Схема дослідження функцій

Порядок дослідження

Процес дослідження функції складається з декількох етапів. Для отримання якнайповніших даних щодо поводження функції і характеру її графіка необхідно визначити такі дані:

1. Область існування функції. Це поняття містить у собі і область значень і область визначення функції.

Порядок дослідження

Процес дослідження функції складається з декількох етапів. Для отримання якнайповніших даних щодо поводження функції і характеру її графіка необхідно визначити такі дані:

1. Область існування функції. Це поняття містить у собі і область значень і область визначення функції.
2. Точки розриву. (Якщо вони є).

Порядок дослідження

Процес дослідження функції складається з декількох етапів. Для отримання якнайповніших даних щодо поводження функції і характеру її графіка необхідно визначити такі дані:

1. Область існування функції. Це поняття містить у собі і область значень і область визначення функції.
2. Точки розриву. (Якщо вони є).
3. Інтервали зростання і спадання.

Порядок дослідження

Процес дослідження функції складається з декількох етапів. Для отримання якнайповніших даних щодо поводження функції і характеру її графіка необхідно визначити такі дані:

1. Область існування функції. Це поняття містить у собі і область значень і область визначення функції.
2. Точки розриву. (Якщо вони є).
3. Інтервали зростання і спадання.
4. Точки максимуму і мінімуму.

Порядок дослідження

Процес дослідження функції складається з декількох етапів. Для отримання якнайповніших даних щодо поводження функції і характеру її графіка необхідно визначити такі дані:

1. Область існування функції. Це поняття містить у собі і область значень і область визначення функції.
2. Точки розриву. (Якщо вони є).
3. Інтервали зростання і спадання.
4. Точки максимуму і мінімуму.
5. Максимальне і мінімальне значення функції на її області визначення.

Порядок дослідження

Процес дослідження функції складається з декількох етапів. Для отримання якнайповніших даних щодо поводження функції і характеру її графіка необхідно визначити такі дані:

1. Область існування функції. Це поняття містить у собі і область значень і область визначення функції.
2. Точки розриву. (Якщо вони є).
3. Інтервали зростання і спадання.
4. Точки максимуму і мінімуму.
5. Максимальне і мінімальне значення функції на її області визначення.
6. Області опуклості і увігнутості.

Порядок дослідження

Процес дослідження функції складається з декількох етапів. Для отримання якнайповніших даних щодо поводження функції і характеру її графіка необхідно визначити такі дані:

1. Область існування функції. Це поняття містить у собі і область значень і область визначення функції.
2. Точки розриву. (Якщо вони є).
3. Інтервали зростання і спадання.
4. Точки максимуму і мінімуму.
5. Максимальне і мінімальне значення функції на її області визначення.
6. Області опуклості і увігнутості.
7. Точки перегину. (Якщо вони є).

Порядок дослідження

Процес дослідження функції складається з декількох етапів. Для отримання якнайповніших даних щодо поводження функції і характеру її графіка необхідно визначити такі дані:

1. Область існування функції. Це поняття містить у собі і область значень і область визначення функції.
2. Точки розриву. (Якщо вони є).
3. Інтервали зростання і спадання.
4. Точки максимуму і мінімуму.
5. Максимальне і мінімальне значення функції на її області визначення.
6. Області опуклості і увігнутості.
7. Точки перегину. (Якщо вони є).
8. Асимптоти. (Якщо вони є).

Порядок дослідження

Процес дослідження функції складається з декількох етапів. Для отримання якнайповніших даних щодо поводження функції і характеру її графіка необхідно визначити такі дані:

1. Область існування функції. Це поняття містить у собі і область значень і область визначення функції.
2. Точки розриву. (Якщо вони є).
3. Інтервали зростання і спадання.
4. Точки максимуму і мінімуму.
5. Максимальне і мінімальне значення функції на її області визначення.
6. Області опуклості і увігнутості.
7. Точки перегину. (Якщо вони є).
8. Асимптоти. (Якщо вони є).
9. Побудова графіка.

Приклад

Дослідити функцію $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ і побудувати її графік.

Область існування (визначення) і точки розриву

Знаходимо область існування функції. Очевидно, що *областю визначення* функції є область $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$. У свою чергу, видно, що прямі $x = 1$, $x = -1$ є *вертикальними асимптотами* кривої.

