Теореми про середнє. Правило Лопіталя

Теорема Ферма (Fermat)

Якщо функція $f(x)$ *має на інтервалі* $(a;b)$ *деяку точку* x_0 *таку, що* $f(x_0) = \min\limits_{x\in(a;b)} f(x)$ *або* $f(x_0) = \max\limits_{x\in(a;b)} f(x)$ *і існує* $f'(x_0)$*, то* $f'(x_0) = 0$.

Доведення

Оскільки випадки аналогічні, нехай $f(x_0) = \max\limits_{x \in (a;b)} f(x)$.

Доведення

Оскільки випадки аналогічні, нехай $f(x_0) = \max\limits_{x \in (a;b)} f(x)$.

Існування $f'(x_0)$ рівносильне тому, що існують *однобічні похідні* $f'_-(x_0)$ та $f'_+(x_0)$ і $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Доведення

Оскільки випадки аналогічні, нехай $f(x_0) = \max\limits_{x\in(a;b)} f(x)$.

Існування $f'(x_0)$ рівносильне тому, що існують *однобічні похідні* $f'_-(x_0)$ та $f'_+(x_0)$ і $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.
Тоді,

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0;$$

Доведення

Оскільки випадки аналогічні, нехай $f(x_0) = \max\limits_{x\in(a;b)} f(x)$.

Існування $f'(x_0)$ рівносильне тому, що існують *однобічні похідні* $f'_-(x_0)$ та $f'_+(x_0)$ і $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.
Тоді,

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0;$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0;$$

Доведення

Оскільки випадки аналогічні, нехай $f(x_0) = \max\limits_{x \in (a;b)} f(x)$.

Існування $f'(x_0)$ рівносильне тому, що існують *однобічні похідні* $f'_-(x_0)$ та $f'_+(x_0)$ і $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.
Тоді,

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0;$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0;$$

і

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Доведення

Оскільки випадки аналогічні, нехай $f(x_0) = \max\limits_{x \in (a;b)} f(x)$.

Існування $f'(x_0)$ рівносильне тому, що існують *однобічні похідні* $f'_-(x_0)$ та $f'_+(x_0)$ і $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.
Тоді,

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0;$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0;$$

і

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Звідси слідує, що $f'(x_0) = 0$.
Теорему доведено.

Теорема Ролля (Rolle)

Якщо функція $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$, *диференційована на інтервалі* $(a;b)$ *і значення функції на кінцях відрізка рівні* $f(a) = f(b)$, *то на інтервалі* $(a;b)$ *існує точка* ε, $a < \varepsilon < b$, *у якій похідна функція* $f(x)$ *рівна нулю,* $f'(\varepsilon) = 0$.

Геометричний зміст

Геометричний зміст теореми Ролля полягає у тому, що при виконанні умов теореми на інтервалі $(a;b)$ існує точка ε така, що у відповідній точці кривої $y = f(x)$ дотична паралельна осі Ox.

Геометричний зміст

Геометричний зміст теореми Ролля полягає у тому, що при виконанні умов теореми на інтервалі $(a; b)$ існує точка ε така, що у відповідній точці кривої $y = f(x)$ дотична паралельна осі Ox.
Таких точок на інтервалі може бути і декілька, але теорема стверджує існування принаймні однієї такої точки.

Доведення

За властивістю функцій, неперервних на відрізку (другою теоремою Веєрштраса), функція $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ приймає найбільше і найменше значення.

Доведення

За властивістю функцій, неперервних на відрізку (другою теоремою Веєрштраса), функція $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ приймає найбільше і найменше значення.
Позначимо ці значення M і m відповідно. Можливі два різних випадки $M = m$ і $M \neq m$.

Доведення

За властивістю функцій, неперервних на відрізку (другою теоремою Веєрштраса), функція $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ приймає найбільше і найменше значення.
Позначимо ці значення M і m відповідно. Можливі два різних випадки $M = m$ і $M \neq m$.
Нехай $M = m$. Тоді функція $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ зберігає постійне значення і у будь-якій точці інтервалу її похідна дорівнює нулю. У цьому випадку за ε можна прийняти будь-яку точку інтервалу.

