Рівняння прямої у просторі

Рівняння лінії у просторі

Нехай $F(x, y, z) = 0$ і $\Phi(x, y, z) = 0$ – рівняння поверхонь, що перетинаються уздовж лінії L.

Рівняння лінії у просторі

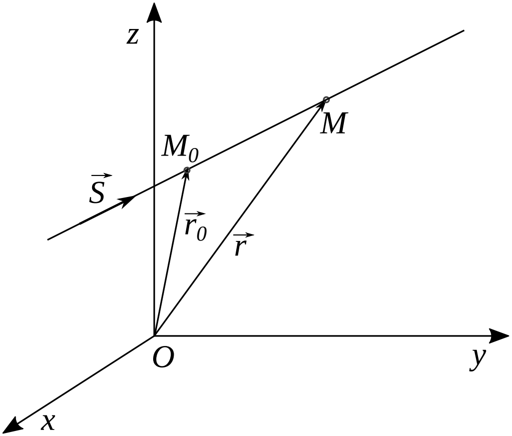
Нехай $F(x, y, z) = 0$ і $\Phi(x, y, z) = 0$ – рівняння поверхонь, що перетинаються уздовж лінії L.

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

є **рівнянням лінії у просторі**.

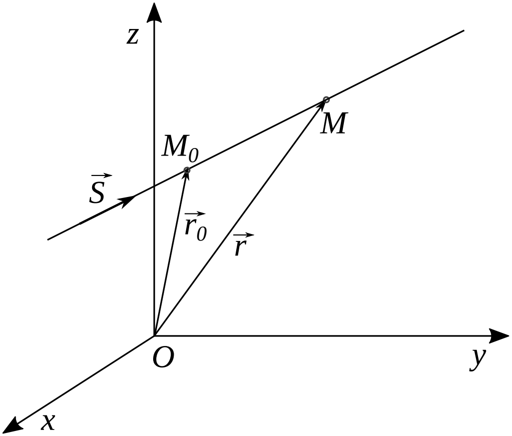
Рівняння прямої у просторі за точкою та напрямним вектором

Розгляньмо довільну пряму і вектор $\vec{S} = (m, n, p)$, паралельний даній прямій.



Рівняння прямої у просторі за точкою та напрямним вектором

Розгляньмо довільну пряму і вектор $\vec{S} = (m, n, p)$, паралельний даній прямій.



Вектор $\vec{S}$ називається **напрямним вектором** прямої.

Рівняння прямої у просторі за точкою та напрямним вектором

На прямій візьмемо дві довільні точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M(x, y, z)$.

Рівняння прямої у просторі за точкою та напрямним вектором

На прямій візьмемо дві довільні точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M(x, y, z)$.
Позначимо радіус-вектори цих точок як $\overrightarrow{r_0}$ і $\vec{r}$, тоді $\vec{r} - \overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{M_0M}$.

Рівняння прямої у просторі за точкою та напрямним вектором

На прямій візьмемо дві довільні точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M(x, y, z)$.
Позначимо радіус-вектори цих точок як $\overrightarrow{r_0}$ і $\vec{r}$, тоді $\vec{r} - \overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{M_0M}$.
Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{S}$ колінеарні, має виконуватися співвідношення $\overrightarrow{M_0M} = \vec{S}t$, де t – деякий параметр.

Рівняння прямої у просторі за точкою та напрямним вектором

На прямій візьмемо дві довільні точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M(x, y, z)$.
Позначимо радіус-вектори цих точок як $\overrightarrow{r_0}$ і $\vec{r}$, тоді $\vec{r} - \overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{M_0 M}$.
Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0 M}$ і $\vec{S}$ колінеарні, має виконуватися співвідношення $\overrightarrow{M_0 M} = \vec{S}t$, де t – деякий параметр.
Разом, можна записати: $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{S}t$.

Рівняння прямої у просторі за точкою та напрямним вектором

На прямій візьмемо дві довільні точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M(x, y, z)$.
Позначимо радіус-вектори цих точок як $\overrightarrow{r_0}$ і $\vec{r}$, тоді $\vec{r} - \overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{M_0M}$.
Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{S}$ колінеарні, має виконуватися співвідношення $\overrightarrow{M_0M} = \vec{S}t$, де t – деякий параметр.
Разом, можна записати: $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{S}t$.
Оскільки цьому рівнянню задовольняють координати будь-якої точки прямої, то отримане рівняння – **параметричне рівняння прямої**.

