# Похідна функції однієї змінної

# Означення похідної функції

**Означення** **Похідною** функції $f(x)$ у точці $x$ називається границя, якщо вона існує, відношення приросту функції у цій точці до приросту аргументу при прямування приросту аргументу до нуля.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

# Означення похідної функції

**<u>Означення</u> Похідною** функції $f(x)$ у точці $x$ називається границя, якщо вона існує, відношення приросту функції у цій точці до приросту аргументу при прямування приросту аргументу до нуля.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

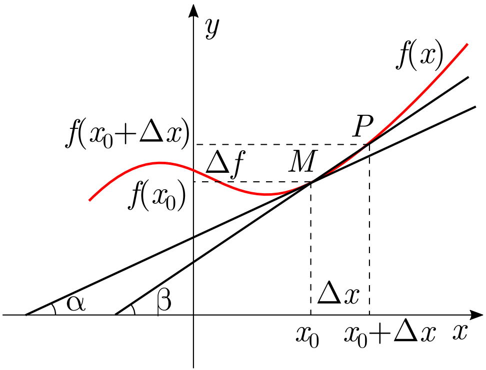
# Означення похідної функції

**Означення Похідною** функції $f(x)$ у точці $x$ називається границя, якщо вона існує, відношення приросту функції у цій точці до приросту аргументу при прямування приросту аргументу до нуля.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Функція, яка має у точці похідну, називається *диференційованою* у цій точці.

# Геометричний зміст похідної



# Геометричний зміст похідної

Нехай $f(x)$ визначена на деякому проміжку $(a, b)$. Тоді $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс кута нахилу січної $MP$ до графіка функції.

# Геометричний зміст похідної

Нехай $f(x)$ визначена на деякому проміжку $(a, b)$. Тоді $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс кута нахилу січної $MP$ до графіка функції.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha,$$

де $\alpha$ – кут нахилу дотичної до графіка функції $f(x)$ у точці $(x_0, f(x_0))$.

# Геометричний зміст похідної

Нехай $f(x)$ визначена на деякому проміжку $(a, b)$. Тоді $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс кута нахилу січної $MP$ до графіка функції.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

де $\alpha$ – кут нахилу дотичної до графіка функції $f(x)$ у точці $(x_0, f(x_0))$.
Кут між кривими може бути визначений як кут між дотичними, проведеними до цих кривих у якійсь точці.

# Дотична та нормаль до кривої

Рівняння дотичної до кривої: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

# Дотична та нормаль до кривої

Рівняння дотичної до кривої: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Рівняння нормалі до кривої: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

# Дотична та нормаль до кривої

Рівняння дотичної до кривої: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Рівняння нормалі до кривої: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Фактично, похідна функції показує швидкість зміни функції, як змінюється функція при зміні змінної.

# Фізичний зміст похідної

Фізичний зміст похідної функції $f(t)$, де $t$ – час, а $f(t)$ – закон руху (зміни координат) – миттєва швидкість руху.

# Фізичний зміст похідної

Фізичний зміст похідної функції $f(t)$, де $t$ – час, а $f(t)$ – закон руху (зміни координат) – миттєва швидкість руху.

$$v_{\text{сер}} = \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

# Фізичний зміст похідної

Фізичний зміст похідної функції $f(t)$, де $t$ – час, а $f(t)$ – закон руху (зміни координат) – миттєва швидкість руху.

$$v_{\text{сер}} = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

# Фізичний зміст похідної

Фізичний зміст похідної функції $f(t)$, де $t$ – час, а $f(t)$ – закон руху (зміни координат) – миттєва швидкість руху.

$$v_{\text{сер}} = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{сер}}$$

# Фізичний зміст похідної

Фізичний зміст похідної функції $f(t)$, де $t$ – час, а $f(t)$ – закон руху (зміни координат) – миттєва швидкість руху.

$$v_{\text{сер}} = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{сер}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

# Фізичний зміст похідної

Фізичний зміст похідної функції $f(t)$, де $t$ – час, а $f(t)$ – закон руху (зміни координат) – миттєва швидкість руху.

$$v_{\text{сер}} = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{сер}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

Відповідно, друга похідна функції – швидкість зміни швидкості, тобто прискорення.

