Поверхні другого порядку

Загальне рівняння поверхні другого порядку

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

Класифікація поверхонь другого порядку

Подібно до кривих другого порядку, загальне рівняння поверхні другого порядку можна за допомогою повороту осей координатної системи на перенесення початку координат привести до канонічного вигляду.

Циліндри

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \textit{еліптичний циліндр;}$$

Циліндри

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — \textit{еліптичний циліндр;}}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — \textit{гіперболічний циліндр;}}$$

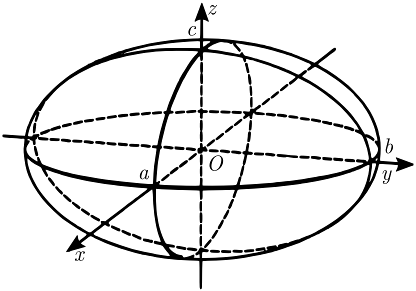
Циліндри

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — *еліптичний циліндр;*

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — *гіперболічний циліндр;*

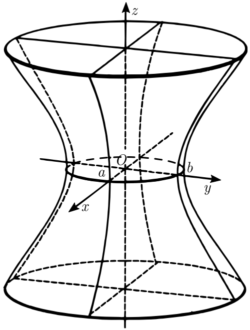
$y^2 = 2px$ — *параболічний циліндр.*

Еліпсоїд



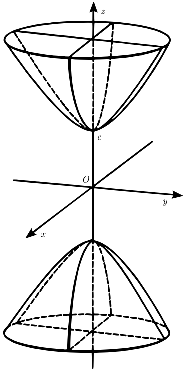
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Однопорожнинний гіперболоїд



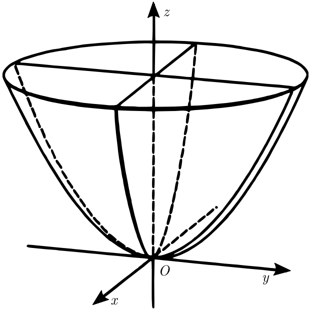
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Двопорожнинний гіперболоїд



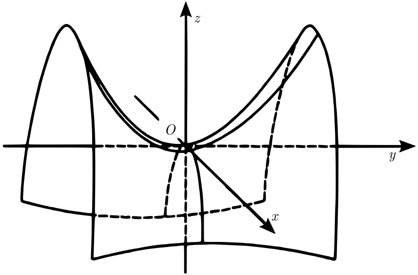
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Еліптичний параболоїд



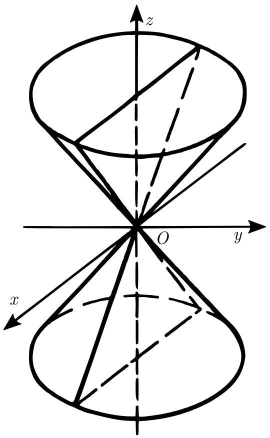
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

Гіперболічний параболоїд



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

Конус



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку

Однопорожнинний гіперболоїд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку

Однопорожнинний гіперболоїд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}.$$

Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку

Однопорожнинний гіперболоїд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}.$$

Застосовуємо формулу різниці квадратів:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right).$$

Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку

Однопорожнинний гіперболоїд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}.$$

Застосовуємо формулу різниці квадратів:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right).$$

Два сімейства прямих, заданих у формі перетину двох площин:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = u\left(1 + \frac{y}{b}\right); \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{u}\left(1 - \frac{y}{b}\right); \end{cases} \text{та} \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{v}\left(1 + \frac{y}{b}\right); \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = v\left(1 - \frac{y}{b}\right), \end{cases}$$

де u та v – довільні числа.

Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку

Ці прямі повністю належать поверхні, називаються *прямолінійними твірними* і мають такі властивості: усі прямі одного сімейства є мимобіжними, усі прямі різних сімейств перетинаються.

Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку

Рівняння гіперболічного параболоїда:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку

Рівняння гіперболічного параболоїда:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Застосовуємо формулу різниці квадратів:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2 \cdot z.$$

Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку

Рівняння гіперболічного параболоїда:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Застосовуємо формулу різниці квадратів:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2 \cdot z.$$

Рівняння прямолінійних твірних:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2u; \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{z}{u}; \end{cases} \text{та} \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2v; \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{v}. \end{cases}$$

Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку

Прямолінійні твірні гіперболічного параболоїда мають такі властивості: усі прямі одного сімейства є мимобіжними, усі прямі різних сімейств перетинаються, усі прямі одного сімейства паралельні до однієї спільної площини.

Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку

Прямолінійні твірні гіперболічного параболоїда мають такі властивості: усі прямі одного сімейства є мимобіжними, усі прямі різних сімейств перетинаються, усі прямі одного сімейства паралельні до однієї спільної площини.

Розташовуючи силові елементи конструкцій (прямолінійні стандартні балки) за прямолінійними напрямними можна побудувати ефектні та дешеві інженерні конструкції, розрахунок яких стандартними методами не викликатиме ніяких проблем.

Класифікація поверхонь другого порядку за допомогою інваріантів

Інваріантами рівнянь поверхонь другого порядку є

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33};$$

Класифікація поверхонь другого порядку за допомогою інваріантів

Інваріантами рівнянь поверхонь другого порядку є

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}; I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix};$$

Класифікація поверхонь другого порядку за допомогою інваріантів

Інваріантами рівнянь поверхонь другого порядку є

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}; I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}; I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Класифікація поверхонь другого порядку за допомогою інваріантів

Для аналізу належності поверхні до певного типу використовується матриця з коефіцієнтів квадратичної форми загального рівняння поверхні:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

та її власні числа, λ_1, λ_2 та λ_3 (власні вектори задають напрямки повернутих осей координатної системи). Нижче наведено результати такої класифікації.

Класифікація поверхонь другого порядку за допомогою інваріантів

Умова	Рівняння	Назва поверхні
$I_4 \neq 0; I_3 \neq 0$	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + \dfrac{I_4}{I_3} = 0$	Еліпсоїд, однопорожнинний або двопорожнинний гіперболоїд

Класифікація поверхонь другого порядку за допомогою інваріантів

Умова	Рівняння	Назва поверхні
$I_4 \neq 0; I_3 \neq 0$	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + \dfrac{I_4}{I_3} = 0$	Еліпсоїд, однопорожнинний або двопорожнинний гіперболоїд
$I_4 \neq 0; I_3 = 0$	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 \pm \sqrt{-\dfrac{I_4}{\lambda_1 \lambda_2}} z_1 = 0$	Еліптичний або гіперболічний параболоїд

Класифікація поверхонь другого порядку за допомогою інваріантів

Умова	Рівняння	Назва поверхні
$I_4 \neq 0; I_3 \neq 0$	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0$	Еліпсоїд, однопорожнинний або двопорожнинний гіперболоїд
$I_4 \neq 0; I_3 = 0$	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 \pm \sqrt{-\frac{I_4}{\lambda_1 \lambda_2}} z_1 = 0$	Еліптичний або гіперболічний параболоїд
$I_4 = 0; I_3 \neq 0$	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 = 0$	Конус або точка $(0; 0; 0)$

Класифікація поверхонь другого порядку за допомогою інваріантів

Умова	Рівняння	Назва поверхні
$I_4 \neq 0; I_3 \neq 0$	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + \dfrac{I_4}{I_3} = 0$	Еліпсоїд, однопорожнинний або двопорожнинний гіперболоїд
$I_4 \neq 0; I_3 = 0$	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 \pm \sqrt{-\dfrac{I_4}{\lambda_1 \lambda_2}} z_1 = 0$	Еліптичний або гіперболічний параболоїд
$I_4 = 0; I_3 \neq 0$	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 = 0$	Конус або точка $(0; 0; 0)$
$I_4 = 0; I_3 = 0;$ $\lambda_1 \neq 0; \lambda_2 \neq 0; \lambda_3 = 0$	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + a'_{44} = 0$	$a'_{44} \neq 0$ — еліптичний або гіперболічний циліндр