Рівняння прямої у просторі за точкою та напрямним вектором

На прямій візьмемо дві довільні точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M(x, y, z)$.
Позначимо радіус-вектори цих точок як $\vec{r_0}$ і $\vec{r}$, тоді $\vec{r} - \vec{r_0} = \overrightarrow{M_0M}$.
Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{S}$ колінеарні, має виконуватися співвідношення $\overrightarrow{M_0M} = \vec{S}t$, де t – деякий параметр.
Разом, можна записати: $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{S}t$.
Оскільки цьому рівнянню задовольняють координати будь-якої точки прямої, то отримане рівняння – **параметричне рівняння прямої**.
Це векторне рівняння може бути представлене в координатній формі:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

Канонічні рівняння прямої

Перетворивши цю систему і дорівнявши значення параметра t одне до одного, одержуємо **канонічні рівняння прямої** у просторі:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Напрямні косинуси прямої

Означення. **Напрямними косинусами** прямої називаються напрямні косинуси вектора $\vec{S}$, які можуть бути обчислені за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}; \cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}; \cos\gamma = \frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Напрямні косинуси прямої

Звідси одержимо: $m : n : p = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$.

Напрямні косинуси прямої

Звідси одержимо: $m : n : p = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$.
Числа m, n, p називаються **кутовими коефіцієнтами** прямої.

Напрямні косинуси прямої

Звідси одержимо: $m : n : p = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$.
Числа m, n, p називаються **кутовими коефіцієнтами** прямої.

Оскільки $\vec{S}$ – ненульовий вектор, то m, n і p не можуть дорівнювати нулю одночасно, але одне або два із цих чисел можуть дорівнювати нулю. У цьому випадку в рівнянні прямої варто прирівняти до нуля відповідні чисельники.

Рівняння прямої у просторі, що проходить через дві точки

Якщо на прямій у просторі позначити дві довільні точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координати цих точок повинні задовольняти отриманому вище рівнянню прямої:

$$\frac{x_2 - x_1}{m} = \frac{y_2 - y_1}{n} = \frac{z_2 - z_1}{p}.$$

Рівняння прямої у просторі, що проходить через дві точки

Якщо на прямій у просторі позначити дві довільні точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координати цих точок повинні задовольняти отриманому вище рівнянню прямої:

$$\frac{x_2 - x_1}{m} = \frac{y_2 - y_1}{n} = \frac{z_2 - z_1}{p}.$$

Крім того, для точки M_1 можна записати:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

Рівняння прямої у просторі, що проходить через дві точки

Якщо на прямій у просторі позначити дві довільні точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координати цих точок повинні задовольняти отриманому вище рівнянню прямої:

$$\frac{x_2 - x_1}{m} = \frac{y_2 - y_1}{n} = \frac{z_2 - z_1}{p}.$$

Крім того, для точки M_1 можна записати:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

Розв'язуючи спільно ці рівняння, одержимо:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Рівняння прямої у просторі, що проходить через дві точки

Якщо на прямій у просторі позначити дві довільні точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координати цих точок повинні задовольняти отриманому вище рівнянню прямої:

$$\frac{x_2 - x_1}{m} = \frac{y_2 - y_1}{n} = \frac{z_2 - z_1}{p}.$$

Крім того, для точки M_1 можна записати:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

Розв'язуючи спільно ці рівняння, одержимо:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Це рівняння прямої, що проходить через дві точки у просторі.

Загальні рівняння прямої у просторі

Рівняння прямої може бути розглянуте як рівняння лінії перетину двох площин.

Загальні рівняння прямої у просторі

Рівняння прямої може бути розглянуте як рівняння лінії перетину двох площин.

Площина у векторній формі може бути задана рівнянням $\vec{N} \cdot \vec{r} + D = 0$, де $\vec{N}$ – нормаль площини; $\vec{r}$ – радіус-вектор довільної точки площини.

Загальні рівняння прямої у просторі

Рівняння прямої може бути розглянуте як рівняння лінії перетину двох площин.

Площина у векторній формі може бути задана рівнянням $\vec{N}\cdot\vec{r}+D=0$, де $\vec{N}$ – нормаль площини; $\vec{r}$ – радіус-вектор довільної точки площини.

Нехай у просторі задані дві площини: $\overrightarrow{N_1}\cdot\vec{r}+D_1=0$ і $\overrightarrow{N_2}\cdot\vec{r}+D_2=0$, вектори нормалі мають координати: $\overrightarrow{N_1}(A_1,B_1,C_1)$, $\overrightarrow{N_2}(A_2,B_2,C_2)$; $\vec{r}=(x,y,z)$.

