Похідні і диференціали вищих порядків

Друга похідна

Нехай функція $f(x)$ – диференційована на деякому інтервалі. Тоді, диференціюючи її, одержуємо першу похідну

$$y' = f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$$

Друга похідна

Нехай функція $f(x)$ – диференційована на деякому інтервалі. Тоді, диференціюючи її, одержуємо першу похідну

$$y' = f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$$

Якщо знайти похідну функції $f'(x)$, одержимо **другу похідну** функції $f(x)$.

$$y'' = f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}$$

тобто $y'' = (y')'$ або $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$.

Похідна n-го порядку

Цей процес можна продовжити і далі, знаходячи похідні порядку n.

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right).$$

Позначення

Похідні до третього порядку включно:

$$y'$$

Позначення

Похідні до третього порядку включно:

$$y', y''$$

Позначення

Похідні до третього порядку включно:

$$y', y'', y'''$$

Позначення

Похідні до третього порядку включно:

$$y', y'', y'''$$

Похідні четвертого та вищих порядків:

$$y^{IV}$$

Позначення

Похідні до третього порядку включно:

$$y', y'', y'''$$

Похідні четвертого та вищих порядків:

$$y^{IV}, y^{V}$$

Позначення

Похідні до третього порядку включно:

$$y', y'', y'''$$

Похідні четвертого та вищих порядків:

$$y^{IV}, y^{V}, y^{VI}, \dots$$

Позначення

Похідні до третього порядку включно:

$$y', y'', y'''$$

Похідні четвертого та вищих порядків:

$$y^{IV}, y^{V}, y^{VI}, \dots$$

Похідна n-го порядку:

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f^{(n)}(x)$$

Загальні правила знаходження похідних вищих порядків

Якщо функції $u = f(x)$ і $v = g(x)$ диференційовані, то

1. $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$;

Загальні правила знаходження похідних вищих порядків

Якщо функції $u = f(x)$ і $v = g(x)$ диференційовані, то

1. $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$;
2. $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;

Загальні правила знаходження похідних вищих порядків

Якщо функції $u = f(x)$ і $v = g(x)$ диференційовані, то

1. $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$;
2. $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;
3. $(u \cdot v)^{(n)} =$
$$vu^{(n)} + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots$$
$$\ldots + uv^{(n)}.$$

Цей вираз називається **формулою Ляйбніца**

Коефіцієнти формули Ляйбніца (трикутник Паскаля)

$n = 0$: $\quad 1$

Коефіцієнти формули Ляйбніца (трикутник Паскаля)

$n = 0$:		1	
$n = 1$:	1		1

Коефіцієнти формули Ляйбніца (трикутник Паскаля)

$n = 0$:			1		
$n = 1$:		1		1	
$n = 2$:	1		2		1

Коефіцієнти формули Ляйбніца (трикутник Паскаля)

$$
\begin{array}{lccccccc}
n = 0\text{:} & & & & 1 & & & \\
n = 1\text{:} & & & 1 & & 1 & & \\
n = 2\text{:} & & 1 & & 2 & & 1 & \\
n = 3\text{:} & 1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}
$$

Коефіцієнти формули Ляйбніца (трикутник Паскаля)

$n = 0$:					1				
$n = 1$:				1		1			
$n = 2$:			1		2		1		
$n = 3$:		1		3		3		1	
$n = 4$:	1		4		6		4		1

Приклад

Знайти третю похідну функції $y = 5x^4$.

Розв'язання

Маємо:

$$y = 5x^4$$

Розв'язання

Маємо:

$$y = 5x^4$$

$$y' = 5 \cdot 4x^3$$

Розв'язання

Маємо:

$$y = 5x^4$$

$$y' = 5 \cdot 4x^3 = 20x^3$$

Розв'язання

Маємо:

$$y = 5x^4$$

$$y' = 5 \cdot 4x^3 = 20x^3$$

$$y'' = 20 \cdot 3x^2$$

Розв'язання

Маємо:

$$y = 5x^4$$

$$y' = 5 \cdot 4x^3 = 20x^3$$

$$y'' = 20 \cdot 3x^2 = 60x^2$$

Розв'язання

Маємо:

$$y = 5x^4$$

$$y' = 5 \cdot 4x^3 = 20x^3$$

$$y'' = 20 \cdot 3x^2 = 60x^2$$

$$y''' = 60 \cdot 2x$$

Розв'язання

Маємо:

$$y = 5x^4$$

$$y' = 5 \cdot 4x^3 = 20x^3$$

$$y'' = 20 \cdot 3x^2 = 60x^2$$

$$y''' = 60 \cdot 2x = 120x$$

Диференціал n-го порядку

$$\mathrm{d}^n y = f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n$$

Порушення інваріантності форми запису для диференціалів вищих порядків

Нехай функції $y = f(x)$ та $x = x(t)$ є двічі диференційованими на відповідних проміжках (мають другу похідну на них). Тоді

$$y = f(x(t)) \Rightarrow \mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x;$$

