Приклад

Знайти рівняння прямої, що проходить через точки $A(1, 2)$ і $B(3, 4)$.

Приклад

Знайти рівняння прямої, що проходить через точки $A(1, 2)$ і $B(3, 4)$.

Розв'язання

Застосовуючи записану вище формулу, одержуємо:

$$y - 2 = \frac{4-2}{3-1}(x - 1)$$

Приклад

Знайти рівняння прямої, що проходить через точки $A(1, 2)$ і $B(3, 4)$.

<u>**Розв'язання**</u>

Застосовуючи записану вище формулу, одержуємо:

$$y - 2 = \frac{4-2}{3-1}(x-1)$$

$$y - 2 = x - 1$$

Приклад

Знайти рівняння прямої, що проходить через точки $A(1,2)$ і $B(3,4)$.

Розв'язання

Застосовуючи записану вище формулу, одержуємо:

$$y-2=\frac{4-2}{3-1}(x-1)$$

$$y-2=x-1$$

$$x-y+1=0$$

Рівняння прямої за точкою і кутовим коефіцієнтом

Якщо загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ привести до виду:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

і позначити$-\dfrac{A}{B} = k$; $\quad -\dfrac{C}{B} = b$; тобто $y = kx + b$, то отримане рівняння називається **рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом** k.

Рівняння прямої за точкою і напрямком вектора

За аналогією з пунктом, що розглядає рівняння прямої через вектор нормалі можна ввести завдання прямої через точку і напрямний вектор прямої.
Означення. Кожний ненульовий вектор $\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2)$, компоненти якого задовольняють умові $A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0$ називається напрямним вектором прямої $Ax + By + C = 0$.

Приклад

Знайти рівняння прямої з напрямним вектором $\vec{u} = (1; -1)$, що проходить через точку $A(1; 2)$.
Рівняння шуканої прямої будемо шукати у вигляді: $Ax + By + C = 0$.
Відповідно до визначення, коефіцієнти повинні задовольняти умовам:
$1 \cdot A + (-1) \cdot B = 0$, тобто $A = B$.
Тоді рівняння прямої має вигляд: $Ax + Ay + C = 0$, або $x + y + C/A = 0$. При $x = 1$, $y = 2$ одержуємо $C/A = -3$, тобто шукане рівняння:

$$x + y - 3 = 0$$

Рівняння прямої у відрізках

Якщо в загальному рівнянні прямої $Ax + By + C = 0$, $C \neq 0$, то, розділивши на $-C$, одержимо: $-\dfrac{A}{C}x - \dfrac{B}{C}y = 1$ або
$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, де

$$a = -\frac{C}{A}; \quad b = -\frac{C}{B}$$

Геометричний зміст коефіцієнтів у тім, що коефіцієнт a є координатою точки перетину прямої з віссю Ox, а b – координатою точки перетину прямої з віссю Oy.

Приклад. Задано загальне рівняння прямої $x - y + 1 = 0$. Знайти рівняння цієї прямої у відрізках.
$C = 1$, $-\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{1} = 1$, $a = -1$, $b = 1$.

Нормальне рівняння прямої

Якщо обидві частини рівняння $Ax + By + C = 0$ розділити на число $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, що називається **нормуючим множником**, то одержимо $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$ – **нормальне рівняння прямої**.

Знак $\pm$ нормуючого множника треба вибирати так, щоб $\mu C < 0$.

p – довжина перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму, а φ – кут, утворений цим перпендикуляром з позитивним напрямком осі Ox.

Приклад

Дано загальне рівняння прямої $12x - 5y - 65 = 0$. Потрібно написати різні типи рівнянь цієї прямої.

рівняння цієї прямої у відрізках: $\frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1$, $\frac{x}{(65/12)} + \frac{y}{(-13)} = 1$.

рівняння цієї прямої з кутовим коефіцієнтом: (ділимо на 5)

$$y = \frac{12}{5}x - \frac{65}{5} = \frac{12}{5}x - 13.$$

нормальне рівняння прямої:

$\mu = \frac{1}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{1}{13}; \Rightarrow \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 5 = 0$; $\cos\varphi = 12/13$; $\sin\varphi = -5/13$; $p = 5$.

