Розривні функції. Властивості неперервних функцій

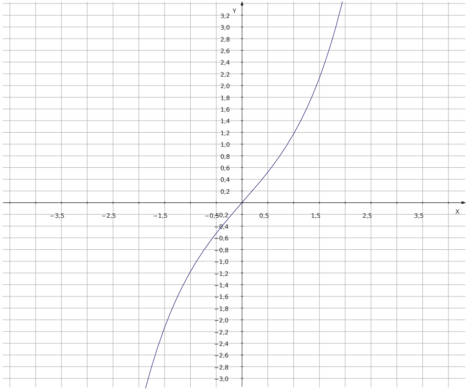
Гіперболічні функції

Гіперболічний синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Гіперболічний синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



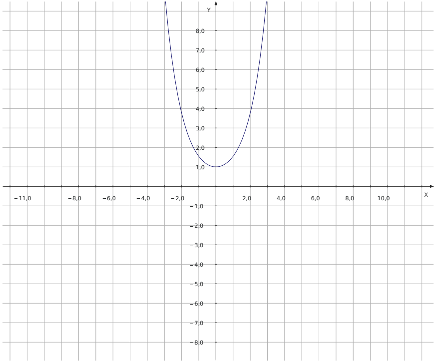
Гіперболічний косинус

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Гіперболічний косинус

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

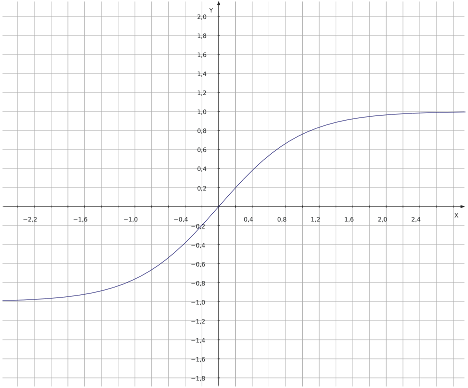


Гіперболічний тангенс

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

Гіперболічний тангенс

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$



Гіперболічний ареасинус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y; e^x = t > 0$$

Гіперболічний ареасинус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y; e^x = t > 0 \Rightarrow t - \frac{1}{t} = 2y$$

Гіперболічний ареасинус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y; e^x = t > 0 \Rightarrow t - \frac{1}{t} = 2y \Rightarrow t^2 - 2yt - 1 = 0$$

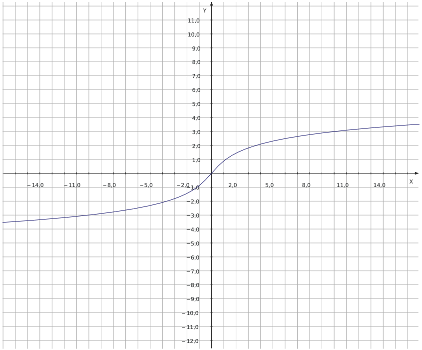
Гіперболічний ареасинус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y; e^x = t > 0 \Rightarrow t - \frac{1}{t} = 2y \Rightarrow t^2 - 2yt - 1 = 0 \Rightarrow t = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

Гіперболічний ареасинус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y; e^x = t > 0 \Rightarrow t - \frac{1}{t} = 2y \Rightarrow t^2 - 2yt - 1 = 0 \Rightarrow t = y + \sqrt{y^2+1}$$

$$x = \operatorname{arsh} y = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$$

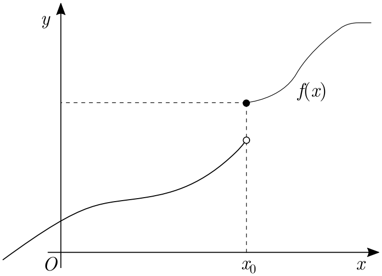


Точки розриву і їхня класифікація

Якщо однобічна границя $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)$, то функція називається неперервною праворуч.

Точки розриву і їхня класифікація

Якщо однобічна границя $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)$, то функція називається неперервною праворуч.

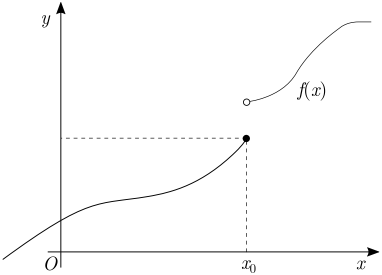


Точки розриву і їхня класифікація

Якщо однобічна границя $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$, то функція називається неперервною ліворуч.

Точки розриву і їхня класифікація

Якщо однобічна границя $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$, то функція називається неперервною ліворуч.



Точки розриву

Означення. Точка x_0 називається **точкою розриву** функції $f(x)$, якщо $f(x)$ не визначена у точці x_0 або не є неперервною у цій точці.