Доведення

За властивістю функцій, неперервних на відрізку (другою теоремою Веєрштраса), функція $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ приймає найбільше і найменше значення.
Позначимо ці значення M і m відповідно. Можливі два різних випадки $M = m$ і $M \neq m$.
Нехай $M = m$. Тоді функція $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ зберігає постійне значення і у будь-якій точці інтервалу її похідна дорівнює нулю. У цьому випадку за ε можна прийняти будь-яку точку інтервалу.
Нехай $M \neq m$. Тоді значення на кінцях відрізка різні, і хоча б одне зі значень, M або m, функція приймає усередині відрізка $[a;b]$.

Доведення

За властивістю функцій, неперервних на відрізку (другою теоремою Веєрштраса), функція $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ приймає найбільше і найменше значення.
Позначимо ці значення M і m відповідно. Можливі два різних випадки $M = m$ і $M \neq m$.
Нехай $M = m$. Тоді функція $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ зберігає постійне значення і у будь-якій точці інтервалу її похідна дорівнює нулю. У цьому випадку за ε можна прийняти будь-яку точку інтервалу.
Нехай $M \neq m$. Тоді значення на кінцях відрізка різні, і хоча б одне зі значень, M або m, функція приймає усередині відрізка $[a; b]$.Позначимо ε, $a < \varepsilon < b$ точку, у якій $f(\varepsilon) = M$.

Доведення

За властивістю функцій, неперервних на відрізку (другою теоремою Веєрштраса), функція $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ приймає найбільше і найменше значення.
Позначимо ці значення M і m відповідно. Можливі два різних випадки $M = m$ і $M \neq m$.
Нехай $M = m$. Тоді функція $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ зберігає постійне значення і у будь-якій точці інтервалу її похідна дорівнює нулю. У цьому випадку за ε можна прийняти будь-яку точку інтервалу.
Нехай $M \neq m$. Тоді значення на кінцях відрізка різні, і хоча б одне зі значень, M або m, функція приймає усередині відрізка $[a; b]$.Позначимо ε, $a < \varepsilon < b$ точку, у якій $f(\varepsilon) = M$.
Оскільки M – найбільше значення функції, то для кожного Δx (будемо вважати, що точка $\varepsilon + \Delta x$ перебуває усередині розглянутого інтервалу) виконується нерівність:

$$\Delta f\left(\varepsilon\right) = f\left(\varepsilon + \Delta x\right) - f\left(\varepsilon\right) \leqslant 0$$

Доведення

При цьому

$$\frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} = \begin{cases} \leqslant 0, & \text{при} \quad \Delta x > 0 \\ \geqslant 0, & \text{при} \quad \Delta x < 0 \end{cases}$$

Доведення

При цьому

$$\frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} = \begin{cases} \leqslant 0, & \text{при} \quad \Delta x > 0 \\ \geqslant 0, & \text{при} \quad \Delta x < 0 \end{cases}$$

Але оскільки за умовою похідна у точці ε існує, то існує і границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x}$.

Доведення

При цьому

$$\frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} = \begin{cases} \leqslant 0, & \text{при} \quad \Delta x > 0 \\ \geqslant 0, & \text{при} \quad \Delta x < 0 \end{cases}$$

Але оскільки за умовою похідна у точці ε існує, то існує і границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x}$.

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} \leqslant 0$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} \geqslant 0$, то можна зробити висновок:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} = 0, \quad \text{при} \quad f'(\varepsilon) = 0.$$

Теорему доведено.

Наслідки теорема Ролля

1. Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ задовольняє умови теореми Ролля, причому $f(a) = f(b) = 0$, то існує принаймні одна точка ε, $a < \varepsilon < b$, така, що $f'(\varepsilon) = 0$. Тобто між двома нулями функції знайдеться хоча б одна точка, у якій похідна функції дорівнює нулю.

Наслідки теорема Ролля

1. Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ задовольняє умови теореми Ролля, причому $f(a) = f(b) = 0$, то існує принаймні одна точка ε, $a < \varepsilon < b$, така, що $f'(\varepsilon) = 0$. Тобто між двома нулями функції знайдеться хоча б одна точка, у якій похідна функції дорівнює нулю.
2. Якщо на розглянутому інтервалі $(a; b)$ функція $f(x)$ має похідну $(n-1)$-го порядку і n раз обертається в нуль, то існує принаймні одна точка інтервалу, у якій похідна $(n-1)$-го порядку дорівнює нулю.

Залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа

$$g(t) := f(x) - P_n(x,t) - \frac{L}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}, L \in \mathbb{R}, t \in < x_0; x >$$

Залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа

$$g(t) := f(x) - P_n(x,t) - \frac{L}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}, L \in \mathbb{R}, t \in < x_0; x >$$

$$P_n(x,t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)(x-t)^k}{k!}$$

Залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа

$$g(t) := f(x) - P_n(x,t) - \frac{L}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}, L \in \mathbb{R}, t \in < x_0; x >$$

$$P_n(x,t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)(x-t)^k}{k!}$$

1. $g(t)$ неперервна між x_0 та x як сума неперервних.

Залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа

$$g(t) := f(x) - P_n(x,t) - \frac{L}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}, L \in \mathbb{R}, t \in < x_0; x >$$

$$P_n(x,t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)(x-t)^k}{k!}$$

1. $g(t)$ неперервна між x_0 та x як сума неперервних.
2. $g(t)$ диференційована між x_0 та x

$$g'(t) = (f(x))' - f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k}{k!} - \frac{f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} \right) + \frac{L}{n!}(x-t)^n$$

Залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа

$$= -\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} + \frac{L}{n!}(x-t)^n$$

3. $g(x) = 0$. Виберемо $L = L_0$ так, щоб $g(x_0) = 0$:

$$g(x_0) = f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!} - \frac{L}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0$$

$\exists! L = L_0 : g(x_0) = 0.$

Залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа

$$= -\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} + \frac{L}{n!}(x-t)^n$$

3. $g(x) = 0$. Виберемо $L = L_0$ так, щоб $g(x_0) = 0$:

$$g(x_0) = f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!} - \frac{L}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0$$

$\exists! L = L_0 : g(x_0) = 0$.
Нехай $L = L_0$.

Залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа

Для $g(t)$ справджуються умови теореми Ролля.

Залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа

Для $g(t)$ справджуються умови теореми Ролля.

$$\exists \theta \in (0;1) : g'(x_0 + \theta(x - x_0)) = 0$$

Залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа

Для $g(t)$ справджуються умови теореми Ролля.

$$\exists\theta \in (0;1) : g'(x_0 + \theta(x - x_0)) = 0$$

Тобто

$$\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0 - \theta(x - x_0))^n}{n!} = \frac{L_0}{n!}(x - x_0 - \theta(x - x_0))^n$$

Залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа

Для $g(t)$ справджуються умови теореми Ролля.

$$\exists\theta \in (0;1) : g'(x_0 + \theta(x - x_0)) = 0$$

Тобто

$$\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0 - \theta(x - x_0))^n}{n!} = \frac{L_0}{n!}(x - x_0 - \theta(x - x_0))^n \Rightarrow$$

$$L_0 = f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))$$

Залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа

Для $g(t)$ справджуються умови теореми Ролля.

$$\exists \theta \in (0;1) : g'(x_0 + \theta(x - x_0)) = 0$$

Тобто

$$\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0 - \theta(x - x_0))^n}{n!} = \frac{L_0}{n!}(x - x_0 - \theta(x - x_0))^n \Rightarrow$$

$$L_0 = f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))$$

Звідси, розглядаючи $g(x_0)$, отримуємо формулу Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа.

Теорема Лагранжа

Якщо функція $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a; b]$ *і диференційована на інтервалі* $(a; b)$, *то на цьому інтервалі знайдеться принаймні одна точка* c, $a < c < b$, *така, що* $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

Теорема Лагранжа

Якщо функція $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і диференційована на інтервалі* $(a;b)$*, то на цьому інтервалі знайдеться принаймні одна точка* c*,* $a < c < b$*, така, що* $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

Це означає, що якщо на деякому проміжку виконуються умови теореми, то відношення приросту функції до приросту аргументу на цьому відрізку дорівнює значенню похідної у деякій проміжній точці.

Теорема Лагранжа

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційована на інтервалі $(a;b)$, то на цьому інтервалі знайдеться принаймні одна точка c, $a < c < b$, така, що $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Це означає, що якщо на деякому проміжку виконуються умови теореми, то відношення приросту функції до приросту аргументу на цьому відрізку дорівнює значенню похідної у деякій проміжній точці.

Розглянута вище теорема Ролля є частковим випадком теореми Лагранжа.