# Позначення Ляйбніца (Leibniz)

$$v = f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$$

# Позначення Ляйбніца (Leibniz)

$$v = f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$$

Корисне, оскільки у багатьох випадках похідна поводиться подібно до звичайного дробу.

# Однобічні похідні функції у точці

**Означення** Правою (лівою) похідною функції $f(x)$ у точці $x = x_0$ називається праве (ліве) значення границі відношення $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ за умови, що це відношення існує.

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x};$$
$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

# Однобічні похідні функції у точці

Якщо функція $f(x)$ має похідну в деякій точці $x = x_0$, то вона має у цій точці однобічні похідні. Однак, зворотне твердження невірне. По-перше, функція може мати розрив у точці $x_0$, а по-друге, навіть якщо функція неперервна у точці $x_0$, вона може бути у ній недиференційована.

# Приклад

$f(x) = |x|$ – має у точці $x = 0$ і ліву і праву похідну, неперервна у цій точці, однак, не має в ній похідної.

# Необхідна умова існування похідної

**Теорема** *Якщо функція $f(x)$ має похідну у точці $x_0$, то вона неперервна у цій точці.*

# Необхідна умова існування похідної

**Теорема** *Якщо функція $f(x)$ має похідну у точці $x_0$, то вона неперервна у цій точці.*

Зрозуміло, що ця умова не є достатньою.

# Основні правила диференціювання

Позначимо $f(x) = u$, $g(x) = v$ – функції, диференційовані у точці $x$.

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

# Основні правила диференціювання

Позначимо $f(x) = u$, $g(x) = v$ – функції, диференційовані у точці $x$.

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(u \cdot v)' = uv' + u'v$

# Основні правила диференціювання

Позначимо $f(x) = u$, $g(x) = v$ – функції, диференційовані у точці $x$.

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(u \cdot v)' = uv' + u'v$
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, якщо $v \neq 0$.

# Основні правила диференціювання

Позначимо $f(x) = u$, $g(x) = v$ – функції, диференційовані у точці $x$.

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(u \cdot v)' = uv' + u'v$
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, якщо $v \neq 0$.

Ці правила можуть бути легко доведені на основі теорем про границі.

# Похідні основних елементарних функцій

| | |
|---|---|
| $C' = 0$ | $(x^m)' = mx^{m-1}$ |
| $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ |
| $(e^x)' = e^x$ | $(a^x)' = a^x \ln a$ |
| $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ | $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ |
| $(\sin x)' = \cos x$ | $(\cos x)' = -\sin x$ |
| $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ | $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ |

# Похідна складеної функції

**Теорема.** *Нехай* $y = f(u)$; $u = g(x)$ *диференційовані у відповідних точках функції, причому область значень функції* $u$ *входить в область визначення функції* $f$. *Тоді* $y' = f'(u) \cdot g'$.

# Похідна складеної функції

**Теорема.** *Нехай* $y = f(u)$; $u = g(x)$ *диференційовані у відповідних точках функції, причому область значень функції* $u$ *входить в область визначення функції* $f$. *Тоді* $y' = f'(u) \cdot g'$.