Точки розриву першого роду

Означення. Точка x_0 називається **точкою розриву 1-го роду**, якщо у цій точці функція $f(x)$ має скінченні, але не рівні між собою ліву і праву границі.

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

Усувна точка розриву

З визначення можна зробити висновок, що у точці розриву 1-го роду функція може мати тільки скінченний стрибок.

Точка розриву другого роду

Означення. Точка x_0 називається **точкою розриву 2-го роду**, якщо у цій точці функція $f(x)$ не має хоча б одної з однобічних границь або хоча б одна з них нескінченна.

Приклад

Функція Діріхле[1]

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ – раціональне} \\ 0, & x \text{ – не є раціональним} \end{cases}$$

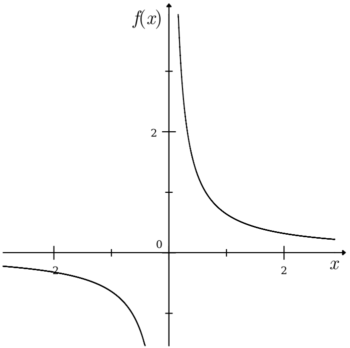
не є неперервною у будь-якій точці x_0.

[1] Петер Густав Діріхле (Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet) (1805–1859) – німецький математик.

Приклад

Функція $f(x) = \dfrac{1}{x}$ має у точці $x_0 = 0$ точку розриву 2-го роду, оскільки

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to 0-0} f(x) = -\infty.$$



Приклад

$$f\left(x\right) = \frac{\sin x}{x}$$

Приклад

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Функція не визначена у точці $x = 0$, але має в ній скінченну границю $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, тобто у точці $x = 0$ функція має точку розриву 1-го роду.

Приклад

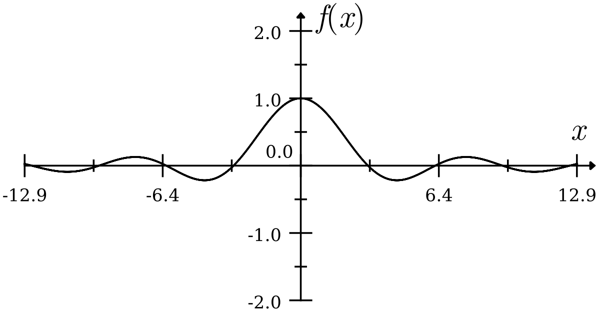
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Функція не визначена у точці $x = 0$, але має в ній скінченну границю $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, тобто у точці $x = 0$ функція має точку розриву 1-го роду.
Це усувна точка розриву, оскільки якщо довизначити функцію:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{при} \quad x \neq 0 \\ 1, \quad \text{при} & x = 0 \end{cases}$$

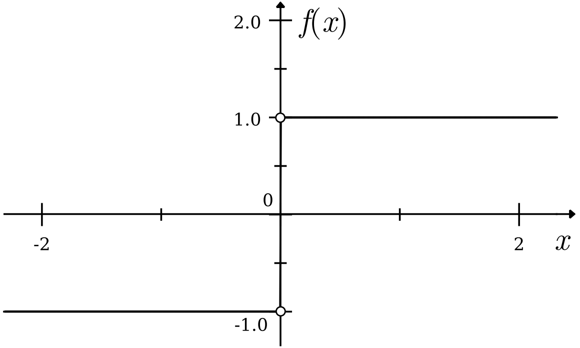
Приклад

Графік цієї функції:



Приклад

$$f\left(x\right)=\frac{x}{|x|}=\begin{cases} 1, & \text{при} \quad x>0 \\ -1, & \text{при} \quad x<0 \end{cases}$$



Приклад

Ця функція також позначається $\mathrm{sign}(x)$ – знак x.

Приклад

Ця функція також позначається $\operatorname{sign}(x)$ – знак x.

У точці $x = 0$ функція не визначена.

Приклад

Ця функція також позначається $\text{sign}(x)$ – знак x.

У точці $x = 0$ функція не визначена.

Оскільки ліва і права границі функції різні, то точка розриву – 1-го роду.

Приклад

Ця функція також позначається $\mathrm{sign}(x)$ – знак x.

У точці $x = 0$ функція не визначена.

Оскільки ліва і права границі функції різні, то точка розриву – 1-го роду.

Якщо довизначити функцію у точці $x = 0$, поклавши $f(0) = 1$, то функція буде неперервна праворуч, якщо покласти $f(0) = -1$, то функція буде неперервною ліворуч, якщо покласти $f(x)$ рівне якому-небудь числу, відмінному від 1 або -1, то функція не буде неперервна ні ліворуч, ні праворуч, але у всіх випадках проте буде мати у точці $x = 0$ розрив 1-го роду.