Теорема Лагранжа

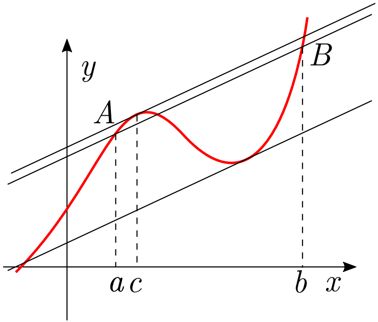
Якщо функція $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a; b]$ *і диференційована на інтервалі* $(a; b)$, *то на цьому інтервалі знайдеться принаймні одна точка* c, $a < c < b$, *така, що* $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

Це означає, що якщо на деякому проміжку виконуються умови теореми, то відношення приросту функції до приросту аргументу на цьому відрізку дорівнює значенню похідної у деякій проміжній точці.

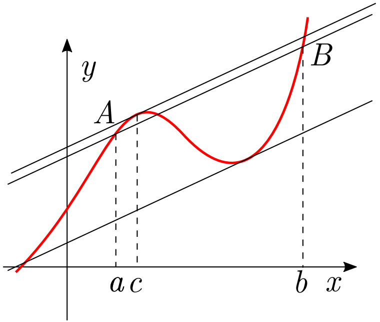
Розглянута вище теорема Ролля є частковим випадком теореми Лагранжа.

Відношення $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ дорівнює кутовому коефіцієнту січної AB.

Креслення до теореми Лагранжа



Креслення до теореми Лагранжа



Якщо функція $f(x)$ задовольняє умовам теореми, то на інтервалі $(a;b)$ існує точка c така, що у відповідній точці кривої $y = f(x)$ дотична паралельна січній, що з'єднує точки A і B. Таких точок може бути і декілька, але одна існує точно.

Доведення

Розглянемо деяку допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - y_{\text{січн AB}}$$

Доведення

Розглянемо деяку допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - y_{\text{січн AB}}$$

Рівняння січної AB можна записати у вигляді:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a);$$

Доведення

Розглянемо деяку допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - y_{\text{січн AB}}$$

Рівняння січної AB можна записати у вигляді:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a);$$

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Доведення

Розглянемо деяку допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - y_{\text{січн AB}}$$

Рівняння січної AB можна записати у вигляді:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a);$$

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Функція $F(x)$ задовольняє умови теореми Ролля. Дійсно, вона неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційована на інтервалі $(a; b)$. За теоремою Ролля існує хоча б одна точка c, $a < c < b$, така що $F'(c) = 0$.

Доведення

Оскільки $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, то $F'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, отже

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Теорему доведено.

Формула Лагранжа

Означення Вираз
$$f(a) - f(b) = f'(\varepsilon)(b - a)$$
називається **формулою Лагранжа** або **формулою скінчених приростів**

Формула Лагранжа

<u>Означення</u> Вираз

$$f(a) - f(b) = f'(\varepsilon)(b - a)$$

називається **формулою Лагранжа** або **формулою скінчених приростів**
Надалі ця формула буде дуже часто застосовуватися для доведення найрізноманітніших теорем.

Формула Лагранжа

<u>**Означення**</u> Вираз

$$f(a) - f(b) = f'(\varepsilon)(b - a)$$

називається **формулою Лагранжа** або **формулою скінчених приростів**
Надалі ця формула буде дуже часто застосовуватися для доведення найрізноманітніших теорем.
Іноді формулу Лагранжа записують у трохи іншому вигляді:

$$\Delta y = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x,$$

де $0 < \theta < 1$, $\Delta x = b - a$, $\Delta y = f(b) - f(a)$.

Теорема Коші

Якщо функції $f(x)$ *і* $g(x)$ *неперервні на відрізку* $[a;b]$ *і диференційовані на інтервалі* $(a;b)$ *і* $g'(x) \neq 0$ *на інтервалі* $(a;b)$, *то існує принаймні одна точка* ε, $a < \varepsilon < b$, *така, що*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}.$$

Теорема Коші

Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$ і диференційовані на інтервалі $(a;b)$ і $g'(x) \neq 0$ на інтервалі $(a;b)$, то існує принаймні одна точка ε, $a < \varepsilon < b$, така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}.$$

Тобто відношення приростів функцій на даному відрізку дорівнює відношенню похідних у точці ε.