Слід відзначити, що не кожну пряму можна представити рівнянням у відрізках, наприклад, прямі, паралельні осям або такі, що проходять через початок координат.

Приклад

Пряма відтинає на координатних осях рівні позитивні відрізки. Скласти рівняння прямої, якщо площа трикутника, утвореного цими відрізками дорівнює 8дм^2.

Рівняння прямої має вигляд: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, $a = b$; $a \cdot b/2 = 8$; $a = 4; -4$.

$a = -4$ не підходить за умовою задачі.

Разом: $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{4} = 1$ або $x + y - 4 = 0$.

Приклад

Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(-2,-3)$ і початок координат.

Рівняння прямої має вигляд: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$, де $x_1=y_1=0$; $x_2=-2$; $y_2=-3$.

$$\frac{x-0}{-2-0}=\frac{y-0}{-3-0};\qquad \frac{x}{-2}=\frac{y}{-3};\qquad 3x-2y=0.$$

Кут між прямими на площині

Твердження. Якщо задані дві прямі $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$, то гострий кут між цими прямими буде визначатися як

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

Дві прямі паралельні, якщо $k_1 = k_2$.
Дві прямі перпендикулярні, якщо $k_1 = -1/k_2$.
Теорема. *Прямі $Ax + By + C = 0$ і $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ паралельні, коли пропорційні коефіцієнти $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$. Якщо ще і $C_1 = \lambda C$, то прямі збігаються.*
Координати точки перетину двох прямих є розв'язками системи двох рівнянь.

Рівняння прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до даної прямої

Твердження. Пряма, що проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$ і перпендикулярна до прямої $y = kx + b$, представляється рівнянням:

$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1)$$

Відстань від точки до прямої

Теорема. *Якщо задано точку* $M(x_0, y_0)$, *то відстань до прямої* $Ax + By + C = 0$ *визначається так:*

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Доведення

Нехай точка $M_1(x_1, y_1)$ – основа перпендикуляра, опущеного із точки M на задану пряму. Тоді відстань між точками M і M_1:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \tag{1}$$

Координати x_1 і y_1 можуть бути знайдені як розв'язки системи рівнянь:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A(y - y_0) - B(x - x_0) = 0 \end{cases}$$

Друге рівняння системи – це рівняння прямої, що проходить через задану точку M_0 перпендикулярно заданої прямої.

Доведення

Якщо перетворити перше рівняння системи до виду:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + Ax_0 + By_0 + C = 0,$$

Доведення

Якщо перетворити перше рівняння системи до виду:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + Ax_0 + By_0 + C = 0,$$

то, розв'язуючи, одержимо:

$$x - x_0 = -\frac{A}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C),$$
$$y - y_0 = -\frac{B}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C)$$

Підставляючи ці вирази до рівняння (1), знаходимо:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Доведення

Якщо перетворити перше рівняння системи до виду:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + Ax_0 + By_0 + C = 0,$$

то, розв'язуючи, одержимо:

$$x - x_0 = -\frac{A}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C),$$
$$y - y_0 = -\frac{B}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C)$$

Підставляючи ці вирази до рівняння (1), знаходимо:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Теорему доведено.

Приклад

Визначити кут між прямими: $y = -3x + 7$; $y = 2x + 1$.

$k_1 = -3$; $k_2 = 2$, $\operatorname{tg}\varphi = \left|\dfrac{2-(-3)}{1+(-3)2}\right| = 1$; $\varphi = \pi/4$.

Приклад

Показати, що прямі $3x - 5y + 7 = 0$ і $10x + 6y - 3 = 0$ перпендикулярні.

Розв'язання

Знаходимо: $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$, $k_1 k_2 = -1$, отже, прямі перпендикулярні.

Приклад

Дано вершини трикутника $A(0;1)$, $B(6;5)$, $C(12;-1)$. Знайти рівняння висоти, проведеної з вершини C.

Розв'язання

Знаходимо рівняння сторони AB: $\dfrac{x-0}{6-0} = \dfrac{y-1}{5-1}$; $\quad \dfrac{x}{6} = \dfrac{y-1}{4}$; $4x = 6y - 6$;

$2x - 3y + 3 = 0$; $y = \dfrac{2}{3}x + 1$.

