Рівняння площини у просторі

Загальне рівняння площини

Означення. **Площиною** називається поверхня, всі точки якої задовольняють загальному рівнянню:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

де A, B, C – координати вектора $\overrightarrow{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ – вектор **нормалі** до площини.

Окремі випадки

- $A = 0$ – площина паралельна осі Ox

Окремі випадки

- $A = 0$ – площина паралельна осі Ox
- $B = 0$ – площина паралельна осі Oy

Окремі випадки

- $A = 0$ – площина паралельна осі Ox
- $B = 0$ – площина паралельна осі Oy
- $C = 0$ – площина паралельна осі Oz

Окремі випадки

- $A = 0$ – площина паралельна осі Ox
- $B = 0$ – площина паралельна осі Oy
- $C = 0$ – площина паралельна осі Oz
- $D = 0$ – площина проходить через початок координат

Окремі випадки

- $A = 0$ – площина паралельна осі Ox
- $B = 0$ – площина паралельна осі Oy
- $C = 0$ – площина паралельна осі Oz
- $D = 0$ – площина проходить через початок координат
- $A = B = 0$ – площина паралельна площині xOy

Окремі випадки

- $A = 0$ – площина паралельна осі Ox
- $B = 0$ – площина паралельна осі Oy
- $C = 0$ – площина паралельна осі Oz
- $D = 0$ – площина проходить через початок координат
- $A = B = 0$ – площина паралельна площині xOy
- $A = C = 0$ – площина паралельна площині xOz

Окремі випадки

- $A = 0$ – площина паралельна осі Ox
- $B = 0$ – площина паралельна осі Oy
- $C = 0$ – площина паралельна осі Oz
- $D = 0$ – площина проходить через початок координат
- $A = B = 0$ – площина паралельна площині xOy
- $A = C = 0$ – площина паралельна площині xOz
- $B = C = 0$ – площина паралельна площини yOz

Окремі випадки

- $A = 0$ – площина паралельна осі Ox
- $B = 0$ – площина паралельна осі Oy
- $C = 0$ – площина паралельна осі Oz
- $D = 0$ – площина проходить через початок координат
- $A = B = 0$ – площина паралельна площині xOy
- $A = C = 0$ – площина паралельна площині xOz
- $B = C = 0$ – площина паралельна площини yOz
- $A = D = 0$ – площина проходить через вісь Ox

Окремі випадки

- $A = 0$ – площина паралельна осі Ox
- $B = 0$ – площина паралельна осі Oy
- $C = 0$ – площина паралельна осі Oz
- $D = 0$ – площина проходить через початок координат
- $A = B = 0$ – площина паралельна площині xOy
- $A = C = 0$ – площина паралельна площині xOz
- $B = C = 0$ – площина паралельна площини yOz
- $A = D = 0$ – площина проходить через вісь Ox
- $B = D = 0$ – площина проходить через вісь Oy

Окремі випадки

- $A = 0$ – площина паралельна осі Ox
- $B = 0$ – площина паралельна осі Oy
- $C = 0$ – площина паралельна осі Oz
- $D = 0$ – площина проходить через початок координат
- $A = B = 0$ – площина паралельна площині xOy
- $A = C = 0$ – площина паралельна площині xOz
- $B = C = 0$ – площина паралельна площини yOz
- $A = D = 0$ – площина проходить через вісь Ox
- $B = D = 0$ – площина проходить через вісь Oy
- $C = D = 0$ – площина проходить через вісь Oz

Окремі випадки

- $A = 0$ – площина паралельна осі Ox
- $B = 0$ – площина паралельна осі Oy
- $C = 0$ – площина паралельна осі Oz
- $D = 0$ – площина проходить через початок координат
- $A = B = 0$ – площина паралельна площині xOy
- $A = C = 0$ – площина паралельна площині xOz
- $B = C = 0$ – площина паралельна площини yOz
- $A = D = 0$ – площина проходить через вісь Ox
- $B = D = 0$ – площина проходить через вісь Oy
- $C = D = 0$ – площина проходить через вісь Oz
- $A = B = D = 0$ – площина збігається із площиною xOy

Окремі випадки

- $A = 0$ – площина паралельна осі Ox
- $B = 0$ – площина паралельна осі Oy
- $C = 0$ – площина паралельна осі Oz
- $D = 0$ – площина проходить через початок координат
- $A = B = 0$ – площина паралельна площині xOy
- $A = C = 0$ – площина паралельна площині xOz
- $B = C = 0$ – площина паралельна площини yOz
- $A = D = 0$ – площина проходить через вісь Ox
- $B = D = 0$ – площина проходить через вісь Oy
- $C = D = 0$ – площина проходить через вісь Oz
- $A = B = D = 0$ – площина збігається із площиною xOy
- $A = C = D = 0$ – площина збігається із площиною xOz