Приклад

Ця функція також позначається $\operatorname{sign}(x)$ – знак x.

У точці $x = 0$ функція не визначена.

Оскільки ліва і права границі функції різні, то точка розриву – 1-го роду.

Якщо довизначити функцію у точці $x = 0$, поклавши $f(0) = 1$, то функція буде неперервна праворуч, якщо покласти $f(0) = -1$, то функція буде неперервною ліворуч, якщо покласти $f(x)$ рівне якому-небудь числу, відмінному від 1 або -1, то функція не буде неперервна ні ліворуч, ні праворуч, але у всіх випадках проте буде мати у точці $x = 0$ розрив 1-го роду.

У цьому прикладі точка розриву 1-го роду не є усувною.

Приклад

Ця функція також позначається $\mathrm{sign}(x)$ – знак x.

У точці $x = 0$ функція не визначена.

Оскільки ліва і права границі функції різні, то точка розриву – 1-го роду.

Якщо довизначити функцію у точці $x = 0$, поклавши $f(0) = 1$, то функція буде неперервна праворуч, якщо покласти $f(0) = -1$, то функція буде неперервною ліворуч, якщо покласти $f(x)$ рівне якому-небудь числу, відмінному від 1 або -1, то функція не буде неперервна ні ліворуч, ні праворуч, але у всіх випадках проте буде мати у точці $x = 0$ розрив 1-го роду.

У цьому прикладі точка розриву 1-го роду не є усувною.

Таким чином, для того, щоб точка розриву 1-го роду була усувною, необхідно, щоб однобічні границі праворуч і ліворуч були скінченні і рівні, а функція була б у цій точці не визначена.

Неперервність функції на інтервалі і на відрізку

Означення. Функція $f(x)$ називається **неперервною на інтервалі (відрізку)**, якщо вона неперервна в будь-якій точці інтервалу (відрізка).

Неперервність функції на інтервалі і на відрізку

<u>**Означення.**</u> Функція $f(x)$ називається **неперервною на інтервалі (відрізку)**, якщо вона неперервна в будь-якій точці інтервалу (відрізка).

При цьому не потрібна неперервність функції на кінцях відрізка або інтервалу, необхідна тільки однобічна неперервність на кінцях відрізка або інтервалу.

Властивості функцій, неперервних на відрізку. Перша теорема Веєрштраса

Властивість 1: (Перша теорема Веєрштраса[2]). Функція, неперервна на відрізку, обмежена на цьому відрізку, тобто на відрізку $[a, b]$ виконується умова $-M \leqslant f(x) \leqslant M$.

[2] Карл Веєрштрас (Karl Theodor Wilhelm Weierstraß) (1815–1897) – німецький математик

Властивості функцій, неперервних на відрізку. Перша теорема Веєрштраса

<u>Властивість 1:</u> (Перша теорема Веєрштраса[2]). Функція, неперервна на відрізку, обмежена на цьому відрізку, тобто на відрізку $[a,\ b]$ виконується умова $-M \leqslant f\left(x\right) \leqslant M$.

Доведення цієї властивості засноване на тому, що функція, неперервна у точці x_0, обмежена у деякому її околі, а якщо розбивати відрізок $[a, b]$ на скінченну кількість відрізків, які «стягаються» до точок x_0, то, вибравши найбільше серед значень M, отримаємо найбільше значення, яке обмежить функцію на усьому відрізку.

[2] Карл Веєрштрас (Karl Theodor Wilhelm Weierstraß) (1815–1897) – німецький математик

Властивості функцій, неперервних на відрізку. Друга теорема Веєрштраса

Властивість 2: (Друга теорема Веєрштраса) Функція, неперервна на відрізку $[a, b]$, приймає на ньому найбільше і найменше значення.

Властивості функцій, неперервних на відрізку. Друга теорема Веєрштраса

Властивість 2: (Друга теорема Веєрштраса) Функція, неперервна на відрізку $[a, b]$, приймає на ньому найбільше і найменше значення.
Тобто існують такі значення x_1 і x_2, що $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, причому $m \leqslant f\ (x) \leqslant M$.

Властивості функцій, неперервних на відрізку. Друга теорема Веєрштраса

Властивість 2: (Друга теорема Веєрштраса) Функція, неперервна на відрізку $[a, b]$, приймає на ньому найбільше і найменше значення.
Тобто існують такі значення x_1 і x_2, що $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, причому $m \leqslant f(x) \leqslant M$.
Відзначимо, що ці найбільші і найменші значення функція може приймати на відрізку і кілька разів (наприклад – $f(x) = \sin x$).