Приклад

Дано вершини трикутника $A(0;1)$, $B(6;5)$, $C(12;-1)$. Знайти рівняння висоти, проведеної з вершини C.

Розв'язання

Знаходимо рівняння сторони AB: $\dfrac{x-0}{6-0}=\dfrac{y-1}{5-1}$; $\quad \dfrac{x}{6}=\dfrac{y-1}{4}$; $4x=6y-6$;

$2x-3y+3=0$; $y=\dfrac{2}{3}x+1$.

Шукане рівняння висоти має вигляд: $Ax+By+C=0$ або $y=kx+b$.

Приклад

Дано вершини трикутника $A(0;1)$, $B(6;5)$, $C(12;-1)$. Знайти рівняння висоти, проведеної з вершини C.

Розв'язання

Знаходимо рівняння сторони AB: $\dfrac{x-0}{6-0}=\dfrac{y-1}{5-1}$; $\quad \dfrac{x}{6}=\dfrac{y-1}{4}$; $4x=6y-6$;

$2x-3y+3=0$; $y=\dfrac{2}{3}x+1$.

Шукане рівняння висоти має вигляд: $Ax+By+C=0$ або $y=kx+b$.

$k=-\dfrac{3}{2}$. Тоді $y=-\dfrac{3}{2}x+b$. Оскільки висота проходить через точку C, то її координати задовольняють даному рівнянню: $-1=-\dfrac{3}{2}12+b$, звідки $b=17$.

Разом: $y=-\dfrac{3}{2}x+17$. Множачи обидві частини цієї рівності на 2, отримуємо остаточну відповідь.

Приклад

Дано вершини трикутника $A(0;1)$, $B(6;5)$, $C(12;-1)$. Знайти рівняння висоти, проведеної з вершини C.

<u>**Розв'язання**</u>

Знаходимо рівняння сторони AB: $\dfrac{x-0}{6-0} = \dfrac{y-1}{5-1}$; $\quad \dfrac{x}{6} = \dfrac{y-1}{4}$; $4x = 6y - 6$; $2x - 3y + 3 = 0$; $y = \dfrac{2}{3}x + 1$.

Шукане рівняння висоти має вигляд: $Ax + By + C = 0$ або $y = kx + b$.

$k = -\dfrac{3}{2}$. Тоді $y = -\dfrac{3}{2}x + b$. Оскільки висота проходить через точку C, то її координати задовольняють даному рівнянню: $-1 = -\dfrac{3}{2}12 + b$, звідки $b = 17$.

Разом: $y = -\dfrac{3}{2}x + 17$. Множачи обидві частини цієї рівності на 2, отримуємо остаточну відповідь.

Відповідь: $3x + 2y - 34 = 0$.

Криві другого порядку

Загальна форма запису рівняння кривої другого порядку

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Загальна форма запису рівняння кривої другого порядку

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Перепозначення:

$$A = a_{11}, B = 2a_{12}, C = a_{22}, D = 2a_{13}, E = 2a_{23}, F = a_{33}$$

Загальна форма запису рівняння кривої другого порядку

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Перепозначення:

$$A = a_{11}, B = 2a_{12}, C = a_{22}, D = 2a_{13}, E = 2a_{23}, F = a_{33}$$

Інша загальна форма рівняння:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{2}$$

Загальна форма запису рівняння кривої другого порядку

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Перепозначення:

$$A = a_{11}, B = 2a_{12}, C = a_{22}, D = 2a_{13}, E = 2a_{23}, F = a_{33}$$

Інша загальна форма рівняння:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{2}$$

Якщо a_{11}, a_{12} і a_{22} не дорівнюють нулю одночасно, будемо називати саме (2) *загальним рівнянням кривої другого порядку*.

Загальна форма запису рівняння кривої другого порядку

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Перепозначення:

$$A = a_{11}, B = 2a_{12}, C = a_{22}, D = 2a_{13}, E = 2a_{23}, F = a_{33}$$

Інша загальна форма рівняння:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (2)$$

Якщо a_{11}, a_{12} і a_{22} не дорівнюють нулю одночасно, будемо називати саме (2) *загальним рівнянням кривої другого порядку*.
Перші три доданки у лівій частині рівняння (2) називаються *квадратичною формою* відносно змінних x та y.