Область існування (визначення) і точки розриву

Знаходимо область існування функції. Очевидно, що *областю визначення* функції є область $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$. У свою чергу, видно, що прямі $x = 1$, $x = -1$ є *вертикальними асимптотами* кривої.
Областю значень даної функції є інтервал $(-\infty; \infty)$.

Область існування (визначення) і точки розриву

Знаходимо область існування функції. Очевидно, що *областю визначення* функції є область $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$. У свою чергу, видно, що прямі $x = 1$, $x = -1$ є *вертикальними асимптотами* кривої.
Областю значень даної функції є інтервал $(-\infty; \infty)$.
Точками розриву функції є точки $x = 1$, $x = -1$.

Критичні точки

Знаходимо *критичні точки*.

Критичні точки

Знаходимо *критичні точки.*
Знайдемо похідну функції

$$y' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Критичні точки

Знаходимо *критичні точки.*
Знайдемо похідну функції

$$y' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Критичні точки: $x = 0$; $x = -\sqrt{3}$; $x = \sqrt{3}$; $x = -1$; $x = 1$.

Друга похідна

Знайдемо другу похідну функції

$$y'' = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1)^2 - (x^4 - 3x^2)4x(x^2-1)}{(x^2-1)^4} =$$

Друга похідна

Знайдемо другу похідну функції

$$y'' = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2)4x(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3 - 6x)(x^4 - 2x^2 + 1) - (x^4 - 3x^2)(4x^3 - 4x)}{(x^2 - 1)^4} =$$

Друга похідна

Знайдемо другу похідну функції

$$y'' = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2)4x(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3 - 6x)(x^4 - 2x^2 + 1) - (x^4 - 3x^2)(4x^3 - 4x)}{(x^2 - 1)^4} =$$

$$= \frac{4x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x^5 + 12x^3 - 6x - 4x^7 + 4x^5 + 12x^5 - 12x^3}{(x^2 - 1)^4} =$$

Друга похідна

Знайдемо другу похідну функції

$$y'' = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)4x(x^2-1)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3-6x)(x^4-2x^2+1)-(x^4-3x^2)(4x^3-4x)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{4x^7-8x^5+4x^3-6x^5+12x^3-6x-4x^7+4x^5+12x^5-12x^3}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{2x^5+4x^3-6x}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^4+2x^2-3)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Опуклість і увігнутість

Визначимо опуклість і увігнутість кривої на проміжках.

Опуклість і увігнутість

Визначимо опуклість і увігнутість кривої на проміжках.
$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y'' < 0$, крива опукла

Опуклість і увігнутість

Визначимо опуклість і увігнутість кривої на проміжках.
$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y'' < 0$, крива опукла
$-\sqrt{3} < x < -1$, $y'' < 0$, крива опукла

Опуклість і увігнутість

Визначимо опуклість і увігнутість кривої на проміжках.
$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y'' < 0$, крива опукла
$-\sqrt{3} < x < -1$, $y'' < 0$, крива опукла
$-1 < x < 0$, $y'' > 0$, крива увігнута

Опуклість і увігнутість

Визначимо опуклість і увігнутість кривої на проміжках.
$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y'' < 0$, крива опукла
$-\sqrt{3} < x < -1$, $y'' < 0$, крива опукла
$-1 < x < 0$, $y'' > 0$, крива увігнута
$0 < x < 1$, $y'' < 0$, крива опукла

Опуклість і увігнутість

Визначимо опуклість і увігнутість кривої на проміжках.
$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y'' < 0$, крива опукла
$-\sqrt{3} < x < -1$, $y'' < 0$, крива опукла
$-1 < x < 0$, $y'' > 0$, крива увігнута
$0 < x < 1$, $y'' < 0$, крива опукла
$1 < x < \sqrt{3}$, $y'' > 0$, крива увігнута

Опуклість і увігнутість

Визначимо опуклість і увігнутість кривої на проміжках.
$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y'' < 0$, крива опукла
$-\sqrt{3} < x < -1$, $y'' < 0$, крива опукла
$-1 < x < 0$, $y'' > 0$, крива увігнута
$0 < x < 1$, $y'' < 0$, крива опукла
$1 < x < \sqrt{3}$, $y'' > 0$, крива увігнута
$\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, крива увігнута

Зростання і спадання

Знаходимо проміжки *зростання* і *спадання* функції. Для цього визначаємо знаки похідної функції на проміжках.