Окремі випадки

- $A = 0$ – площина паралельна осі Ox
- $B = 0$ – площина паралельна осі Oy
- $C = 0$ – площина паралельна осі Oz
- $D = 0$ – площина проходить через початок координат
- $A = B = 0$ – площина паралельна площині xOy
- $A = C = 0$ – площина паралельна площині xOz
- $B = C = 0$ – площина паралельна площини yOz
- $A = D = 0$ – площина проходить через вісь Ox
- $B = D = 0$ – площина проходить через вісь Oy
- $C = D = 0$ – площина проходить через вісь Oz
- $A = B = D = 0$ – площина збігається із площиною xOy
- $A = C = D = 0$ – площина збігається із площиною xOz
- $B = C = D = 0$ – площина збігається із площиною yOz

Рівняння площини, що проходить через три точки

Нехай $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ лежать в одній площині.

Рівняння площини, що проходить через три точки

Нехай $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ лежать в одній площині.
Щоб довільна точка $M(x, y, z)$ лежала в одній площині із точками M_1, M_2, M_3, необхідно, щоб вектори $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}$ були компланарні.

Рівняння площини, що проходить через три точки

Нехай $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ лежать в одній площині.
Щоб довільна точка $M(x, y, z)$ лежала в одній площині із точками M_1, M_2, M_3, необхідно, щоб вектори $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}$ були компланарні.

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}) = 0$$

Рівняння площини, що проходить через три точки

Нехай $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ лежать в одній площині.
Щоб довільна точка $M(x, y, z)$ лежала в одній площині із точками M_1, M_2, M_3, необхідно, щоб вектори $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}$ були компланарні.

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}) = 0$$

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$$

Рівняння площини, що проходить через три точки

Нехай $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ лежать в одній площині.
Щоб довільна точка $M(x, y, z)$ лежала в одній площині із точками M_1, M_2, M_3, необхідно, щоб вектори $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}$ були компланарні.

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}) = 0$$

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Рівняння площини за двома точками і вектором, паралельним до площини

Нехай маємо $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Рівняння площини за двома точками і вектором, паралельним до площини

Нехай маємо $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Вектори $\begin{array}{l} \overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\} \\ \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\} \end{array}$ і вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ мають бути компланарні, тобто

$$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}) = 0$$

Рівняння площини за двома точками і вектором, паралельним до площини

Нехай маємо $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Вектори $\begin{array}{l} \overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\} \\ \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\} \end{array}$ і вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ мають бути компланарні, тобто

$$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Рівняння площини за однією точкою і двома векторами, колінеарними площині

Нехай задані два вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, колінеарні площині. Тоді для довільної точки $M(x,\, y,\, z)$, що належить площині, вектори $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{MM_1}$ повинні бути компланарні.

Рівняння площини за однією точкою і двома векторами, колінеарними площині

Нехай задані два вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, колінеарні площині. Тоді для довільної точки $M(x,\ y,\ z)$, що належить площині, вектори $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{MM_1}$ повинні бути компланарні. Рівняння площини:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Рівняння площини за точкою та вектором нормалі

Теорема. *Якщо у просторі задана точка* $M_0(x_0, y_0, z_0)$, *то рівняння площини, що проходить через точку* M_0 *перпендикулярно вектору нормалі* $\overrightarrow{N} = (A, B, C)$ *має вигляд:*

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Рівняння площини за точкою та вектором нормалі

Теорема. *Якщо у просторі задана точка* $M_0(x_0, y_0, z_0)$, *то рівняння площини, що проходить через точку* M_0 *перпендикулярно вектору нормалі* $\overrightarrow{N} = (A, B, C)$ *має вигляд:*

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Доведення. Для довільної точки $M(x, y, z)$, що належить площині, складемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Оскільки вектор $\overrightarrow{N}$ – вектор нормалі, то він перпендикулярний площині, а отже, перпендикулярний і вектору $\overrightarrow{M_0M}$. Тоді скалярний добуток

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{N} = 0$$

Рівняння площини за точкою та вектором нормалі

Теорема. *Якщо у просторі задана точка* $M_0(x_0, y_0, z_0)$*, то рівняння площини, що проходить через точку* M_0 *перпендикулярно вектору нормалі* $\overrightarrow{N} = (A, B, C)$ *має вигляд:*

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Доведення. Для довільної точки $M(x, y, z)$, що належить площині, складемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Оскільки вектор $\overrightarrow{N}$ – вектор нормалі, то він перпендикулярний площині, а отже, перпендикулярний і вектору $\overrightarrow{M_0M}$.
Тоді скалярний добуток

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{N} = 0$$

Таким чином, одержуємо рівняння площини

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Теорему доведено.