Класифікація кривих другого порядку

Перетворення обертання відносно початку координат:

$$\begin{cases} x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi; \\ y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi; \end{cases} \tag{3}$$

Класифікація кривих другого порядку

Перетворення обертання відносно початку координат:

$$\begin{cases} x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi; \\ y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi; \end{cases} \tag{3}$$

Перетворення перенесення початку координат:

$$\begin{cases} x = \overline{x} + x_0; \\ y = \overline{y} + y_0; \end{cases} \tag{4}$$

де кут φ, x_0 та y_0 є параметрами перетворень.

Класифікація кривих другого порядку

Підставивши (3) до (2) і прирівнявши коефіцієнт при $x'y'$ до нуля, отримаємо відому з теорії головних напружень у опорі матеріалів та теорії головних моментів інерції у теоретичній механіці формулу:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{22} - a_{11}}. \tag{5}$$

Після повороту на кут, що визначається рівнянням (5), нові коефіцієнти при x'^2 та y'^2 можна отримати за відомими формулами:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \tfrac{1}{2}\left[(a_{11} + a_{22}) - \operatorname{sign}(a_{22} - a_{11})\sqrt{D}\right]; \\ a'_{22} &= \tfrac{1}{2}\left[(a_{11} + a_{22}) + \operatorname{sign}(a_{22} - a_{11})\sqrt{D}\right]; \\ D &= (a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2, \end{aligned} \tag{6}$$

де через sign позначено функцію знаку виразу у дужках (дорівнює -1, якщо вираз від'ємний, 1, якщо додатний, і 0, якщо дорівнює нулеві).

Остаточне спрощення загального рівняння виконується за допомогою виокремлення у ньому повних квадратів і вибору відповідних параметрів перетворення (4) з метою отримання рівняння, у якому б не було доданків з $\overline{x}$ та $\overline{y}$ у перших степенях.

Класифікація кривих другого порядку

Загалом, оскільки, очевидно, перетворення (4) не змінить значень коефіцієнтів при квадратах x та y, класифікацію кривих другого порядку можна виконати за цими коефіцієнтами. Можливі такі випадки:

1. Коефіцієнти a'_{11} і a'_{22} мають однакові знаки.
2. Коефіцієнти a'_{11} і a'_{22} мають різні знаки.
3. Один з коефіцієнтів a'_{11} чи a'_{22} дорівнює нулеві.

Класифікація кривих другого порядку

Загалом, оскільки, очевидно, перетворення (4) не змінить значень коефіцієнтів при квадратах x та y, класифікацію кривих другого порядку можна виконати за цими коефіцієнтами. Можливі такі випадки:

1. Коефіцієнти a'_{11} і a'_{22} мають однакові знаки.
2. Коефіцієнти a'_{11} і a'_{22} мають різні знаки.
3. Один з коефіцієнтів a'_{11} чи a'_{22} дорівнює нулеві.

У першому з випадків криву називають *еліпсом*, у другому — *гіперболою*, у третьому — *параболою*.

Еліпс

Якщо a'_{11} і a'_{22} мають однакові знаки і перетворене рівняння задовольняється хоча б для декількох точок площини, це перетворене рівняння, $a'_{11}\overline{x}^2 + a'_{22}\overline{y}^2 + a'_{33} = 0$, можна звести до такого вигляду:

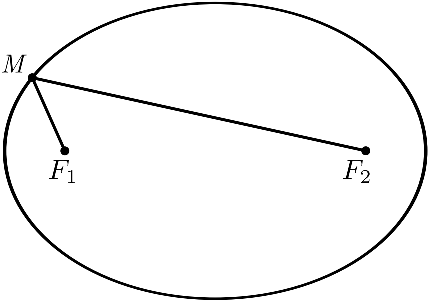
$$\frac{\overline{x}^2}{a^2} + \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1. \tag{7}$$