**Доведення**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta g} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

# Похідна складеної функції

**Теорема.** *Нехай $y = f(u)$; $u = g(x)$ диференційовані у відповідних точках функції, причому область значень функції $u$ входить в область визначення функції $f$. Тоді $y' = f'(u) \cdot g'$.*

**Доведення**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta g} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta g \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta g} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

(з врахуванням того, що якщо $\Delta x \to 0$, то $\Delta u \to 0$, оскільки $u = g(x)$ – неперервна функція)

# Похідна складеної функції

**Теорема.** *Нехай $y = f(u)$; $u = g(x)$ диференційовані у відповідних точках функції, причому область значень функції $u$ входить в область визначення функції $f$. Тоді $y' = f'(u) \cdot g'$.*

**Доведення**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta g} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta g \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta g} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

(з врахуванням того, що якщо $\Delta x \to 0$, то $\Delta u \to 0$, оскільки $u = g(x)$ – неперервна функція)

Тоді $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}g} \cdot \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$.

# Похідна складеної функції

**<u>Теорема.</u>** *Нехай* $y = f(u)$; $u = g(x)$ *диференційовані у відповідних точках функції, причому область значень функції* $u$ *входить в область визначення функції* $f$. *Тоді* $y' = f'(u) \cdot g'$.

**<u>Доведення</u>**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta g} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta g \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta g} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

(з врахуванням того, що якщо $\Delta x \to 0$, то $\Delta u \to 0$, оскільки $u = g(x)$ – неперервна функція)

Тоді $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}g} \cdot \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$. Теорему доведено.

# Приклад

Знайти похідну функції $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$

# Приклад

Знайти похідну функції $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$

**Розв'язання.**

$$y' = \left(\ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)'$$

# Приклад

Знайти похідну функції $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$

**Розв'язання.**

$$y' = \left(\ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

# Приклад

Знайти похідну функції $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$

**Розв'язання.**

$$y' = \left(\ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}$$

# Приклад

Знайти похідну функції $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$

**Розв'язання.**

$$y' = \left(\ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$$

# Приклад

Знайти похідну функції $y = x\cos x\sin x + \dfrac{1}{2}\cos^2 x$.

# Розв'язання

Спочатку перетворимо дану функцію:

$$y = \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x$$

# Розв’язання

Спочатку перетворимо дану функцію:

$$y = \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x$$

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x2\cos 2x + \frac{1}{2}2\cos x(-\sin x)$$

# Розв'язання

Спочатку перетворимо дану функцію:

$$y = \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x$$

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x2\cos 2x + \frac{1}{2}2\cos x(-\sin x) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x - \sin x\cos x$$

# Розв'язання

Спочатку перетворимо дану функцію:

$$y = \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x$$

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x2\cos 2x + \frac{1}{2}2\cos x(-\sin x) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x - \sin x\cos x = x\cos 2x.$$

# Приклад

Знайти похідну функції $y = \dfrac{x^2 e^{x^2}}{x^2 + 1}$.

# Розв'язання

$$y' = \frac{(2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2})(x^2+1) - (2x)x^2e^{x^2}}{(x^2+1)^2}$$

# Розв'язання

$$y' = \frac{(2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2})(x^2+1) - (2x)x^2e^{x^2}}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x^3e^{x^2} + 2x^5e^{x^2} + 2xe^{x^2} + 2x^3e^{x^2} - 2x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2}$$

# Розв'язання

$$y' = \frac{(2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2})(x^2+1) - (2x)x^2e^{x^2}}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x^3e^{x^2} + 2x^5e^{x^2} + 2xe^{x^2} + 2x^3e^{x^2} - 2x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2} = \frac{2xe^{x^2}(x^4+1+x^2)}{(x^2+1)^2}$$

# Приклад

Знайти похідну функції $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{\sin x}$

# Розв'язання

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$$

# Розв'язання

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$$

# Розв'язання

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - \sin x + x\cos x}{\sin^2 x}$$

# Розв'язання

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - \sin x + x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{x\cos x}{\sin^2 x}$$

# Логарифмічна похідна

Розгляньмо функцію $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, \quad \text{при} \quad x > 0 \\ \ln(-x), \quad \text{при} \quad x < 0 \end{cases}.$

# Логарифмічна похідна

Розгляньмо функцію $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{при} \quad x > 0 \\ \ln(-x), & \text{при} \quad x < 0 \end{cases}.$

Маємо: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $\quad (\ln(-x))' = \dfrac{(-x)'}{-x} = \dfrac{1}{x}.$

# Логарифмічна похідна

Розгляньмо функцію $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{при} \quad x > 0 \\ \ln(-x), & \text{при} \quad x < 0 \end{cases}$.