Класифікація поверхонь другого порядку за допомогою інваріантів

Умова	Рівняння	Назва поверхні
$I_4 \neq 0; I_3 \neq 0$	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0$	Еліпсоїд, однопорожнинний або двопорожнинний гіперболоїд
$I_4 \neq 0; I_3 = 0$	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 \pm \sqrt{-\frac{I_4}{\lambda_1 \lambda_2}} z_1 = 0$	Еліптичний або гіперболічний параболоїд
$I_4 = 0; I_3 \neq 0$	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 = 0$	Конус або точка $(0;0;0)$
$I_4 = 0; I_3 = 0;$ $\lambda_1 \neq 0; \lambda_2 \neq 0; \lambda_3 = 0$	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + a'_{44} = 0$	$a'_{44} \neq 0$ — еліптичний або гіперболічний циліндр
		$a'_{44} = 0$ — пара площин або пряма
$I_4 = 0; I_3 = 0;$ $\lambda_1 \neq 0; \lambda_2 = \lambda_3 = 0$	$\lambda_1 x_1^2 + a'_{44} z = 0$ або	Параболічний циліндр

Класифікація поверхонь другого порядку за допомогою інваріантів

Умова	Рівняння	Назва поверхні
$I_4 \neq 0; I_3 \neq 0$	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + \dfrac{I_4}{I_3} = 0$	Еліпсоїд, однопорожнинний або двопорожнинний гіперболоїд
$I_4 \neq 0; I_3 = 0$	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 \pm \sqrt{-\dfrac{I_4}{\lambda_1 \lambda_2}} z_1 = 0$	Еліптичний або гіперболічний параболоїд
$I_4 = 0; I_3 \neq 0$	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 = 0$	Конус або точка $(0;0;0)$
$I_4 = 0; I_3 = 0;$ $\lambda_1 \neq 0; \lambda_2 \neq 0; \lambda_3 = 0$	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + a'_{44} = 0$	$a'_{44} \neq 0$ — еліптичний або гіперболічний циліндр
		$a'_{44} = 0$ — пара площин або пряма
$I_4 = 0; I_3 = 0;$ $\lambda_1 \neq 0; \lambda_2 = \lambda_3 = 0$	$\lambda_1 x_1^2 + a'_{44} z = 0$ або	Параболічний циліндр
	$\lambda_1 x_1^2 + a'_{44} = 0$	Пара площин

Приклад

Намалювати ескіз поверхні другого порядку

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 1.$$

Розв'язання

Скористаємося методом перерізів.

Розв'язання

Скористаємося методом перерізів.

Переріз поверхні площиною xOy знайдемо підставивши до рівняння поверхні $z = 0$: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Це рівняння еліпса.

Розв'язання

Скористаємося методом перерізів.

Переріз поверхні площиною xOy знайдемо підставивши до рівняння поверхні $z = 0$: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Це рівняння еліпса.

Для перерізу площиною площиною xOz $(y = 0)$ маємо $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{z^2}{25} = 1$ — гіпербола.

Розв'язання

Скористаємося методом перерізів.

Переріз поверхні площиною xOy знайдемо підставивши до рівняння поверхні $z = 0$: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Це рівняння еліпса.

Для перерізу площиною площиною xOz $(y = 0)$ маємо $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{z^2}{25} = 1$ — гіпербола.

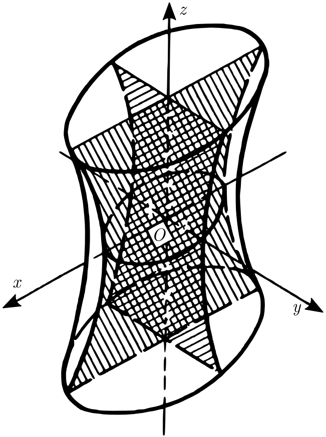
Для перерізу площиною yOz $(x = 0)$ — $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{25} = 1$ — теж гіпербола.