Порушення інваріантності форми запису для диференціалів вищих порядків

Нехай функції $y = f(x)$ та $x = x(t)$ є двічі диференційованими на відповідних проміжках (мають другу похідну на них). Тоді

$$y = f(x(t)) \Rightarrow \mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x; \mathrm{d}^2y = f''(x)\mathrm{d}x^2;$$

Порушення інваріантності форми запису для диференціалів вищих порядків

Нехай функції $y = f(x)$ та $x = x(t)$ є двічі диференційованими на відповідних проміжках (мають другу похідну на них). Тоді

$$y = f(x(t)) \Rightarrow \mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x; \mathrm{d}^2y = f''(x)\mathrm{d}x^2;$$

$$y = f(x(t))$$

Порушення інваріантності форми запису для диференціалів вищих порядків

Нехай функції $y = f(x)$ та $x = x(t)$ є двічі диференційованими на відповідних проміжках (мають другу похідну на них). Тоді

$$y = f(x(t)) \Rightarrow \mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x; \mathrm{d}^2y = f''(x)\mathrm{d}x^2;$$

$$y = f(x(t)) \Rightarrow \mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$$

Порушення інваріантності форми запису для диференціалів вищих порядків

Нехай функції $y = f(x)$ та $x = x(t)$ є двічі диференційованими на відповідних проміжках (мають другу похідну на них). Тоді

$$y = f(x(t)) \Rightarrow \mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x; \mathrm{d}^2y = f''(x)\mathrm{d}x^2;$$

$$y = f(x(t)) \Rightarrow \mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x = f'\left(x(t)\right)x'(t)\mathrm{d}t^2;$$

$$\mathrm{d}^2y = \big(f'(x(t))x'(t)\big)'\,\mathrm{d}t^2$$

Порушення інваріантності форми запису для диференціалів вищих порядків

Нехай функції $y = f(x)$ та $x = x(t)$ є двічі диференційованими на відповідних проміжках (мають другу похідну на них). Тоді

$$y = f(x(t)) \Rightarrow \mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x; \mathrm{d}^2y = f''(x)\mathrm{d}x^2;$$

$$y = f(x(t)) \Rightarrow \mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x = f'\left(x(t)\right)x'(t)\mathrm{d}t^2;$$

$$\mathrm{d}^2y = \left(f'(x(t))x'(t)\right)'\mathrm{d}t^2 = \Big(f''\left(x(t)\right)\left(x'(t)\right)^2 + f'\left(x(t)\right)x''(t)\Big)\mathrm{d}t^2$$

Порушення інваріантності форми запису для диференціалів вищих порядків

Нехай функції $y = f(x)$ та $x = x(t)$ є двічі диференційованими на відповідних проміжках (мають другу похідну на них). Тоді

$$y = f(x(t)) \Rightarrow \mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x; \mathrm{d}^2y = f''(x)\mathrm{d}x^2;$$

$$y = f(x(t)) \Rightarrow \mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x = f'\left(x(t)\right)x'(t)\mathrm{d}t^2;$$

$$\mathrm{d}^2y = \left(f'(x(t))x'(t)\right)'\mathrm{d}t^2 = \Big(f''\left(x(t)\right)\left(x'(t)\right)^2 + f'\left(x(t)\right)x''(t)\Big)\mathrm{d}t^2 =$$

$$= f''(x(t))\left(x'(t)\mathrm{d}t\right)^2 + f'(x(t))x''(t)\mathrm{d}t^2$$

Порушення інваріантності форми запису для диференціалів вищих порядків

Нехай функції $y = f(x)$ та $x = x(t)$ є двічі диференційованими на відповідних проміжках (мають другу похідну на них). Тоді

$$y = f(x(t)) \Rightarrow \mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x; \mathrm{d}^2y = f''(x)\mathrm{d}x^2;$$

$$y = f(x(t)) \Rightarrow \mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x = f'\left(x(t)\right) x'(t)\mathrm{d}t^2;$$

$$\mathrm{d}^2y = \left(f'(x(t))x'(t)\right)' \mathrm{d}t^2 = \Big(f''\left(x(t)\right) \left(x'(t)\right)^2 + f'\left(x(t)\right) x''(t)\Big) \mathrm{d}t^2 =$$

$$= f''(x(t)) \left(x'(t)\mathrm{d}t\right)^2 + f'(x(t))x''(t)\mathrm{d}t^2 = f''(x)(\mathrm{d}x)^2 + f'(x)\mathrm{d}^2x.$$