Зростання і спадання

Знаходимо проміжки *зростання* і *спадання* функції. Для цього визначаємо знаки похідної функції на проміжках.
$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функція зростає

Зростання і спадання

Знаходимо проміжки *зростання* і *спадання* функції. Для цього визначаємо знаки похідної функції на проміжках.
$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функція зростає
$-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$, функція спадає

Зростання і спадання

Знаходимо проміжки *зростання* і *спадання* функції. Для цього визначаємо знаки похідної функції на проміжках.
$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функція зростає
$-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$, функція спадає
$-1 < x < 0$, $y' < 0$, функція спадає

Зростання і спадання

Знаходимо проміжки *зростання* і *спадання* функції. Для цього визначаємо знаки похідної функції на проміжках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функція зростає

$-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$, функція спадає

$-1 < x < 0$, $y' < 0$, функція спадає

$0 < x < 1$, $y' < 0$, функція спадає

Зростання і спадання

Знаходимо проміжки *зростання* і *спадання* функції. Для цього визначаємо знаки похідної функції на проміжках.
$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функція зростає
$-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$, функція спадає
$-1 < x < 0$, $y' < 0$, функція спадає
$0 < x < 1$, $y' < 0$, функція спадає
$1 < x < \sqrt{3}$, $y' < 0$, функція спадає

Зростання і спадання

Знаходимо проміжки *зростання* і *спадання* функції. Для цього визначаємо знаки похідної функції на проміжках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функція зростає

$-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$, функція спадає

$-1 < x < 0$, $y' < 0$, функція спадає

$0 < x < 1$, $y' < 0$, функція спадає

$1 < x < \sqrt{3}$, $y' < 0$, функція спадає

$\sqrt{3} < x < \infty$, $y' > 0$, функція зростає

Зростання і спадання

Знаходимо проміжки *зростання* і *спадання* функції. Для цього визначаємо знаки похідної функції на проміжках.
$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функція зростає
$-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$, функція спадає
$-1 < x < 0$, $y' < 0$, функція спадає
$0 < x < 1$, $y' < 0$, функція спадає
$1 < x < \sqrt{3}$, $y' < 0$, функція спадає
$\sqrt{3} < x < \infty$, $y' > 0$, функція зростає
Видно, що точка $x = -\sqrt{3}$ є точкою *максимуму*, а точка $x = \sqrt{3}$ є точкою *мінімуму*.

Зростання і спадання

Знаходимо проміжки *зростання* і *спадання* функції. Для цього визначаємо знаки похідної функції на проміжках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функція зростає

$-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$, функція спадає

$-1 < x < 0$, $y' < 0$, функція спадає

$0 < x < 1$, $y' < 0$, функція спадає

$1 < x < \sqrt{3}$, $y' < 0$, функція спадає

$\sqrt{3} < x < \infty$, $y' > 0$, функція зростає

Видно, що точка $x = -\sqrt{3}$ є точкою *максимуму*, а точка $x = \sqrt{3}$ є точкою *мінімуму*.

Значення функції у цих точках рівні відповідно $3/2\sqrt{3}$ і $-3/2\sqrt{3}$.

Похилі асимптоти

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\dfrac{1}{x^2}} = 1;$$

Похилі асимптоти

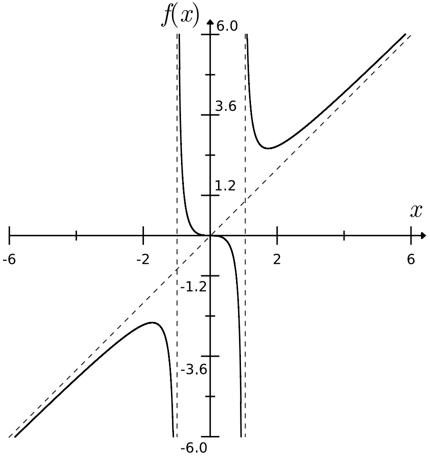
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\dfrac{1}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}} = 0$$

Отже, рівняння похилої асимптоти – $y = x$.