Маємо: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $\quad (\ln(-x))' = \dfrac{(-x)'}{-x} = \dfrac{1}{x}$.

Тоді $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$.

# Логарифмічна похідна

Розгляньмо функцію $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{при} \quad x > 0 \\ \ln(-x), & \text{при} \quad x < 0 \end{cases}$.

Маємо: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $\quad (\ln(-x))' = \dfrac{(-x)'}{-x} = \dfrac{1}{x}$.

Тоді $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$.

З огляду на отриманий результат, можна записати

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

# Логарифмічна похідна

Розгляньмо функцію $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{при} \quad x > 0 \\ \ln(-x), & \text{при} \quad x < 0 \end{cases}$.

Маємо: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $\quad (\ln(-x))' = \dfrac{(-x)'}{-x} = \dfrac{1}{x}$.

Тоді $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$.

З огляду на отриманий результат, можна записати

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Відношення $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ називається **логарифмічною похідною** функції $f(x)$.

# Логарифмічна похідна

Розгляньмо функцію $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{при} \quad x > 0 \\ \ln(-x), & \text{при} \quad x < 0 \end{cases}$.

Маємо: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $\quad (\ln(-x))' = \dfrac{(-x)'}{-x} = \dfrac{1}{x}$.

Тоді $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$.

З огляду на отриманий результат, можна записати

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Відношення $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ називається **логарифмічною похідною** функції $f(x)$.

**Логарифмічне диференціювання**: спочатку знаходять логарифмічну похідну функції, а потім похідну самої функції за формулою

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x)$$

# Логарифмічне диференціювання

**Логарифмічне диференціювання**: спочатку знаходять логарифмічну похідну функції, а потім похідну самої функції за формулою

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x)$$

# Властивості натурального логарифма

$$\ln 1 = 0, \ln e = 1,$$

# Властивості натурального логарифма

$$\ln 1 = 0, \ln e = 1,$$

$$\ln a \cdot b = \ln a + \ln b;$$

# Властивості натурального логарифма

$$\ln 1 = 0, \ln e = 1,$$

$$\ln a \cdot b = \ln a + \ln b;$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b;$$

# Властивості натурального логарифма

$$\ln 1 = 0, \ln e = 1,$$

$$\ln a \cdot b = \ln a + \ln b;$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b;$$

$$\ln a^b = b \ln a.$$

# Логарифмічне диференціювання: Приклад

Знайти похідну від функції $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$.

# Логарифмічне диференціювання: Приклад

Знайти похідну від функції $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$.

**Розв'язання**

- Візьмемо натуральний логарифм від обох частин виразу для $f$. Маємо:

$$\ln f(x) = \ln \sqrt[4]{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2+1}{x^2-1} =$$

# Логарифмічне диференціювання: Приклад

Знайти похідну від функції $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$.

**Розв'язання**

- Візьмемо натуральний логарифм від обох частин виразу для $f$. Маємо:

$$\ln f(x) = \ln \sqrt[4]{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+1}{x^2-1} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{4}\ln(x^2-1).$$

- Диференціюємо обидві частини виразу за $x$:

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{4}(\ln(x^2+1))' - \frac{1}{4}(\ln(x^2-1))' =$$

- Диференціюємо обидві частини виразу за $x$:

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{4}(\ln(x^2+1))' - \frac{1}{4}(\ln(x^2-1))' =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2-1} \cdot 2x.$$

- Користуємося формулою логарифмічного диференціювання:

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x) =$$

- Диференціюємо обидві частини виразу за $x$:

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{4}(\ln(x^2+1))' - \frac{1}{4}(\ln(x^2-1))' =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2-1} \cdot 2x.$$

- Користуємося формулою логарифмічного диференціювання:

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x) =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\left[\frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{x}{2(x^2-1)}\right].$$

# Похідна показниково-степеневої функції

- Функція називається показниковою, якщо незалежна змінна входить у показник степеня, і степеневою, якщо змінна є основою. Якщо ж і основа і показник степеня залежать від змінної, то така функція буде показниково-степеневою.