Порушення інваріантності форми запису для диференціалів вищих порядків

Остання рівність вказує на порушення інваріантності форми запису диференціала другого порядку, а значить, і на порушення інваріантності для усіх диференціалів вищих порядків.

Знаходження похідної другого порядку для функції, яку задано параметрично

Нехай маємо функцію, яку задано параметрично:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Знаходження похідної другого порядку для функції, яку задано параметрично

Нехай маємо функцію, яку задано параметрично:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Тоді, якщо $x(t)$ та $y(t)$ мають в околі точки, де слід знайти другу похідну від функції $y(x)$, другі похідні,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

Знаходження похідної другого порядку для функції, яку задано параметрично

Нехай маємо функцію, яку задано параметрично:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Тоді, якщо $x(t)$ та $y(t)$ мають в околі точки, де слід знайти другу похідну від функції $y(x)$, другі похідні,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Знаходження похідної другого порядку для функції, яку задано параметрично

Нехай маємо функцію, яку задано параметрично:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Тоді, якщо $x(t)$ та $y(t)$ мають в околі точки, де слід знайти другу похідну від функції $y(x)$, другі похідні,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]$$

Знаходження похідної другого порядку для функції, яку задано параметрично

Нехай маємо функцію, яку задано параметрично:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Тоді, якщо $x(t)$ та $y(t)$ мають в околі точки, де слід знайти другу похідну від функції $y(x)$, другі похідні,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}t}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]$$

Знаходження похідної другого порядку для функції, яку задано параметрично

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{x'(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]$$

Приклад

Знайти другу похідну функції $y = y(x)$, якщо

$$\begin{cases} x = t^2 e^{t^3}; \\ y = \left(1 - t^2\right) e^{-t}. \end{cases}$$

Розв'язання

Маємо:

$$x = t^2 e^{t^3}$$

Розв'язання

Маємо:

$$x = t^2 e^{t^3} \Rightarrow x'(t) = 2te^{t^3} + t^2 \cdot e^{t^3} \cdot 3t^2$$

Розв'язання

Маємо:

$$x = t^2 e^{t^3} \Rightarrow x'(t) = 2te^{t^3} + t^2 \cdot e^{t^3} \cdot 3t^2 = e^{t^3}(2t + 3t^4)$$

Розв'язання

Маємо:

$$x = t^2 e^{t^3} \Rightarrow x'(t) = 2te^{t^3} + t^2 \cdot e^{t^3} \cdot 3t^2 = e^{t^3}(2t + 3t^4)$$

$$y = \left(1 - t^2\right) e^{-t}$$

Розв'язання

Маємо:

$$x = t^2 e^{t^3} \Rightarrow x'(t) = 2te^{t^3} + t^2 \cdot e^{t^3} \cdot 3t^2 = e^{t^3}(2t + 3t^4)$$

$$y = \left(1 - t^2\right) e^{-t} \Rightarrow y'(t) = -2t \cdot e^{-t} + (1 - t^2) \cdot e^{-t} \cdot (-1)$$

Розв'язання

Маємо:

$$x = t^2 e^{t^3} \Rightarrow x'(t) = 2te^{t^3} + t^2 \cdot e^{t^3} \cdot 3t^2 = e^{t^3}(2t + 3t^4)$$

$$y = \left(1 - t^2\right) e^{-t} \Rightarrow y'(t) = -2t \cdot e^{-t} + (1 - t^2) \cdot e^{-t} \cdot (-1) = e^{-t}(t^2 - 2t - 1)$$