Розв'язання

Малюємо відповідні криві другого порядку на координатних площинах і за ними будуємо ескіз поверхні.

Розв'язання

Малюємо відповідні криві другого порядку на координатних площинах і за ними будуємо ескіз поверхні.



Приклад

Знайти точки перетину поверхні $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = z$ та прямої $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{2}$.

Розв'язання

Перепишемо рівняння прямої у параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = 3t; \\ y = 2 - 2t; \\ z = -1 + 2t. \end{cases}$$

Розв'язання

Перепишемо рівняння прямої у параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = 3t; \\ y = 2 - 2t; \\ z = -1 + 2t. \end{cases}$$

Якщо точка $M\left(x; y; z\right)$ належить є точкою перетину поверхні та прямої, її координати мають одночасно задовольняти вказану вище систему рівнянь для прямої та рівняння поверхні. Отже, підставивши вирази для x, y та z до рівняння поверхні, матимемо:

Розв'язання

Перепишемо рівняння прямої у параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = 3t; \\ y = 2 - 2t; \\ z = -1 + 2t. \end{cases}$$

Якщо точка $M\left(x; y; z\right)$ належить є точкою перетину поверхні та прямої, її координати мають одночасно задовольняти вказану вище систему рівнянь для прямої та рівняння поверхні. Отже, підставивши вирази для x, y та z до рівняння поверхні, матимемо:

$$\frac{\left(3t\right)^2}{9} - \frac{\left(2-2t\right)^2}{4} = -1 + 2t$$

Розв'язання

Перепишемо рівняння прямої у параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = 3t; \\ y = 2 - 2t; \\ z = -1 + 2t. \end{cases}$$

Якщо точка $M\left(x; y; z\right)$ належить є точкою перетину поверхні та прямої, її координати мають одночасно задовольняти вказану вище систему рівнянь для прямої та рівняння поверхні. Отже, підставивши вирази для x, y та z до рівняння поверхні, матимемо:

$$\frac{\left(3t\right)^2}{9} - \frac{\left(2-2t\right)^2}{4} = -1 + 2t$$

або

$$0 = 0.$$

Розв'язання

Отже, рівняння задовольняється за будь-яких значень t, тобто пряма повністю належить поверхні (є прямолінійною твірною).

Приклад

Визначити за рівнянням $3x^2 + 3y^2 + z^2 + 4xz - 4yz + 6x + 4y - 8z + 10 = 0$ тип поверхні другого порядку, яка задається цим рівнянням, та вектори-напрямки осей у перетвореній системі координат.

Розв'язання

Скористаємося інваріантами квадратичної форми рівняння. Відповідна матриця квадратичної форми у цьому випадку матиме вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Скористаємося інваріантами квадратичної форми рівняння. Відповідна матриця квадратичної форми у цьому випадку матиме вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Власні значення і власні вектори цієї матриці можна знайти за допомогою системи комп'ютерної алгебри (наприклад Maxima).

Розв'язання

Скористаємося інваріантами квадратичної форми рівняння. Відповідна матриця квадратичної форми у цьому випадку матиме вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Власні значення і власні вектори цієї матриці можна знайти за допомогою системи комп'ютерної алгебри (наприклад Maxima). $\lambda_1 = 5$ (одиничний власний вектор — $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$); $\lambda_1 = 3$ (одиничний власний вектор — $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$) та $\lambda_3 = -1$ (одиничний власний вектор — $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$).
$I_3 = -15$; $I_4 = -281$.

Розв'язання

Отже, за таблицею маємо справу з двопорожнинним гіперболоїдом з рівнянням у перетвореній системі координат

$$5{x'}_1^2 + 3{y'}_1^2 - {z'}_1^2 + \frac{281}{15} = 0.$$

Розв'язання

Отже, за таблицею маємо справу з двопорожнинним гіперболоїдом з рівнянням у перетвореній системі координат

$$5{x'}_1^2 + 3{y'}_1^2 - {z'}_1^2 + \frac{281}{15} = 0.$$

Напрями осей повернутої системи координат визначаються знайденими власними векторами.