# Похідна показниково-степеневої функції

- Функція називається показниковою, якщо незалежна змінна входить у показник степеня, і степеневою, якщо змінна є основою. Якщо ж і основа і показник степеня залежать від змінної, то така функція буде показниково-степеневою.
- Нехай $u = f(x)$ і $v = g(x)$ – функції, що мають похідні у точці $x$, $f(x) > 0$.

# Похідна показниково-степеневої функції

- Функція називається показниковою, якщо незалежна змінна входить у показник степеня, і степеневою, якщо змінна є основою. Якщо ж і основа і показник степеня залежать від змінної, то така функція буде показниково-степеневою.
- Нехай $u = f(x)$ і $v = g(x)$ – функції, що мають похідні у точці $x$, $f(x) > 0$.
- Знайдемо похідну функції $y = u^v$.

# Похідна показниково-степеневої функції

- Функція називається показниковою, якщо незалежна змінна входить у показник степеня, і степеневою, якщо змінна є основою. Якщо ж і основа і показник степеня залежать від змінної, то така функція буде показниково-степеневою.
- Нехай $u = f(x)$ і $v = g(x)$ – функції, що мають похідні у точці $x$, $f(x) > 0$.
- Знайдемо похідну функції $y = u^v$.

Логарифмуючи, одержимо:

$$\ln y = v \ln u$$

# Похідна показниково-степеневої функції

- Функція називається показниковою, якщо незалежна змінна входить у показник степеня, і степеневою, якщо змінна є основою. Якщо ж і основа і показник степеня залежать від змінної, то така функція буде показниково-степеневою.
- Нехай $u = f(x)$ і $v = g(x)$ – функції, що мають похідні у точці $x$, $f(x) > 0$.
- Знайдемо похідну функції $y = u^v$.

Логарифмуючи, одержимо:

$$\ln y = v \ln u$$

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u}$$

## Похідна показниково-степеневої функції

- Функція називається показниковою, якщо незалежна змінна входить у показник степеня, і степеневою, якщо змінна є основою. Якщо ж і основа і показник степеня залежать від змінної, то така функція буде показниково-степеневою.
- Нехай $u = f(x)$ і $v = g(x)$ – функції, що мають похідні у точці $x$, $f(x) > 0$.
- Знайдемо похідну функції $y = u^v$.

Логарифмуючи, одержимо:

$$\ln y = v \ln u$$

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u}$$

$$y' = u^v \left( v\frac{u'}{u} + v' \ln u \right)$$

# Похідна показниково-степеневої функції

- Функція називається показниковою, якщо незалежна змінна входить у показник степеня, і степеневою, якщо змінна є основою. Якщо ж і основа і показник степеня залежать від змінної, то така функція буде показниково-степеневою.
- Нехай $u = f(x)$ і $v = g(x)$ – функції, що мають похідні у точці $x$, $f(x) > 0$.
- Знайдемо похідну функції $y = u^v$.

Логарифмуючи, одержимо:

$$\ln y = v \ln u$$

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u}$$

$$y' = u^v \left( v \frac{u'}{u} + v' \ln u \right)$$

$$(u^v)' = v u^{v-1} u' + u^v v' \ln u$$

# Похідна показниково-степеневої функції: Приклад

Знайти похідну функції $f(x) = (x^2 + 3x)^{x\cos x}$.