Графік функції



Приклад

Методами диференціального числення дослідити функцію $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$ і побудувати її графік.

За пунктами

1. Областю визначення даної функції є всі дійсні числа $(-\infty; \infty)$.

За пунктами

1. Областю визначення даної функції є всі дійсні числа $(-\infty; \infty)$.
2. Функція є функцією загального виду в сенсі парності і непарності.

За пунктами

1. Областю визначення даної функції є всі дійсні числа $(-\infty; \infty)$.
2. Функція є функцією загального виду в сенсі парності і непарності.
3. Точки перетину з координатними осями: з віссю Oy: $x = 0$; $y = 1$; з віссю Ox: $y = 0$; $x = 1$;

За пунктами

1. Областю визначення даної функції є всі дійсні числа $(-\infty; \infty)$.
2. Функція є функцією загального виду в сенсі парності і непарності.
3. Точки перетину з координатними осями: з віссю Oy: $x = 0$; $y = 1$; з віссю Ox: $y = 0$; $x = 1$;
4. Точки розриву і асимптоти: Вертикальних асимптот немає.

Похилі асимптоти

Похилі асимптоти: загальне рівняння $y = kx + b$;

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Похилі асимптоти

Похилі асимптоти: загальне рівняння $y = kx + b$;

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}$$

Похилі асимптоти

Похилі асимптоти: загальне рівняння $y = kx + b$;

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1}$$

Похилі асимптоти

Похилі асимптоти: загальне рівняння $y = kx + b$;

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} = -1;$$

Похилі асимптоти

Похилі асимптоти: загальне рівняння $y = kx + b$;

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} = -1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} (\sqrt[3]{1-x^3} + x)$$

Похилі асимптоти: загальне рівняння $y = kx + b$;

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} = -1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} (\sqrt[3]{1-x^3} + x) =$$

$$= \lim_{x\leftarrow\infty} \frac{(1 - x^3 + x^3)}{\left[\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2 - x \cdot \sqrt[3]{1-x^3} + x^2\right]}$$

Похилі асимптоти

Похилі асимптоти: загальне рівняння $y = kx + b$;

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} = -1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} (\sqrt[3]{1-x^3} + x) =$$

$$= \lim_{x\leftarrow\infty} \frac{(1 - x^3 + x^3)}{\left[\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2 - x \cdot \sqrt[3]{1-x^3} + x^2\right]} = 0;$$

Похилі асимптоти

Похилі асимптоти: загальне рівняння $y = kx + b$;

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} = -1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} (\sqrt[3]{1-x^3} + x) =$$

$$= \lim_{x\leftarrow\infty} \frac{(1 - x^3 + x^3)}{\left[\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2 - x \cdot \sqrt[3]{1-x^3} + x^2\right]} = 0;$$

Отже: $y = -x$ – похила асимптота.

За пунктами

5. Зростання і спадання функції, точки екстремуму.

$$y' = \frac{1}{3}(1 - x^3)^{-2/3} \cdot \left(-3x^2\right) .$$

За пунктами

5. Зростання і спадання функції, точки екстремуму.

$$y' = \frac{1}{3}(1 - x^3)^{-2/3} \cdot \left(-3x^2\right).$$

Видно, що $y' < 0$ при будь-якому $x \neq 0$, отже, функція спадає на всій області визначення і не має екстремумів.

5. Зростання і спадання функції, точки екстремуму.

$$y' = \frac{1}{3}(1 - x^3)^{-2/3} \cdot \left(-3x^2\right).$$

Видно, що $y' < 0$ при будь-якому $x \neq 0$, отже, функція спадає на всій області визначення і не має екстремумів.
У точці $x = 0$ перша похідна функції дорівнює нулю, однак у цій точці спадання не змінюється на зростання, отже, у точці $x = 0$ функція швидше за все має перегин.

Точки перегину

6. Для знаходження точок перегину, знаходимо другу похідну функції.

Точки перегину

6. Для знаходження точок перегину, знаходимо другу похідну функції.

$$y'' = \frac{-2x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^5}}$$

Точки перегину

6. Для знаходження точок перегину, знаходимо другу похідну функції.

$$y'' = \frac{-2x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^5}}$$

$y'' = 0$ при $x = 0$ і $y'' = \infty$ при $x = 1$.