Розв'язання

Маємо:

$$x = t^2 e^{t^3} \Rightarrow x'(t) = 2te^{t^3} + t^2 \cdot e^{t^3} \cdot 3t^2 = e^{t^3}(2t + 3t^4)$$

$$y = \left(1 - t^2\right) e^{-t} \Rightarrow y'(t) = -2t \cdot e^{-t} + (1 - t^2) \cdot e^{-t} \cdot (-1) = e^{-t}(t^2 - 2t - 1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{e^{-t}(t^2 - 2t - 1)}{e^{t^3}(2t + 3t^4)}\right]$$

Розв'язання

Маємо:

$$x = t^2 e^{t^3} \Rightarrow x'(t) = 2te^{t^3} + t^2 \cdot e^{t^3} \cdot 3t^2 = e^{t^3}(2t + 3t^4)$$

$$y = \left(1 - t^2\right) e^{-t} \Rightarrow y'(t) = -2t \cdot e^{-t} + (1 - t^2) \cdot e^{-t} \cdot (-1) = e^{-t}(t^2 - 2t - 1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{e^{-t}(t^2 - 2t - 1)}{e^{t^3}(2t + 3t^4)}\right] = \left[e^{-t-t^3} \cdot \frac{t^2 - 2t - 1}{2t + 3t^4}\right]'$$

Розв'язання

Маємо:

$$x = t^2 e^{t^3} \Rightarrow x'(t) = 2te^{t^3} + t^2 \cdot e^{t^3} \cdot 3t^2 = e^{t^3}(2t + 3t^4)$$

$$y = \left(1 - t^2\right) e^{-t} \Rightarrow y'(t) = -2t \cdot e^{-t} + (1 - t^2) \cdot e^{-t} \cdot (-1) = e^{-t}(t^2 - 2t - 1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{e^{-t}(t^2 - 2t - 1)}{e^{t^3}(2t + 3t^4)}\right] = \left[e^{-t-t^3} \cdot \frac{t^2 - 2t - 1}{2t + 3t^4}\right]' =$$

$$= e^{-t-t^3}(-1-3t^2) \cdot \frac{t^2 - 2t - 1}{2t + 3t^4} + e^{-t-t^3} \cdot \frac{(2t - 2)(2t + 3t^4) - (t^2 - 2t - 1)(2 + 12t^3)}{(2t + 3t^4)^2}$$

Розв'язання

Маємо:

$$x = t^2 e^{t^3} \Rightarrow x'(t) = 2te^{t^3} + t^2 \cdot e^{t^3} \cdot 3t^2 = e^{t^3}(2t + 3t^4)$$

$$y = \left(1 - t^2\right) e^{-t} \Rightarrow y'(t) = -2t \cdot e^{-t} + (1 - t^2) \cdot e^{-t} \cdot (-1) = e^{-t}(t^2 - 2t - 1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{e^{-t}(t^2 - 2t - 1)}{e^{t^3}(2t + 3t^4)}\right] = \left[e^{-t-t^3} \cdot \frac{t^2 - 2t - 1}{2t + 3t^4}\right]' =$$

$$= e^{-t-t^3}(-1-3t^2) \cdot \frac{t^2 - 2t - 1}{2t + 3t^4} + e^{-t-t^3} \cdot \frac{(2t-2)(2t + 3t^4) - (t^2 - 2t - 1)(2 + 12t^3)}{(2t + 3t^4)^2} =$$

$$= -\frac{\left(9t^8 - 18t^7 - 6t^6 + 6t^5 - 33t^4 - 16t^3 - 6t^2 - 2t - 2\right) e^{-t^3-t}}{(2t + 3t^4)^2}$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{x'(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{x'(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right] =$$

$$= -\frac{\left(9t^8 - 18t^7 - 6t^6 + 6t^5 - 33t^4 - 16t^3 - 6t^2 - 2t - 2\right)\, e^{-2t^3 - t}}{(2t + 3t^4)^3}$$

Знаходження похідної другого порядку для функції, яку задано неявним чином

Нехай змінна x і її функція $y = y(x)$ пов'язані між собою рівнянням

$$F(x, y) = 0$$

Алгоритм знаходження

Знаходження похідної другого порядку для функції, заданої неявним чином, виконують у три кроки:

Алгоритм знаходження

Знаходження похідної другого порядку для функції, заданої неявним чином, виконують у три кроки:

- Диференціюють обидві частини виразу $F(x, y) = 0$ за x, враховуючи правила диференціювання складеної функції і те, що $y = y(x)$.