Теорема Коші

Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$ і диференційовані на інтервалі $(a;b)$ і $g'(x) \neq 0$ на інтервалі $(a;b)$, то існує принаймні одна точка ε, $a < \varepsilon < b$, така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}.$$

Тобто відношення приростів функцій на даному відрізку дорівнює відношенню похідних у точці ε.

Для доведення цієї теореми на перший погляд дуже зручно скористатися теоремою Лагранжа. Записати формулу скінченних різниць для кожної функції, а потім розділити їхній одну на одну. Однак, це враження помилкове, оскільки точка ε для кожної з функцій в загальному випадку різна. Звичайно, у деяких окремих випадках ця точка інтервалу може виявитися однаковою для обох функцій, але це – дуже рідкісний збіг, а не правило, тому він не може бути використаний для доведення теореми.

Доведення

Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)),$$

яка на інтервалі $[a; b]$ задовольняє умовам теореми Ролля.

Доведення

Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)),$$

яка на інтервалі $[a; b]$ задовольняє умовам теореми Ролля.
При $x = a$ та $x = b$: $F(a) = F(b) = 0$.

Доведення

Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)),$$

яка на інтервалі $[a; b]$ задовольняє умовам теореми Ролля.
При $x = a$ та $x = b$: $F(a) = F(b) = 0$.
Тоді за теоремою Ролля існує точка ε, $a < \varepsilon < b$, така, що $F'(\varepsilon) = 0$.

Доведення

Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)),$$

яка на інтервалі $[a; b]$ задовольняє умовам теореми Ролля.
При $x = a$ та $x = b$: $F(a) = F(b) = 0$.
Тоді за теоремою Ролля існує точка ε, $a < \varepsilon < b$, така, що $F'(\varepsilon) = 0$.
Оскільки $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$, то

$$F'(\varepsilon) = 0 = f'(\varepsilon) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\varepsilon)$$

Доведення

Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)),$$

яка на інтервалі $[a; b]$ задовольняє умовам теореми Ролля.
При $x = a$ та $x = b$: $F(a) = F(b) = 0$.
Тоді за теоремою Ролля існує точка ε, $a < \varepsilon < b$, така, що $F'(\varepsilon) = 0$.
Оскільки $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$, то

$$F'(\varepsilon) = 0 = f'(\varepsilon) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\varepsilon)$$

А оскільки $g'(\varepsilon) \neq 0$, то

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}.$$

Теорему доведено.

Правило Лопіталя

До розряду невизначеностей прийнято включати наступні співвідношення:

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ \infty\cdot 0;\ \infty^{0};\ 1^{\infty};\ \infty-\infty$$

Теорема (правило Лопіталя)[1]

Якщо функції $f(x)$ *і* $g(x)$ *диференційовані поблизу точки* a*, неперервні у точці* a*,* $g'(x)$ *відмінна від нуля поблизу* a *і* $f(a) = g(a) = 0$*, то границя частки функцій при* $x \to a$ *дорівнює границі частки їхніх похідних, якщо ця границя (скінченна або нескінченна) існує.*

[1] Гійом де Лопіталь (Guillaume François Antoine de L'Hôpital) (1661–1704) – французький математик

Теорема (правило Лопіталя)[1]

Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані поблизу точки a, неперервні у точці a, $g'(x)$ відмінна від нуля поблизу a і $f(a) = g(a) = 0$, то границя частки функцій при $x \to a$ дорівнює границі частки їхніх похідних, якщо ця границя (скінченна або нескінченна) існує.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

[1] Гійом де Лопіталь (Guillaume François Antoine de L'Hôpital) (1661–1704) – французький математик

Доведення

Застосувавши формулу Коші, одержимо:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

де ε – точка, що перебуває між a і x. З огляду на те, що $f(a) = g(a) = 0$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

Доведення

Застосувавши формулу Коші, одержимо:

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

де ε – точка, що перебуває між a і x. З огляду на те, що $f(a)=g(a)=0$:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

Нехай при $x\to a$ відношення $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ прямує до деякої границі.

Доведення

Застосувавши формулу Коші, одержимо:

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

де ε – точка, що перебуває між a і x. З огляду на те, що $f(a) = g(a) = 0$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

Нехай при $x \to a$ відношення $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ прямує до деякої границі.Оскільки точка ε лежить між точками a та x, то при $x \to a$ одержимо $\varepsilon \to a$, а отже і відношення $\dfrac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$ прямує до тієї ж границі.

