості практичних задач, можна обмежитися 6–7-ма членами ряду.

Розклад $f(x) = \sin x$

Одержуємо:

$$f(x) = \sin x; f(0) = 0;$$

Розклад $f(x) = \sin x$

Одержуємо:

$$f(x) = \sin x; f(0) = 0;$$

$$f'(x) = \cos x = \sin(x + \pi/2); f'(0) = 1;$$

Розклад $f(x) = \sin x$

Одержуємо:

$$f(x) = \sin x; f(0) = 0;$$

$$f'(x) = \cos x = \sin(x + \pi/2); f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2(\pi/2)); f''(0) = 0;$$

Розклад $f(x) = \sin x$

Одержуємо:

$$f(x) = \sin x; f(0) = 0;$$

$$f'(x) = \cos x = \sin(x + \pi/2); f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2(\pi/2)); f''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin(x + 3(\pi/2)); f'''(0) = -1;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Розклад $f(x) = \sin x$

Одержуємо:

$$f(x) = \sin x; f(0) = 0;$$

$$f'(x) = \cos x = \sin(x + \pi/2); f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2(\pi/2)); f''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin(x + 3(\pi/2)); f'''(0) = -1;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + \pi n/2); f^{(n)}(0) = \sin(\pi n/2);$$

$$f^{(n+1)}(x) = \sin(x + (n+1)\pi/2); f^{(n+1)}(\varepsilon) = \sin(\varepsilon + (n+1)\pi/2);$$

Розклад $f(x) = \sin x$

Отже:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x)$$

$$R_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\varepsilon)}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \pm\frac{\cos\varepsilon}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Розклад $f(x) = \cos x$

Для функції $\cos x$, застосувавши аналогічні перетворення, одержимо:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x)$$

$$R_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\varepsilon)}{(2n+2)!} x^{2n+2} = \pm \frac{\cos \varepsilon}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

Розклад $f(x) = (1+x)^\alpha$ (α – дійсне число)

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}; f'(0) = \alpha;$$

Розклад $f(x) = (1+x)^\alpha$ (α – дійсне число)

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}; f'(0) = \alpha;$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}; f''(0) = \alpha(\alpha-1);$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Розклад $f(x) = (1+x)^\alpha$ (α – дійсне число)

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}; f'(0) = \alpha;$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}; f''(0) = \alpha(\alpha-1);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}; f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)$$

Розклад $f(x) = (1+x)^\alpha$ (α – дійсне число)

Тоді:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2\cdot 1}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$$

Розклад $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ (α – дійсне число)

Тоді:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2\cdot 1}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}; \qquad 0 < \theta < 1$$

Біном Ньютона

Якщо в отриманій формулі прийняти $\alpha = n$, де n – натуральне число і $f^{(n+1)}(x) = 0$, то $R_{n+1} = 0$, тоді

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + ... + x^n$$

Біном Ньютона

Якщо в отриманій формулі прийняти $\alpha = n$, де n – натуральне число і $f^{(n+1)}(x) = 0$, то $R_{n+1} = 0$, тоді

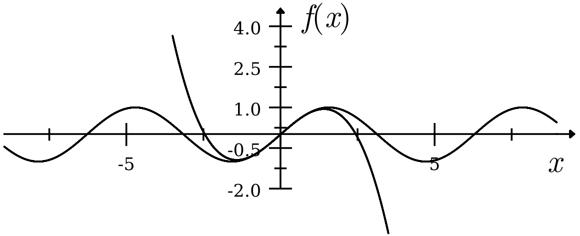
$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + ... + x^n$$

Вийшла формула, відома як **біном Ньютона**.

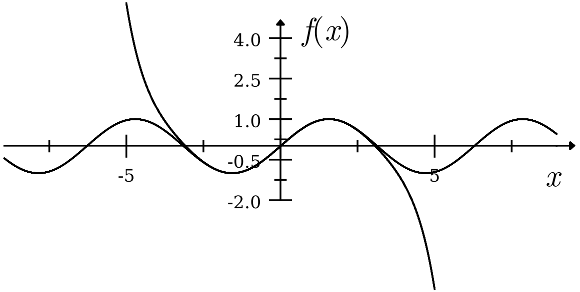
Приклад

Застосувати отриману формулу для знаходження синуса будь-якого кута з будь-яким ступенем точності.
На наведених нижче графіках представлене порівняння точного значення функції і значення розкладу в ряд Тейлора при різній кількості членів розкладу.

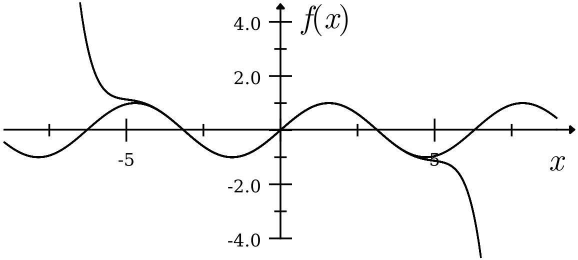
Два члени розкладу



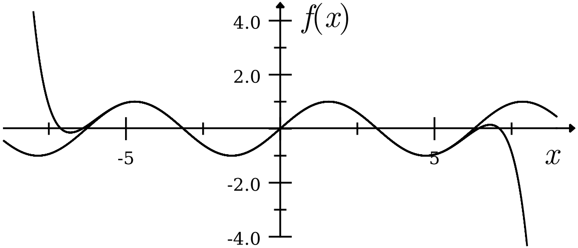
Чотири члени розкладу



Шість членів розкладу



Вісім членів розкладу



Наближені обчислення

Щоб одержати найбільш точне значення функції при найменшій кількості членів розкладу треба у формулі Тейлора як параметр a вибрати таке число, що досить близько до значення x, і значення функції від цього числа легко обчислюється.