Точки перегину

6. Для знаходження точок перегину, знаходимо другу похідну функції.

$$y'' = \frac{-2x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^5}}$$

$y'' = 0$ при $x = 0$ і $y'' = \infty$ при $x = 1$.
Точки $(0,1)$ і $(1,0)$ є точками перегину, оскільки $y''(1-h) < 0$; $y''(1+h) > 0$; $y''(-h) > 0$; $y''(h) < 0$ для будь-якого $h > 0$.

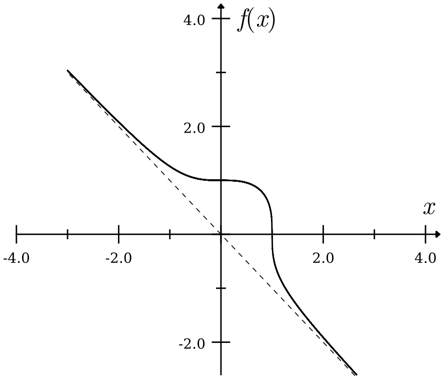
Точки перегину

6. Для знаходження точок перегину, знаходимо другу похідну функції.

$$y'' = \frac{-2x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^5}}$$

$y'' = 0$ при $x = 0$ і $y'' = \infty$ при $x = 1$.
Точки $(0,1)$ і $(1,0)$ є точками перегину, оскільки $y''(1-h) < 0$; $y''(1+h) > 0$; $y''(-h) > 0$; $y''(h) < 0$ для будь-якого $h > 0$.

Графік функції



Приклад

Дослідити функцію $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$ і побудувати її графік.

За пунктами

1. Областю визначення функції є всі значення x, крім $x = 0$.

За пунктами

1. Областю визначення функції є всі значення x, крім $x = 0$.
2. Функція є функцією загального виду в сенсі парності і непарності.

За пунктами

1. Областю визначення функції є всі значення x, крім $x = 0$.
2. Функція є функцією загального виду в сенсі парності і непарності.
3. Точки перетину з координатними осями: с віссю Ox: $y = 0$; $x = -\sqrt[3]{4}$ з віссю Oy: $x = 0$; y – не існує.

За пунктами

1. Областю визначення функції є всі значення x, крім $x = 0$.
2. Функція є функцією загального виду в сенсі парності і непарності.
3. Точки перетину з координатними осями: с віссю Ox: $y = 0$; $x = -\sqrt[3]{4}$ з віссю Oy: $x = 0$; y – не існує.
4. Точка $x = 0$ є точкою розриву $\lim\limits_{x \to 0} y = \infty$, отже, пряма $x = 0$ є вертикальною асимптотою.

Похилі асимптоти

Похилі асимптоти шукаємо у вигляді: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{4}{x^3}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+4}{x^2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^3} = 0.$$

Похила асимптота — $y = x$.

Екстремуми

5. Знаходимо точки екстремуму функції.

Екстремуми

5. Знаходимо точки екстремуму функції.
   $y' = 1 - \dfrac{8}{x^3}$; $y' = 0$ при $x = 2$, $y' = \infty$ при $x = 0$.

Екстремуми

5. Знаходимо точки екстремуму функції.
   $y' = 1 - \dfrac{8}{x^3}$; $y' = 0$ при $x = 2$, $y' = \infty$ при $x = 0$.
   $y' > 0$ при $x \in (-\infty, 0)$ – функція зростає,

Екстремуми

5. Знаходимо точки екстремуму функції.
   $y' = 1 - \dfrac{8}{x^3}$; $y' = 0$ при $x = 2$, $y' = \infty$ при $x = 0$.
   $y' > 0$ при $x \in (-\infty, 0)$ – функція зростає,
   $y' < 0$ при $x \in (0, 2)$ – функція спадає,

Екстремуми

5. Знаходимо точки екстремуму функції.
$y' = 1 - \dfrac{8}{x^3}$; $y' = 0$ при $x = 2$, $y' = \infty$ при $x = 0$.
$y' > 0$ при $x \in (-\infty, 0)$ – функція зростає,
$y' < 0$ при $x \in (0, 2)$ – функція спадає,
$y' > 0$ при $x \in (2, \infty)$ – функція зростає.