Загальні рівняння прямої у просторі

Рівняння прямої може бути розглянуте як рівняння лінії перетину двох площин.
Площина у векторній формі може бути задана рівнянням $\vec{N} \cdot \vec{r} + D = 0$, де $\vec{N}$ – нормаль площини; $\vec{r}$ – радіус-вектор довільної точки площини.
Нехай у просторі задані дві площини: $\overrightarrow{N_1} \cdot \vec{r} + D_1 = 0$ і $\overrightarrow{N_2} \cdot \vec{r} + D_2 = 0$, вектори нормалі мають координати: $\overrightarrow{N_1}(A_1, B_1, C_1)$, $\overrightarrow{N_2}(A_2, B_2, C_2)$; $\vec{r} = (x, y, z)$.
Тоді загальні рівняння прямої у векторній формі:

$$\begin{cases} \overrightarrow{N_1} \cdot \vec{r} + D_1 = 0 \\ \overrightarrow{N_2} \cdot \vec{r} + D_2 = 0 \end{cases}$$

Загальні рівняння прямої в координатній формі:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Перетворення рівнянь прямої у загальному виді до канонічного виду

Для перетворення треба знайти довільну точку прямої і числа m, n, p.

Перетворення рівнянь прямої у загальному виді до канонічного виду

Для перетворення треба знайти довільну точку прямої і числа m, n, p. Напрямний вектор прямої може бути знайдений як векторний добуток векторів нормалі до заданих площин:

$$\vec{S} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} =$$

$$= m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}.$$

Перетворення рівнянь прямої у загальному виді до канонічного виду

Для перетворення треба знайти довільну точку прямої і числа m, n, p. Напрямний вектор прямої може бути знайдений як векторний добуток векторів нормалі до заданих площин:

$$\vec{S} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} =$$

$$= m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}.$$

Довільну точку можна знайти з рівнянь прямої надаючи одній з координат точки визначеного довільного значення.

Приклад

Знайти канонічне рівняння, якщо пряма задана у вигляді:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання

Для знаходження довільної точки прямої, приймемо її координату $x = 0$, а потім підставимо це значення в задану систему рівнянь.

Розв'язання

Для знаходження довільної точки прямої, приймемо її координату $x = 0$, а потім підставимо це значення в задану систему рівнянь.

$$\begin{cases} y = 3z - 1 \\ 4y - z - 7 = 0 \end{cases},$$

Розв'язання

Для знаходження довільної точки прямої, приймемо її координату $x = 0$, а потім підставимо це значення в задану систему рівнянь.

$$\begin{cases} y = 3z - 1 \\ 4y - z - 7 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 3z - 1 \\ 12z - 4 - z - 7 = 0 \end{cases},$$

Розв'язання

Для знаходження довільної точки прямої, приймемо її координату $x = 0$, а потім підставимо це значення в задану систему рівнянь.

$$\begin{cases} y = 3z - 1 \\ 4y - z - 7 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 3z - 1 \\ 12z - 4 - z - 7 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 3z - 1 \\ z = 1 \end{cases},$$

Розв'язання

Для знаходження довільної точки прямої, приймемо її координату $x = 0$, а потім підставимо це значення в задану систему рівнянь.

$$\begin{cases} y = 3z - 1 \\ 4y - z - 7 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 3z - 1 \\ 12z - 4 - z - 7 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 3z - 1 \\ z = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases},$$

тобто $A(0, 2, 1)$.

Розв'язання

Знаходимо компоненти напрямного вектора прямої.

$$m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -11;$$

Розв'язання

Знаходимо компоненти напрямного вектора прямої.

$$m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -11;$$

$$n = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 17;$$

Розв'язання

Знаходимо компоненти напрямного вектора прямої.

$$m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -11;$$

$$n = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 17; \quad p = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 13.$$

Розв'язання

Знаходимо компоненти напрямного вектора прямої.

$$m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -11;$$

$$n = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 17; \quad p = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 13.$$

Тоді канонічні рівняння прямої:

$$-\frac{x}{11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}.$$

Приклад

Привести до канонічного виду рівняння прямої, задане у вигляді:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases}$$

Розв'язання

Для знаходження довільної точки прямої, що є лінією перетину зазначених вище площин, приймемо $z = 0$.