Наближені обчислення

Щоб одержати найбільш точне значення функції при найменшій кількості членів розкладу треба у формулі Тейлора як параметр a вибрати таке число, що досить близько до значення x, і значення функції від цього числа легко обчислюється.

Для прикладу, обчислимо значення $\sin 20^\circ$.

Щоб одержати найбільш точне значення функції при найменшій кількості членів розкладу треба у формулі Тейлора як параметр a вибрати таке число, що досить близько до значення x, і значення функції від цього числа легко обчислюється.
Для прикладу, обчислимо значення $\sin 20^\circ$.
Попередньо переведемо кут 20° у радіани: $20^\circ = \pi/9$.

Щоб одержати найбільш точне значення функції при найменшій кількості членів розкладу треба у формулі Тейлора як параметр a вибрати таке число, що досить близько до значення x, і значення функції від цього числа легко обчислюється.
Для прикладу, обчислимо значення $\sin 20^\circ$.
Попередньо переведемо кут 20° у радіани: $20^\circ = \pi/9$.
Застосуємо розклад в ряд Тейлора, обмежившись трьома першими членами розкладу:

$$\sin 20^\circ = \sin \frac{\pi}{9} \cong \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^5$$

Наближені обчислення

Щоб одержати найбільш точне значення функції при найменшій кількості членів розкладу треба у формулі Тейлора як параметр a вибрати таке число, що досить близько до значення x, і значення функції від цього числа легко обчислюється.
Для прикладу, обчислимо значення $\sin 20^\circ$.
Попередньо переведемо кут 20° у радіани: $20^\circ = \pi/9$.
Застосуємо розклад в ряд Тейлора, обмежившись трьома першими членами розкладу:

$$\sin 20^\circ = \sin \frac{\pi}{9} \cong \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^5 =$$

$$= 0,348889 - 0,007078 + 0,000043$$

Наближені обчислення

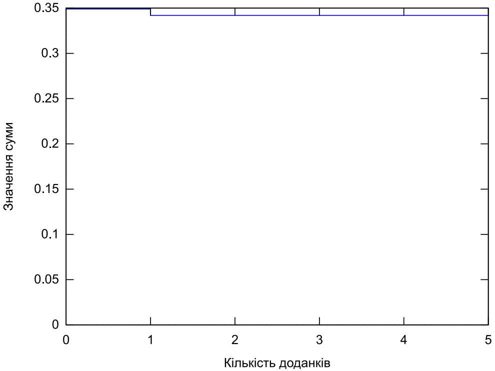
Щоб одержати найбільш точне значення функції при найменшій кількості членів розкладу треба у формулі Тейлора як параметр a вибрати таке число, що досить близько до значення x, і значення функції від цього числа легко обчислюється.
Для прикладу, обчислимо значення $\sin 20^\circ$.
Попередньо переведемо кут 20° у радіани: $20^\circ = \pi/9$.
Застосуємо розклад в ряд Тейлора, обмежившись трьома першими членами розкладу:

$$\sin 20^\circ = \sin \frac{\pi}{9} \cong \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^5 =$$

$$= 0,348889 - 0,007078 + 0,000043 = 0,341854$$

У чотиризначних таблицях Брадіса для синуса цього кута зазначене значення $0,3420$.

Графік залежності значення від кількості членів



На графіку показана зміна значень розкладу в ряд Тейлора залежно від кількості членів розкладу. Як видно, якщо обмежитися трьома членами розкладу, то досягається точність до $0,0002$.

Наближені обчислення

Раніше ми доводили, що при $x \to 0$ функція $\sin x$ є нескінченно малою і може при обчисленні бути замінена на еквівалентну їй нескінченно малу функцію x. Тепер видно, що при x, близьких до нуля, можна практично без втрати у точності обмежитися першим членом розкладу, тобто $\sin x \approx x$.

Приклад

Обчислити $\sin 28^\circ 13' 15''$.