Рівняння (7) називають *канонічним рівнянням еліпса.*

Класичне означення

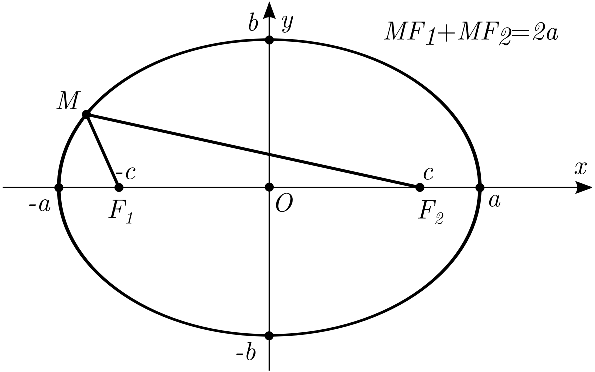
Еліпсом називається геометричне місце точок, сума відстаней від яких до двох заданих точок (які ми називатимемо *фокусами еліпса*) є величиною сталою.

$$MF_1 + MF_2 = const$$



Виведення канонічного рівняння з класичного визначення

Фокуси: $F_1\,(-c; 0)$ і $F_2\,(c; 0)$.
Точка на еліпсі: $M\,(x; y)$.
Сума відстаней F_1M та F_2M дорівнює $2a$.



Виведення канонічного рівняння з класичного визначення

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}; F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

$$F_1M + F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Виведення канонічного рівняння з класичного визначення

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}; F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

$$F_1M + F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2.$$

Виведення канонічного рівняння з класичного визначення

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}; F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

$$F_1M + F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2.$$

Після зведення подібних і скорочення на 4:

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

Виведення канонічного рівняння з класичного визначення

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}; F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

$$F_1M + F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2.$$

Після зведення подібних і скорочення на 4:

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

$$\left(a^2 - c^2\right) x^2 + a^2 y^2 = a^2 \left(a^2 - c^2\right).$$

Виведення канонічного рівняння з класичного визначення

Оскільки $a > c$, позначимо

$$\boxed{a^2 - c^2 = b^2}$$

і поділимо обидві частини рівняння на $a^2 b^2$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Фокальні радіуси

Відстані F_1M та F_2M називаються *фокальними радіусами* точки M і позначаються r_1 та r_2. Підставивши y з канонічного рівняння еліпса до виразів для F_1M та F_2M, дістанемо:

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x; r_2 = a + \frac{c}{a}x.$$

Еліпс – центральна крива

Зауважимо, що з канонічного рівняння еліпса випливає, що значення координат точок, що лежать на еліпсі, є обмеженими (оскільки для x та y, що задовольняють цьому рівнянню, мають виконуватися нерівності $-a \leqslant x \leqslant a$ та $-b \leqslant y \leqslant b$). З того, що до канонічного рівняння входять координати точки еліпса лише у парних степенях, дістаємо, що коли точка $M\,(x; y)$ належить еліпсу, то і точки $M_1\,(-x; y)$, $M_2\,(x; -y)$ і $M_3\,(-x; -y)$ також належать еліпсу. Отже, еліпс має вертикальну та горизонтальну осі симетрії, а також центр симетрії.

Еліпс – центральна крива

Зауважимо, що з канонічного рівняння еліпса випливає, що значення координат точок, що лежать на еліпсі, є обмеженими (оскільки для x та y, що задовольняють цьому рівнянню, мають виконуватися нерівності $-a \leqslant x \leqslant a$ та $-b \leqslant y \leqslant b$). З того, що до канонічного рівняння входять координати точки еліпса лише у парних степенях, дістаємо, що коли точка $M\,(x;y)$ належить еліпсу, то і точки $M_1\,(-x;y)$, $M_2\,(x;-y)$ і $M_3\,(-x;-y)$ також належать еліпсу. Отже, еліпс має вертикальну та горизонтальну осі симетрії, а також центр симетрії.

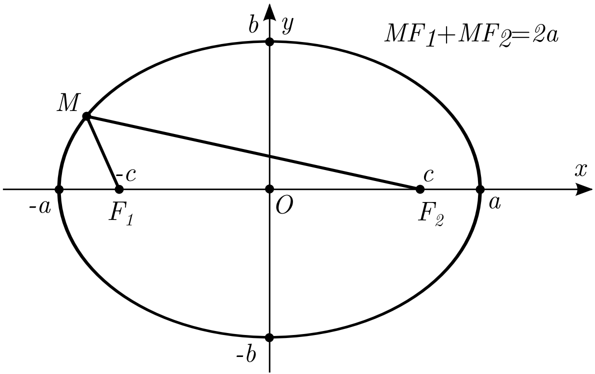
Крива, що має центр симетрії, називається *центральною*.