Розв'язання

Для знаходження довільної точки прямої, що є лінією перетину зазначених вище площин, приймемо $z = 0$.
Тоді:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases} ; \quad y = -3x;$$

Розв'язання

Для знаходження довільної точки прямої, що є лінією перетину зазначених вище площин, приймемо $z = 0$.
Тоді:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases} ; \quad y = -3x;$$

$$2x - 9x - 7 = 0; x = -1; y = 3.$$

Розв'язання

Для знаходження довільної точки прямої, що є лінією перетину зазначених вище площин, приймемо $z = 0$.
Тоді:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases} ; \quad y = -3x;$$

$$2x - 9x - 7 = 0; x = -1; y = 3.$$

Одержуємо: $A(-1; 3; 0)$.

Розв'язання

Для знаходження довільної точки прямої, що є лінією перетину зазначених вище площин, приймемо $z = 0$.
Тоді:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases} ; \quad y = -3x;$$

$$2x - 9x - 7 = 0; x = -1; y = 3.$$

Одержуємо: $A(-1; 3; 0)$.

Напрямний вектор прямої: $\vec{S} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -16 \\ 3 & 1 & -17 \end{vmatrix} = -35\vec{i} - 14\vec{j} - 7\vec{k}.$

Розв'язання

Для знаходження довільної точки прямої, що є лінією перетину зазначених вище площин, приймемо $z = 0$.
Тоді:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases} ; \quad y = -3x;$$

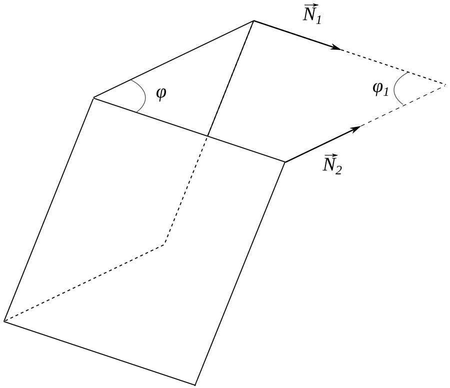
$$2x - 9x - 7 = 0; x = -1; y = 3.$$

Одержуємо: $A(-1; 3; 0)$.

Напрямний вектор прямої: $\vec{S} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -16 \\ 3 & 1 & -17 \end{vmatrix} = -35\vec{i} - 14\vec{j} - 7\vec{k}$.

Отже: $\dfrac{x+1}{-35} = \dfrac{y-3}{-14} = \dfrac{z}{-7}$; $\dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z}{1}$.

Кут між площинами



Кут між двома площинами у просторі φ пов'язаний з кутом між нормалями до цих площин φ_1 співвідношенням: $\varphi = \varphi_1$ або $\varphi = 180^\circ - \varphi_1$, тобто $\cos\varphi = \pm\cos\varphi_1$.

Кут між площинами

Визначимо кут φ_1. Відомо, що площини можуть бути задані співвідношеннями: $\begin{cases} \overrightarrow{N_1} \cdot \vec{r} + D_1 = 0 \\ \overrightarrow{N_2} \cdot \vec{r} + D_2 = 0 \end{cases}$, де $\overrightarrow{N_1} = (A_1, B_1, C_1)$, $\overrightarrow{N_2} = (A_2, B_2, C_2)$.

Кут між площинами

Визначимо кут φ_1. Відомо, що площини можуть бути задані співвідношеннями: $\begin{cases} \overrightarrow{N_1} \cdot \vec{r} + D_1 = 0 \\ \overrightarrow{N_2} \cdot \vec{r} + D_2 = 0 \end{cases}$, де $\overrightarrow{N_1} = (A_1, B_1, C_1)$, $\overrightarrow{N_2} = (A_2, B_2, C_2)$.

Кут між векторами нормалі знайдемо з їхнього скалярного добутку:

$$\cos \varphi_1 = \frac{\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right| \left|\overrightarrow{N_2}\right|}.$$

Кут між площинами

Визначимо кут φ_1. Відомо, що площини можуть бути задані співвідношеннями: $\begin{cases} \overrightarrow{N_1} \cdot \vec{r} + D_1 = 0 \\ \overrightarrow{N_2} \cdot \vec{r} + D_2 = 0 \end{cases}$, де $\overrightarrow{N_1} = (A_1, B_1, C_1)$, $\overrightarrow{N_2} = (A_2, B_2, C_2)$.
Кут між векторами нормалі знайдемо з їхнього скалярного добутку:

$$\cos\varphi_1 = \frac{\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right| \left|\overrightarrow{N_2}\right|}.$$