**Розв'язування**

Маємо: $u = x^2 + 3x; v = x\cos x$.

# Похідна показниково-степеневої функції: Приклад

Знайти похідну функції $f(x) = (x^2 + 3x)^{x \cos x}$.

**Розв'язування**

Маємо: $u = x^2 + 3x; v = x \cos x$. Похідні цих функцій:

$$u' = 2x + 3; \quad v' = \cos x - x \sin x.$$

# Похідна показниково-степеневої функції: Приклад

Знайти похідну функції $f(x) = (x^2 + 3x)^{x \cos x}$.

**Розв'язування**

Маємо: $u = x^2 + 3x; v = x \cos x$. Похідні цих функцій:

$$u' = 2x + 3; \quad v' = \cos x - x \sin x.$$

За отриманою вище формулою

$$f'(x) = x \cos x \cdot (x^2 + 3x)^{x \cos x - 1} \cdot (2x + 3) +$$

$$+ (x^2 + 3x)^{x \cos x} (\cos x - x \sin x) \ln(x^2 + 3x)$$

# Функції, які задано неявним чином

**Означення**

Якщо змінна $x$ і її функція $y = y(x)$ пов'язані між собою рівнянням

$$F(x, y) = 0,$$

то функцію $y(x)$ називають *заданою неявним чином.*

# Функції, які задано неявним чином

**Означення**

Якщо змінна $x$ і її функція $y = y(x)$ пов'язані між собою рівнянням

$$F(x, y) = 0,$$

то функцію $y(x)$ називають *заданою неявним чином.*

**Приклад**

$$y^3 - 3\sin xy + \operatorname{tg} x - 4 = 0$$

# Диференціювання функції, заданої неявним чином

Диференціювання функції, заданої неявним чином, виконують у два кроки:

- Диференціюють обидві частини виразу $F(x, y) = 0$ за $x$, враховуючи правила диференціювання складеної функції і те, що $y = y(x)$.

# Диференціювання функції, заданої неявним чином

Диференціювання функції, заданої неявним чином, виконують у два кроки:

- Диференціюють обидві частини виразу $F(x, y) = 0$ за $x$, враховуючи правила диференціювання складеної функції і те, що $y = y(x)$.
- Знаходять з отриманого рівняння $y'(x)$.

# Диференціювання функції, заданої неявним чином: Приклад

Знайти похідну функції $y$, якщо $y^3 - 3\sin xy + \operatorname{tg} x - 4 = 0$.

# Диференціювання функції, заданої неявним чином: Приклад

Знайти похідну функції $y$, якщо $y^3 - 3\sin xy + \operatorname{tg} x - 4 = 0$.

**Розв'язування**

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$3y^2 \cdot y' - 3\cos xy \cdot (y + xy') + \frac{1}{\cos^2 x} = 0.$$

# Диференціювання функції, заданої неявним чином: Приклад

Знайти похідну функції $y$, якщо $y^3 - 3\sin xy + \operatorname{tg} x - 4 = 0$.

**Розв'язування**

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$3y^2 \cdot y' - 3\cos xy \cdot (y + xy') + \frac{1}{\cos^2 x} = 0.$$

Звідки

$$y'(3y^2 - 3x\cos xy) = 3y\cos xy - \frac{1}{\cos^2 x}.$$

# Диференціювання функції, заданої неявним чином: Приклад

Знайти похідну функції $y$, якщо $y^3 - 3\sin xy + \operatorname{tg} x - 4 = 0$.

**Розв'язування**

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$3y^2 \cdot y' - 3\cos xy \cdot (y + xy') + \frac{1}{\cos^2 x} = 0.$$

Звідки

$$y'(3y^2 - 3x\cos xy) = 3y\cos xy - \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Тому

$$y' = \frac{3y\cos xy - \dfrac{1}{\cos^2 x}}{(3y^2 - 3x\cos xy)}.$$