Розв'язання

Для того, щоб представити заданий кут у радіанах, скористаємося співвідношеннями:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}; 28^\circ = \frac{28\pi}{180};$$

Розв'язання

Для того, щоб представити заданий кут у радіанах, скористаємося співвідношеннями:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}; 28^\circ = \frac{28\pi}{180};$$

$$1' = \frac{\pi}{60 \cdot 180}; 13' = \frac{13\pi}{60 \cdot 180};$$

Розв'язання

Для того, щоб представити заданий кут у радіанах, скористаємося співвідношеннями:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}; 28^\circ = \frac{28\pi}{180};$$

$$1' = \frac{\pi}{60 \cdot 180}; 13' = \frac{13\pi}{60 \cdot 180};$$

$$1'' = \frac{\pi}{60 \cdot 60 \cdot 180}; 15'' = \frac{15\pi}{60 \cdot 60 \cdot 180};$$

Розв'язання

Для того, щоб представити заданий кут у радіанах, скористаємося співвідношеннями:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}; 28^\circ = \frac{28\pi}{180};$$

$$1' = \frac{\pi}{60 \cdot 180}; 13' = \frac{13\pi}{60 \cdot 180};$$

$$1'' = \frac{\pi}{60 \cdot 60 \cdot 180}; 15'' = \frac{15\pi}{60 \cdot 60 \cdot 180};$$

$$28^\circ 13' 15'' = \frac{28\pi}{180} + \frac{13\pi}{60 \cdot 180} + \frac{15\pi}{60 \cdot 60 \cdot 180} = \frac{\pi}{180}\left(\frac{28 \cdot 60 \cdot 60 + 60 \cdot 13 + 15}{60 \cdot 60}\right) = 0,492544\text{\textit{радіан}}$$

Розв'язання

Якщо при розкладанні за формулою Тейлора обмежитися трьома першими членами, одержимо:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} = 0,492544 - 0,019915 + 0,000242 = 0,472871.$$

Розв'язання

Якщо при розкладанні за формулою Тейлора обмежитися трьома першими членами, одержимо:

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} = 0,492544 - 0,019915 + 0,000242 = 0,472871.$

Порівнюючи отриманий результат з точним значенням синуса цього кута,

$$\sin 28^\circ 13' 15'' = 0,472869017612759812,$$

Розв'язання

Якщо при розкладанні за формулою Тейлора обмежитися трьома першими членами, одержимо:
$\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} = 0,492544 - 0,019915 + 0,000242 = 0,472871.$
Порівнюючи отриманий результат з точним значенням синуса цього кута,

$$\sin 28^\circ 13' 15'' = 0,47286901761275981 2,$$

Бачимо, що навіть при обмеженні всього трьома членами розкладу, точність склала $0,000002$, що цілком достатньо для більшості практичних технічних задач.

Розклад $f(x) = \ln(1+x)$

Одержуємо:

$$f(x) = \ln(1+x);\, f(0) = 0;$$

Розклад $f(x) = \ln(1+x)$

Одержуємо:

$$f(x) = \ln(1+x); f(0) = 0;$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}; f'(0) = 1;$$

Розклад $f(x) = \ln(1+x)$

Одержуємо:

$$f(x) = \ln(1+x); f(0) = 0;$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}; f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}; f''(0) = -1;$$

Розклад $f(x) = \ln(1+x)$

Одержуємо:

$$f(x) = \ln(1+x);\, f(0) = 0;$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x};\, f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2};\, f''(0) = -1;$$

$$f'''(x) = \frac{-1\cdot(-2)}{(1+x)^3};\, f'''(0) = 2;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Розклад $f(x) = \ln(1+x)$

Одержуємо:

$$f(x) = \ln(1+x); f(0) = 0;$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}; f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}; f''(0) = -1;$$

$$f'''(x) = \frac{-1 \cdot (-2)}{(1+x)^3}; f'''(0) = 2;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}; f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!;$$

Розклад $f(x) = \ln(1+x)$

Разом:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 2}{3!}x^3 - ... + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$$

Розклад $f(x) = \ln(1+x)$

Разом:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 2}{3!}x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_{n+1}(x)$$

Розклад $f(x) = \ln(1+x)$

Разом:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 2}{3!}x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!}\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)^{n+1}$$

Розклад $f(x) = \ln(1 + x)$

Отримана формула дозволяє знаходити значення будь-яких логарифмів (не тільки натуральних) з будь-яким рівнем точності. Нижче представлений приклад обчислення натурального логарифма $\ln 1,5$. Спочатку отримане точне значення, потім – розрахунок за отриманою вище формулою, обмежившись п'ятьма членами розкладу. Точність сягає $0,0003$.

$$\ln 1,5 = 0,405465108108164381$$

$$\ln 1,5 = \ln(1 + 0,5) \approx 0,5 - \frac{0,5^2}{2} + \frac{0,5^3}{3} - \frac{0,5^4}{4} + \frac{0,5^5}{5} - \frac{0,5^6}{6} + \frac{0,5^7}{7} = 0,4058035$$

Підсумки

Розклад різних функцій за формулами Тейлора і Маклорена наводиться у спеціальних таблицях, однак, формула Тейлора настільки зручна, що для переважної більшості функцій розклад може бути легко знайдений безпосередньо.

Підсумки

Розклад різних функцій за формулами Тейлора і Маклорена наводиться у спеціальних таблицях, однак, формула Тейлора настільки зручна, що для переважної більшості функцій розклад може бути легко знайдений безпосередньо.
Далі у курсі будуть розглянуті різні застосування формули Тейлора не тільки до наближених подань функцій, але і до розв'язання диференціальних рівнянь і до обчислення інтегралів.