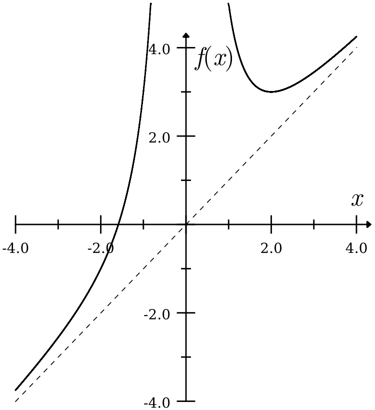
Екстремуми

5. Знаходимо точки екстремуму функції.
   $y' = 1 - \dfrac{8}{x^3}$; $y' = 0$ при $x = 2$, $y' = \infty$ при $x = 0$.
   $y' > 0$ при $x \in (-\infty, 0)$ – функція зростає,
   $y' < 0$ при $x \in (0, 2)$ – функція спадає,
   $y' > 0$ при $x \in (2, \infty)$ – функція зростає.
   Таким чином, точка $(2, 3)$ є точкою мінімуму.

Опуклість, увігнутість і точки перегину

6. $y'' = \frac{24}{x^4} > 0$ при будь-якому $x \neq 0$, отже, функція увігнута на всій області визначення.

Графік функції



Приклад

Дослідити функцію $y = x(x-1)^3$ і побудувати її графік.

За пунктами

1. Областю визначення даної функції є проміжок $x \in (-\infty, \infty)$.

За пунктами

1. Областю визначення даної функції є проміжок $x \in (-\infty, \infty)$.
2. У сенсі парності і непарності функція є функцією загального вигляду.

За пунктами

1. Областю визначення даної функції є проміжок $x \in (-\infty, \infty)$.
2. У сенсі парності і непарності функція є функцією загального вигляду.
3. Точки перетину з осями координат: з віссю Oy: $x = 0$, $y = 0$;
   з віссю Ox: $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

Асимптоти кривої

4. Вертикальних асимптот немає. Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.

Асимптоти кривої

4. Вертикальних асимптот немає. Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.
$k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x(x-1)^3}{x} = \infty$ – похилих асимптот не існує.

Точки екстремуму

5. Знаходимо точки екстремуму.

$$y' = \left[x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right]' = \left[x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x\right]' = 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$$

Точки екстремуму

5. Знаходимо точки екстремуму.

$$y' = \left[x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right]' = \left[x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x\right]' = 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$$

Рівняння для критичних точок:

$$4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$$

Точки екстремуму

5. Знаходимо точки екстремуму.

$$y' = \left[x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right]' = \left[x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x\right]' = 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$$

Рівняння для критичних точок:

$$4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$$

Один із коренів – $x = 1$. Тоді:

$$\begin{array}{rrrrl}
\big(& 4x^3 - 9x^2 & + 6x & - 1\big) & \div (x-1) = 4x^2 - 5x + 1 \\
 & -4x^3 + 4x^2 & & & \\ \cline{2-2}
 & -5x^2 & + 6x & & \\
 & 5x^2 & - 5x & & \\ \cline{2-3}
 & & x & - 1 & \\
 & & -x & + 1 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Точки екстремуму

5. Знаходимо точки екстремуму.

$$y' = \left[x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right]' = \left[x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x\right]' = 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$$

Рівняння для критичних точок:

$$4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$$

Один із коренів – $x = 1$. Тоді:

$$\begin{array}{l}
\left(\quad 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 \right) \div \left(x - 1\right) = 4x^2 - 5x + 1(x-1)(4x^2 - 5x + 1) = 0. \\
\underline{-4x^3 + 4x^2} \\
\qquad\quad -5x^2 + 6x \\
\qquad\quad \underline{\;\; 5x^2 - 5x} \\
\qquad\qquad\qquad\quad x - 1 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-x + 1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; 0
\end{array}$$

Тому $x = 1$ і $x = 1/4$.

Точки перегину

6. Знайдемо другу похідну функції: $12x^2 - 18x + 6$. Прирівнюючи до нуля, знаходимо:
   $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$.

Таблиця

	$(-\infty\ ;\ \frac{1}{4})$	$\frac{1}{4}$	$(\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}\ ;\ 1)$	1	$(1\ ;\ \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	спадає, увігнута	min	зростає, увігнута	перегин	зростає, опукла	перегин	зростає, увігнута

Графік функції