Алгоритм знаходження

Знаходження похідної другого порядку для функції, заданої неявним чином, виконують у три кроки:

- Диференціюють обидві частини виразу $F(x, y) = 0$ за x, враховуючи правила диференціювання складеної функції і те, що $y = y(x)$.
- Знаходять з отриманого рівняння $y'(x)$.

Алгоритм знаходження

Знаходження похідної другого порядку для функції, заданої неявним чином, виконують у три кроки:

- Диференціюють обидві частини виразу $F(x, y) = 0$ за x, враховуючи правила диференціювання складеної функції і те, що $y = y(x)$.
- Знаходять з отриманого рівняння $y'(x)$.
- Диференціюють рівняння для $y'(x)$ і підставляють до нього значення $y'(x)$.

Приклад

$y = x + \ln y$. Знайти $y'' = \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

Розв'язання

Знаходимо $y'(x)$:

$$(y)' = (x)' + (\ln y)'$$

Розв'язання

Знаходимо $y'(x)$:

$$(y)' = (x)' + (\ln y)' \Rightarrow y' = 1 + \frac{y'}{y}$$

Розв'язання

Знаходимо $y'(x)$:

$$(y)' = (x)' + (\ln y)' \Rightarrow y' = 1 + \frac{y'}{y} \Rightarrow \left[1 - \frac{1}{y}\right] y' = 1$$

Розв'язання

Знаходимо $y'(x)$:

$$(y)' = (x)' + (\ln y)' \Rightarrow y' = 1 + \frac{y'}{y} \Rightarrow \left[1 - \frac{1}{y}\right] y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{y}{y-1}$$

Розв'язання

Знаходимо $y'(x)$:

$$(y)' = (x)' + (\ln y)' \Rightarrow y' = 1 + \frac{y'}{y} \Rightarrow \left[1 - \frac{1}{y}\right] y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{y}{y-1}$$

Диференціюємо рівняння для $y'(x)$:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = (y')'$$

Розв'язання

Знаходимо $y'(x)$:

$$(y)' = (x)' + (\ln y)' \Rightarrow y' = 1 + \frac{y'}{y} \Rightarrow \left[1 - \frac{1}{y}\right] y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{y}{y-1}$$

Диференціюємо рівняння для $y'(x)$:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = (y')' = \left(\frac{y}{y-1}\right)'$$

Розв'язання

Знаходимо $y'(x)$:

$$(y)' = (x)' + (\ln y)' \Rightarrow y' = 1 + \frac{y'}{y} \Rightarrow \left[1 - \frac{1}{y}\right] y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{y}{y-1}$$

Диференціюємо рівняння для $y'(x)$:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = (y')' = \left(\frac{y}{y-1}\right)' = \frac{y' \cdot (y-1) - y \cdot y'}{(y-1)^2}$$

Розв'язання

Знаходимо $y'(x)$:

$$(y)' = (x)' + (\ln y)' \Rightarrow y' = 1 + \frac{y'}{y} \Rightarrow \left[1 - \frac{1}{y}\right] y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{y}{y-1}$$

Диференціюємо рівняння для $y'(x)$:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = (y')' = \left(\frac{y}{y-1}\right)' = \frac{y' \cdot (y-1) - y \cdot y'}{(y-1)^2} =$$

$$= -\frac{y'}{(y-1)^2}$$

Розв'язання

Знаходимо $y'(x)$:

$$(y)' = (x)' + (\ln y)' \Rightarrow y' = 1 + \frac{y'}{y} \Rightarrow \left[1 - \frac{1}{y}\right] y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{y}{y-1}$$

Диференціюємо рівняння для $y'(x)$:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = (y')' = \left(\frac{y}{y-1}\right)' = \frac{y' \cdot (y-1) - y \cdot y'}{(y-1)^2} =$$

$$= -\frac{y'}{(y-1)^2} = -\frac{\frac{y}{y-1}}{(y-1)^2}$$

Розв'язання

Знаходимо $y'(x)$:

$$(y)' = (x)' + (\ln y)' \Rightarrow y' = 1 + \frac{y'}{y} \Rightarrow \left[1 - \frac{1}{y}\right] y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{y}{y-1}$$

Диференціюємо рівняння для $y'(x)$:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = (y')' = \left(\frac{y}{y-1}\right)' = \frac{y' \cdot (y-1) - y \cdot y'}{(y-1)^2} =$$

$$= -\frac{y'}{(y-1)^2} = -\frac{\frac{y}{y-1}}{(y-1)^2} = -\frac{y}{(y-1)^3}$$