Таким чином, кут між площинами знаходиться за формулою:

$$\cos\varphi = \pm \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Кут між площинами

Визначимо кут φ_1. Відомо, що площини можуть бути задані співвідношеннями: $\begin{cases} \overrightarrow{N_1} \cdot \vec{r} + D_1 = 0 \\ \overrightarrow{N_2} \cdot \vec{r} + D_2 = 0 \end{cases}$, де $\overrightarrow{N_1} = (A_1, B_1, C_1)$, $\overrightarrow{N_2} = (A_2, B_2, C_2)$.
Кут між векторами нормалі знайдемо з їхнього скалярного добутку:

$$\cos\varphi_1 = \frac{\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right| \left|\overrightarrow{N_2}\right|}.$$

Таким чином, кут між площинами знаходиться за формулою:

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Вибір знака косинуса залежить від того, який кут між площинами слід знайти – гострий, або суміжний з ним тупий.

Умови паралельності і перпендикулярності площин

На основі отриманої вище формули для знаходження кута між площинами можна знайти умови паралельності і перпендикулярності площин.

Умови паралельності і перпендикулярності площин

На основі отриманої вище формули для знаходження кута між площинами можна знайти умови паралельності і перпендикулярності площин.
Для того, щоб площини були перпендикулярні, необхідно і достатньо, щоб косинус кута між площинами дорівнював нулю. Ця умова виконується, якщо:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Умови паралельності і перпендикулярності площин

На основі отриманої вище формули для знаходження кута між площинами можна знайти умови паралельності і перпендикулярності площин.
Для того, щоб площини були перпендикулярні, необхідно і достатньо, щоб косинус кута між площинами дорівнював нулю. Ця умова виконується, якщо:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Площини паралельні, вектори нормалей колінеарні: $\overrightarrow{N_1}||\overrightarrow{N_2}$. Ця умова виконується, якщо: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Кут між прямими у просторі

Нехай у просторі задані дві прямі. Їхні параметричні рівняння:

$$l_1 : \vec{r} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{S_1}t$$

$$l_2 : \vec{r} = \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{S_2}t$$

Кут між прямими у просторі

Нехай у просторі задані дві прямі. Їхні параметричні рівняння:

$$l_1 : \vec{r} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{S_1}t$$

$$l_2 : \vec{r} = \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{S_2}t$$

$$\vec{r} = (x, y, z); \quad \overrightarrow{r_1} = (x_1, y_1, z_1); \quad \overrightarrow{r_2} = (x_2, y_2, z_2);$$
$$\overrightarrow{S_1} = (m_1, n_1, p_1); \overrightarrow{S_2} = (m_2, n_2, p_2).$$

Кут між прямими у просторі

Нехай у просторі задані дві прямі. Їхні параметричні рівняння:

$$l_1 : \vec{r} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{S_1}t$$

$$l_2 : \vec{r} = \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{S_2}t$$

$$\vec{r} = (x, y, z); \quad \overrightarrow{r_1} = (x_1, y_1, z_1); \quad \overrightarrow{r_2} = (x_2, y_2, z_2);$$
$$\overrightarrow{S_1} = (m_1, n_1, p_1); \overrightarrow{S_2} = (m_2, n_2, p_2).$$

Кут між прямими φ і кут між напрямними векторами φ цих прямих пов'язані співвідношенням: $\varphi = \varphi_1$ або $\varphi = 180° - \varphi_1$.

Кут між прямими у просторі

Нехай у просторі задані дві прямі. Їхні параметричні рівняння:

$$l_1 : \vec{r} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{S_1}t$$

$$l_2 : \vec{r} = \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{S_2}t$$

$$\vec{r} = (x, y, z); \quad \overrightarrow{r_1} = (x_1, y_1, z_1); \quad \overrightarrow{r_2} = (x_2, y_2, z_2);$$
$$\overrightarrow{S_1} = (m_1, n_1, p_1); \overrightarrow{S_2} = (m_2, n_2, p_2).$$

Кут між прямими φ і кут між напрямними векторами φ цих прямих пов'язані співвідношенням: $\varphi = \varphi_1$ або $\varphi = 180^\circ - \varphi_1$.
Кут між напрямними векторами знаходиться зі скалярного добутку у такий спосіб:

$$\cos\varphi = \pm\frac{\overrightarrow{S_1} \cdot \overrightarrow{S_2}}{\left|\overrightarrow{S_1}\right| \left|\overrightarrow{S_2}\right|} = \pm\frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Умови паралельності і перпендикулярності прямих у просторі

Щоб дві прямі були паралельні, необхідно і достатньо, щоб напрямні вектори цих прямих були колінеарні, тобто їхні відповідні координати були пропорційні.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Умови паралельності і перпендикулярності прямих у просторі

Щоб дві прямі були паралельні, необхідно і достатньо, щоб напрямні вектори цих прямих були колінеарні, тобто їхні відповідні координати були пропорційні.