Доведення

Застосувавши формулу Коші, одержимо:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

де ε – точка, що перебуває між a і x. З огляду на те, що $f(a) = g(a) = 0$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

Нехай при $x \to a$ відношення $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ прямує до деякої границі.Оскільки точка ε лежить між точками a та x, то при $x \to a$ одержимо $\varepsilon \to a$, а отже і відношення $\dfrac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$ прямує до тієї ж границі.Таким чином, можна записати:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорему доведено.

Приклад

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}.$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}.$$

Функції, що входять у чисельник і знаменник дробу, задовольняють вимогам теореми Лопіталя.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}.$$

Функції, що входять у чисельник і знаменник дробу, задовольняють вимогам теореми Лопіталя.

$$f'(x)=2x+\frac{1}{x};g'(x)=e^x;$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}.$$

Функції, що входять у чисельник і знаменник дробу, задовольняють вимогам теореми Лопіталя.

$$f'(x)=2x+\frac{1}{x};g'(x)=e^x;$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+\dfrac{1}{x}}{e^x}=\frac{2+1}{e}=\frac{3}{e};$$

Приклад

Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{e^{\frac{3}{x}} - 1}$.

Розв'язання

$$f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}; g'(x) = -e^{\frac{3}{x}} \cdot \frac{3}{x^2};$$

Розв'язання

$$f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}; g'(x) = -e^{\frac{3}{x}} \cdot \frac{3}{x^2};$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{2x^2}{(1+x^2)e^{\frac{3}{x}}(-3)}\right] = \frac{-2}{(0+1)\cdot 1\cdot(-3)} = \frac{2}{3}.$$

Повторне застосування правила Лопіталя

Якщо при розв'язанні прикладу після застосування правила Лопіталя спроба обчислити границю знову приводить до невизначеності, то правило Лопіталя може бути застосовано другий раз, третій тощо поки не буде отриманий результат.

Повторне застосування правила Лопіталя

Якщо при розв'язанні прикладу після застосування правила Лопіталя спроба обчислити границю знову приводить до невизначеності, то правило Лопіталя може бути застосовано другий раз, третій тощо поки не буде отриманий результат.
Природно, це можливо тільки у тому випадку, якщо знову отримані функції у свою чергу задовольняють вимогам теореми Лопіталя.

Приклад

Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$.

Розв'язання

$$f'(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}x\right); g'(x) = 1 + e^{x};$$

Розв'язання

$$f'(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}x\right); g'(x) = 1 + e^x;$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{4}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4 + x); g''(x) = e^x;$$

Розв'язання

$$f'(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}x\right); g'(x) = 1 + e^{x};$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{4}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4 + x); g''(x) = e^{x};$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4 + x)}{e^{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{4}(4 + x)}{e^{\frac{x}{2}}}$$

Розв'язання

$$f'(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}x\right); g'(x) = 1 + e^x;$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{4}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4 + x); g''(x) = e^x;$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4 + x)}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{4}(4 + x)}{e^{\frac{x}{2}}}$$

$$f_1'(x) = \frac{1}{4}; g_1'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}; \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}} = 0;$$

Зауваження

Слід зазначити, що правило Лопіталя – всього лише один зі способів обчислення границь. Часто в конкретному прикладі поряд із правилом Лопіталя може бути використаний і якийсь інший метод (заміна змінних, домноження тощо).

Приклад

Знайти границю $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

Розв'язання

$$f'(x) = e^x + e^{-x} - 2; g'(x) = 1 - \cos x;$$

Розв'язання

$$f'(x) = e^x + e^{-x} - 2; g'(x) = 1 - \cos x;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{1+1-2}{1-1} = \frac{0}{0}$$

Розв'язання

$$f'(x) = e^x + e^{-x} - 2; g'(x) = 1 - \cos x;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{1 + 1 - 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

Знову вийшла невизначеність. Застосуємо правило Лопіталя ще раз.

$$f''(x) = e^x - e^{-x}; g''(x) = \sin x;$$

Розв'язання

$$f'(x) = e^x + e^{-x} - 2; g'(x) = 1 - \cos x;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{1 + 1 - 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

Знову вийшла невизначеність. Застосуємо правило Лопіталя ще раз.

$$f''(x) = e^x - e^{-x}; g''(x) = \sin x;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}.$$

Розв'язання

Застосовуємо правило Лопіталя ще раз.

$$f'''(x) = e^x + e^{-x}; g'''(x) = \cos x;$$

Розв'язання

Застосовуємо правило Лопіталя ще раз.

$$f'''(x) = e^x + e^{-x}; g'''(x) = \cos x;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

Розкриття інших невизначеностей

Невизначеності вигляду 0^0; 1^∞; ∞^0 можна розкрити за допомогою логарифмування. Такі невизначеності зустрічаються при знаходженні меж функцій вигляду $y = [f(x)]^{g(x)}$, $f(x) > 0$ поблизу точки a при $x \to a$. Для знаходження границі такої функції досить знайти границю функції $\ln y = g(x) \ln f(x)$.