Вершини еліпса

Точки перетину еліпса з осями координат можна визначити з канонічного рівняння, підставивши до нього послідовно $x = 0$ та $y = 0$. Цими точками є точки з координатами $(-a; 0)$, $(a; 0)$, $(0; -b)$ та $(0; b)$. Ці точки називаються вершинами еліпса.

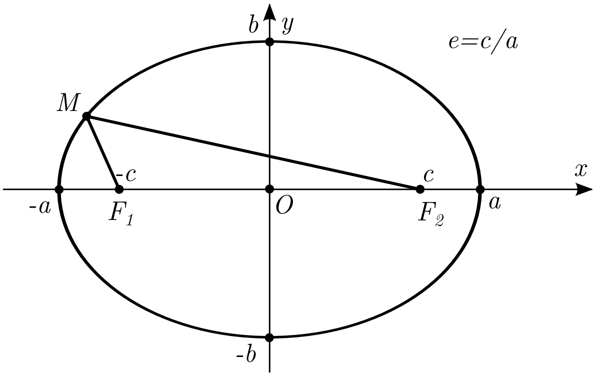
Напіввісі еліпса

Величини $2a$ і $2b$ називаються *осями еліпса*, а a і b — *напівосями*.



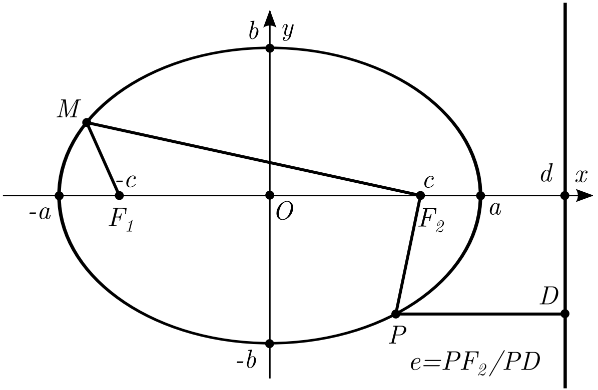
Ексцентриситет еліпса

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$
$$0 \leqslant e < 1.$$

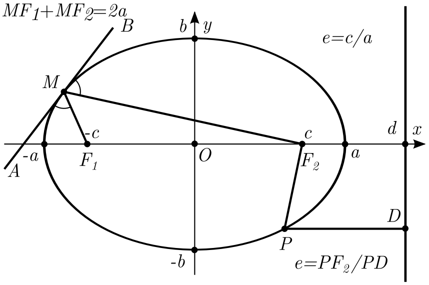


Директриси еліпса

Прямі $x = \pm\dfrac{a}{e}$ називаються *директрисами*(напрямними) еліпса (пряма dD). Особливістю директриси є те, що відношення фокального радіуса будь-якої точки еліпса до відповідної відстані до директриси є величиною сталою, що дорівнює ексцентриситету.

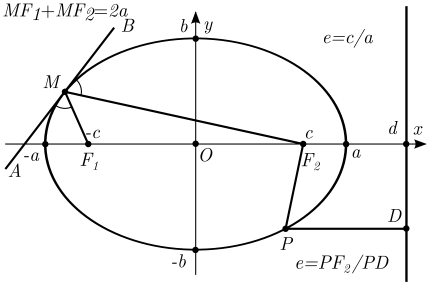


Оптичні властивості еліпса



$$\angle AMF_1 = \angle BMF_2$$

Оптичні властивості еліпса



$$\angle AMF_1 = \angle BMF_2$$

Отже, промінь світла або будь-яка інша хвиля, запущена з одного фокуса еліпса на його дзеркальну поверхню, потрапить до іншого фокуса. Цю властивість можна використати для побудови еліптичних дзеркал, що концентрують сонячну енергію, яка на них потрапляє, у певній, потрібній будівельнику, точці, або для звукової ізоляції певних частин приміщення або будівлі від відбитого від стін шуму.