Рівняння площини у відрізках

Загальне рівняння

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Рівняння площини у відрізках

Загальне рівняння

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Ділимо на $-D$:

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z - 1 = 0$$

Рівняння площини у відрізках

Загальне рівняння

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Ділимо на $-D$:

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z - 1 = 0$$

Позначаємо $-\dfrac{D}{A} = a, \quad -\dfrac{D}{B} = b, \quad -\dfrac{D}{C} = c$, одержуємо рівняння площини у відрізках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Рівняння площини у відрізках

Загальне рівняння

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Ділимо на $-D$:

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z - 1 = 0$$

Позначаємо $-\dfrac{D}{A} = a, \quad -\dfrac{D}{B} = b, \quad -\dfrac{D}{C} = c$, одержуємо рівняння площини у відрізках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Числа a, b, c є координатами точок перетину площини відповідно з осями x, y, z.

Рівняння площини у векторній формі

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = p,$$

де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радіус-вектор поточної точки $M(x, y, z)$, $\vec{n} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ – одиничний вектор, що має напрямок перпендикуляра, опущеного на площину з початку координат.

Рівняння площини у векторній формі

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = p,$$

де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радіус-вектор поточної точки $M(x, y, z)$,
$\vec{n} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ – одиничний вектор, що має напрямок перпендикуляра, опущеного на площину з початку координат.
α, β і γ – кути, утворені цим вектором з осями x, y, z.
p – довжина цього перпендикуляра.

Рівняння площини у векторній формі

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = p,$$

де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радіус-вектор поточної точки $M(x, y, z)$,
$\vec{n} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ – одиничний вектор, що має напрямок перпендикуляра, опущеного на площину з початку координат.
α, β і γ – кути, утворені цим вектором з осями x, y, z.
p – довжина цього перпендикуляра.
У координатах це рівняння має вигляд:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

Рівняння площини у векторній формі

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = p,$$

де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радіус-вектор поточної точки $M(x, y, z)$,
$\vec{n} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ – одиничний вектор, що має напрямок перпендикуляра, опущеного на площину з початку координат.
α, β і γ – кути, утворені цим вектором з осями x, y, z.
p – довжина цього перпендикуляра.
У координатах це рівняння має вигляд:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

Останнє рівняння називається *нормальним рівнянням площини*.

Відстань від точки до площини

Відстань від довільної точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ дорівнює:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Приклад

Знайти рівняння площини, знаючи, що точка $P(4; -3; 12)$ – основа перпендикуляра, опущеного з початку координат на цю площину.

Розв'язання

$$\overrightarrow{OP} = (4; -3; 12); \quad \left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{16 + 9 + 144} = \sqrt{169} = 13;$$

$$\overrightarrow{N} = \left(\frac{4}{13}; -\frac{3}{13}; \frac{12}{13}\right)$$

Розв'язання

$$\overrightarrow{OP} = (4; -3; 12); \quad \left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{16 + 9 + 144} = \sqrt{169} = 13;$$
$$\overrightarrow{N} = \left(\frac{4}{13}; -\frac{3}{13}; \frac{12}{13}\right)$$

Таким чином, $A = 4/13$; $B = -3/13$; $C = 12/13$, скористаємося формулою:

Розв'язання

$$\overrightarrow{OP} = (4; -3; 12); \quad \left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{16+9+144} = \sqrt{169} = 13;$$

$$\overrightarrow{N} = \left(\frac{4}{13}; -\frac{3}{13}; \frac{12}{13}\right)$$

Таким чином, $A = 4/13$; $B = -3/13$; $C = 12/13$, скористаємося формулою:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

$$\frac{4}{13}(x-4) - \frac{3}{13}(y+3) + \frac{12}{13}(z-12) = 0$$

Розв'язання

$$\overrightarrow{OP} = (4; -3; 12); \quad \left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{16 + 9 + 144} = \sqrt{169} = 13;$$
$$\overrightarrow{N} = \left(\frac{4}{13}; -\frac{3}{13}; \frac{12}{13}\right)$$

Таким чином, $A = 4/13$; $B = -3/13$; $C = 12/13$, скористаємося формулою:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$
$$\frac{4}{13}(x - 4) - \frac{3}{13}(y + 3) + \frac{12}{13}(z - 12) = 0$$

$$\frac{4}{13}x - \frac{16}{13} - \frac{3}{13}y - \frac{9}{13} + \frac{12}{13}z - \frac{144}{13} = 0$$
$$\frac{4}{13}x - \frac{3}{13}y + \frac{12}{13}z - \frac{169}{13} = 0$$
$$4x - 3y + 12z - 169 = 0.$$

Приклад

Знайти рівняння площини, що проходить через дві точки $P(2;0;-1)$ і $Q(1;-1;3)$ перпендикулярно площини $3x+2y-z+5=0$.