Приклад

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$.

Розв'язання

$$\lim_{x \to 0+0} x^x$$

Тут $y = x^x$, $\ln y = x \ln x$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0+0} x^x$$

Тут $y = x^x$, $\ln y = x \ln x$.
Тоді

$$\lim_{x\to 0+0} \ln y = \lim_{x\to 0+0} x \ln x$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0+0} x^x$$

Тут $y = x^x$, $\ln y = x \ln x$.
Тоді

$$\lim_{x\to 0+0} \ln y = \lim_{x\to 0+0} x \ln x = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left\{ \begin{array}{c} \text{правило} \\ \text{Лопіталя} \end{array} \right\}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0+0} x^x$$

Тут $y = x^x$, $\ln y = x \ln x$.
Тоді

$$\lim_{x\to 0+0} \ln y = \lim_{x\to 0+0} x \ln x = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left\{ \begin{array}{c} \text{правило} \\ \text{Лопіталя} \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{1/x}{-1/x^2}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0+0} x^x$$

Тут $y = x^x$, $\ln y = x \ln x$.
Тоді

$$\lim_{x\to 0+0} \ln y = \lim_{x\to 0+0} x \ln x = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left\{ \begin{array}{c} \text{правило} \\ \text{Лопіталя} \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0+0} x$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0+0} x^x$$

Тут $y = x^x$, $\ln y = x\ln x$.
Тоді

$$\lim_{x\to 0+0} \ln y = \lim_{x\to 0+0} x\ln x = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left\{ \begin{array}{c} \text{правило} \\ \text{Лопіталя} \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0+0} x = 0.$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0+0} x^x$$

Тут $y = x^x$, $\ln y = x\ln x$.
Тоді

$$\lim_{x\to 0+0} \ln y = \lim_{x\to 0+0} x\ln x = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left\{ \begin{array}{c} \text{правило} \\ \text{Лопіталя} \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0+0} x = 0.$$

Отже $\lim\limits_{x\to 0+0} \ln y = \ln \lim\limits_{x\to 0+0} y = 0$;

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0+0} x^x$$

Тут $y = x^x$, $\ln y = x \ln x$.
Тоді

$$\lim_{x\to 0+0} \ln y = \lim_{x\to 0+0} x \ln x = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left\{ \begin{array}{c} \text{правило} \\ \text{Лопіталя} \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0+0} x = 0.$$

Отже $\lim\limits_{x\to 0+0} \ln y = \ln \lim\limits_{x\to 0+0} y = 0; \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0+0} y = \lim\limits_{x\to 0+0} x^x = 1$

Приклад

Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^{2x}}$.

Розв'язання

$$f(x) = x^2; \quad g(x) = e^{2x}$$

Розв'язання

$$f(x) = x^2; \quad g(x) = e^{2x}$$

$$f'(x) = 2x; \quad g'(x) = 2e^{2x};$$

Розв'язання

$$f(x) = x^2; \quad g(x) = e^{2x}$$

$$f'(x) = 2x; \quad g'(x) = 2e^{2x};$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^{2x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Розв'язання

$$f(x) = x^2; \quad g(x) = e^{2x}$$

$$f'(x) = 2x; \quad g'(x) = 2e^{2x};$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{2x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Одержали невизначеність. Застосовуємо правило Лопіталя ще раз.

$$f''(x) = 2; g''(x) = 4e^{2x};$$

Розв'язання

$$f(x) = x^2; \quad g(x) = e^{2x}$$

$$f'(x) = 2x; \quad g'(x) = 2e^{2x};$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{2x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Одержали невизначеність. Застосовуємо правило Лопіталя ще раз.

$$f''(x) = 2; g''(x) = 4e^{2x};$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2e^{2x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$