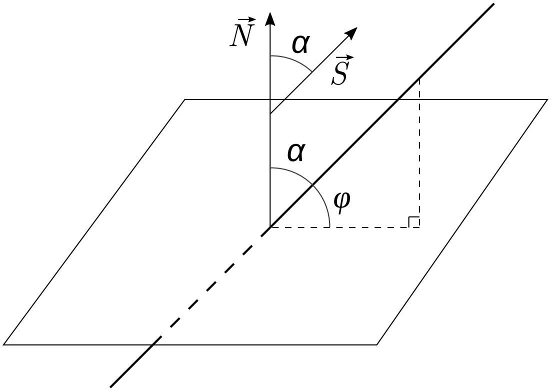
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Щоб дві прямі були перпендикулярні, необхідно і достатньо, щоб напрямні вектори цих прямих були перпендикулярні, тобто косинус кута між ними дорівнював нулю.

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

Кут між прямою і площиною

<u>Означення.</u> Кутом між прямою і площиною називається будь-який кут між прямою та її проєкцією на цю площину.



Кут між прямою і площиною

Нехай площина задана рівнянням $\vec{N} \cdot \vec{r} + D = 0$, а пряма – $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{S}t$. З геометричних міркувань видно, що шуканий кут $\alpha = 90^\circ - \varphi$, де α – кут між векторами $\vec{N}$ і $\vec{S}$. Цей кут може бути знайдений за формулою:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{N} \cdot \vec{S}}{\left|\vec{N}\right| \left|\vec{S}\right|}$$

$$\sin\varphi = \pm\cos\alpha = \pm\frac{\vec{N} \cdot \vec{S}}{\left|\vec{N}\right| \left|\vec{S}\right|}$$

У координатній формі:

$$\sin\varphi = \pm\frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини у просторі

Для того, щоб пряма і площина були паралельні, необхідно і достатньо, щоб вектор нормалі до площини і напрямний вектор прямої були перпендикулярні. Для цього необхідно, щоб їхній скалярний добуток був рівний нулеві.

Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини у просторі

Для того, щоб пряма і площина були паралельні, необхідно і достатньо, щоб вектор нормалі до площини і напрямний вектор прямої були перпендикулярні. Для цього необхідно, щоб їхній скалярний добуток був рівний нулеві.

$$\vec{N} \perp \vec{S}, \quad \vec{N} \cdot \vec{S} = 0, \quad \sin\varphi = 0, \qquad Am + Bn + Cp = 0.$$

Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини у просторі

Для того, щоб пряма і площина були паралельні, необхідно і достатньо, щоб вектор нормалі до площини і напрямний вектор прямої були перпендикулярні. Для цього необхідно, щоб їхній скалярний добуток був рівний нулеві.

$$\vec{N} \perp \vec{S}, \quad \vec{N} \cdot \vec{S} = 0, \quad \sin\varphi = 0, \qquad Am + Bn + Cp = 0.$$

Для того, щоб пряма і площина були перпендикулярні, необхідно і достатньо, щоб вектор нормалі до площини і напрямний вектор прямої були колінеарні. Ця умова виконується, якщо векторний добуток цих векторів дорівнює нулю.

Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини у просторі

Для того, щоб пряма і площина були паралельні, необхідно і достатньо, щоб вектор нормалі до площини і напрямний вектор прямої були перпендикулярні. Для цього необхідно, щоб їхній скалярний добуток був рівний нулеві.

$$\vec{N} \perp \vec{S}, \quad \vec{N} \cdot \vec{S} = 0, \quad \sin\varphi = 0, \qquad Am + Bn + Cp = 0.$$

Для того, щоб пряма і площина були перпендикулярні, необхідно і достатньо, щоб вектор нормалі до площини і напрямний вектор прямої були колінеарні. Ця умова виконується, якщо векторний добуток цих векторів дорівнює нулю.

$$\vec{N} \times \vec{S} = 0; \qquad \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$