Властивості функцій, неперервних на відрізку. Друга теорема Веєрштраса

<u>**Властивість 2:**</u> (Друга теорема Веєрштраса) Функція, неперервна на відрізку $[a, b]$, приймає на ньому найбільше і найменше значення.
Тобто існують такі значення x_1 і x_2, що $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, причому $m \leqslant f(x) \leqslant M$.
Відзначимо, що ці найбільші і найменші значення функція може приймати на відрізку і кілька разів (наприклад – $f(x) = \sin x$).
Різниця між найбільшим і найменшим значенням функції на відрізку називається **коливанням** функції на відрізку.

Властивості функцій, неперервних на відрізку. Перша теорема Коші

Властивість 3: (Перша теорема Коші). Якщо функція $f(x)$ – неперервна на відрізку $[a, b]$ і має на кінцях відрізка значення протилежних знаків, то існує така точка усередині цього відрізка, де $f(x) = 0$. Тобто, якщо $\operatorname{sign}(f(a)) \neq \operatorname{sign}(f(b))$, то $\exists x_0$: $f(x_0) = 0$.

Властивість 4: (Друга теорема Коші). Функція, неперервна на відрізку $[a, b]$, приймає на цьому відрізку всі значення між найменшим і найбільшим значеннями.

Властивості функцій, неперервних на відрізку

<u>**Властивість 5:**</u> Якщо функція $f(x)$ неперервна у точці $x = x_0$, то існує деякий окіл точки x_0, у якій функція зберігає знак.

Рівномірна неперервність

Означення. Функція $f(x)$ називається **рівномірно неперервною** на відрізку $[a, b]$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для будь-яких точок $x_1 \in [a, b]$ і $x_2 \in [a, b]$ таких, що $|x_2 - x_1| < \delta$, виконується нерівність $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$.

Рівномірна неперервність

<u>Означення.</u> Функція $f(x)$ називається **рівномірно неперервною** на відрізку $[a, b]$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для будь-яких точок $x_1 \in [a, b]$ і $x_2 \in [a, b]$ таких, що $|x_2 - x_1| < \delta$, виконується нерівність $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$.
Відмінність рівномірної неперервності від «звичайної» у тому, що для кожного ε існує своє δ, що не залежить від x, а при «звичайній» неперервності Δ залежить від ε і x.

Властивість 6: Теорема Кантора[3]. Функція, неперервна на відрізку, рівномірно неперервна на ньому.

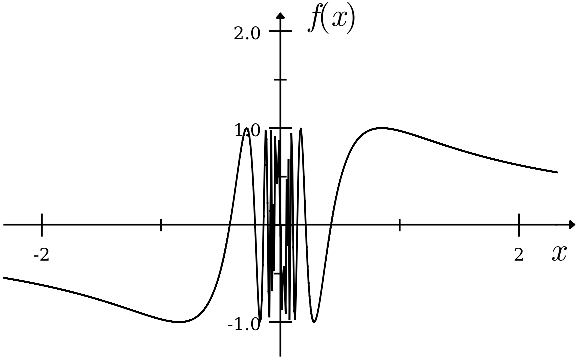
[3] Георг Кантор (Georg Cantor) (1845–1918) – німецький математик.

<u>Властивість 6:</u> Теорема Кантора[3]. Функція, неперервна на відрізку, рівномірно неперервна на ньому.
(Ця властивість справедлива тільки для відрізків, а не для інтервалів і напівінтервалів.)

[3] Георг Кантор (Georg Cantor) (1845–1918) – німецький математик.

Приклад

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}$$



Приклад

Функція $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ неперервна на інтервалі $(0, a)$, але не є на ньому рівномірно неперервною, оскільки існує таке число $\delta > 0$ таке, що існують значення x_1 і x_2 такі, що $|f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon$, ε – будь-яке число за умови, що x_1 і x_2 близькі до нуля.

<u>Властивість 7:</u> Якщо функція $f(x)$ визначена, монотонна і неперервна на деякому проміжку, то і обернена їй функція $x = g(y)$ теж однозначна, монотонна і неперервна.

Приклад

Дослідити на неперервність функцію і визначити тип точок розриву, якщо вони є.

$$f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1 \\ x^2+2, & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

Розв'язання

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = 3$$

Розв'язання

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = 3$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = 3 \quad \lim_{x\to 1-0} f(x) = 3$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = 3$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = 3 \quad \lim_{x\to 1-0} f(x) = 3$$
$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = 3 \quad \lim_{x\to 1+0} f(x) = 2$$

у точці $x = -1$ функція неперервна; у точці $x = 1$ точка розриву 1-го роду