Розв'язання

Вектор нормалі до площини $3x + 2y - z + 5 = 0$, $\overrightarrow{N} = (3; 2; -1)$ паралельний до шуканої площини.

Розв'язання

Вектор нормалі до площини $3x + 2y - z + 5 = 0$, $\overrightarrow{N} = (3; 2; -1)$ паралельний до шуканої площини.
Одержуємо:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z+1 \\ 1-2 & -1-0 & 3+1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)(1-8) - y(1-12) + (z+1)(-2+3) = 0$$

$$-7(x-2) + 11y + (z+1) = 0$$

$$-7x + 14 + 11y + z + 1 = 0$$

$$-7x + 11y + z + 15 = 0$$

Приклад

Знайти рівняння площини, що проходить через точки $A(2, -1, 4)$ і $B(3, 2, -1)$ перпендикулярно площини $x + y + 2z - 3 = 0$.

Розв'язання

Шукане рівняння площини має вигляд: $Ax + By + Cz + D = 0$, вектор нормалі до цієї площини $\overrightarrow{n_1} = (A, B, C)$. Вектор $\overrightarrow{AB} = (1, 3, -5)$ належить площині. Задана нам площина, перпендикулярна шуканої має вектор нормалі $\overrightarrow{n_2} = (1, 1, 2)$. Оскільки точки A та B належать обом площинам, а площини взаємно перпендикулярні, то

$$\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 11\vec{i} - 7\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Розв'язання

Шукане рівняння площини має вигляд: $Ax + By + Cz + D = 0$, вектор нормалі до цієї площини $\vec{n_1} = (A, B, C)$. Вектор $\overrightarrow{AB} = (1, 3, -5)$ належить площині. Задана нам площина, перпендикулярна шуканої має вектор нормалі $\vec{n_2} = (1, 1, 2)$. Оскільки точки A та B належать обом площинам, а площини взаємно перпендикулярні, то

$$\vec{n_1} = \overrightarrow{AB} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 11\vec{i} - 7\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Таким чином, вектор нормалі $\vec{n_1} = (11, -7, -2)$. Оскільки точка A належить шуканій площині, то її координати повинні задовольняти рівнянню цієї площини, тобто $11 \cdot 2 + 7 \cdot 1 - 2 \cdot 4 + D = 0$; $D = -21$.

Розв'язання

Шукане рівняння площини має вигляд: $Ax + By + Cz + D = 0$, вектор нормалі до цієї площини $\overrightarrow{n_1} = (A, B, C)$. Вектор $\overrightarrow{AB} = (1, 3, -5)$ належить площині. Задана нам площина, перпендикулярна шуканої має вектор нормалі $\overrightarrow{n_2} = (1, 1, 2)$. Оскільки точки A та B належать обом площинам, а площини взаємно перпендикулярні, то

$$\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 11\vec{i} - 7\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Таким чином, вектор нормалі $\overrightarrow{n_1} = (11, -7, -2)$. Оскільки точка A належить шуканій площині, то її координати повинні задовольняти рівнянню цієї площини, тобто $11 \cdot 2 + 7 \cdot 1 - 2 \cdot 4 + D = 0$; $D = -21$.
Отже, одержуємо рівняння площини: $11x - 7y - 2z - 21 = 0$.

Приклад

Знайти рівняння площини, знаючи, що точка $P(4, -3, 12)$ – основа перпендикуляра, опущеного з початку координат на цю площину.

Розв'язання

Знаходимо координати вектора нормалі $\overrightarrow{OP}$= (4, –3, 12). Шукане рівняння площини має вигляд: $4x - 3y + 12z + D = 0$. Для знаходження коефіцієнта D підставимо в рівняння координати точки P:

$$16 + 9 + 144 + D = 0$$

$$D = -169$$

Розв'язання

Знаходимо координати вектора нормалі $\overrightarrow{OP} = (4, –3, 12)$. Шукане рівняння площини має вигляд: $4x - 3y + 12z + D = 0$. Для знаходження коефіцієнта D підставимо в рівняння координати точки P:

$$16 + 9 + 144 + D = 0$$

$$D = -169$$

Разом, одержуємо шукане рівняння: $4x - 3y + 12z - 169 = 0$.

Приклад

Дано координати вершин піраміди $A_1(1; 0; 3)$, $A_2(2; -1; 3)$, $A_3(2; 1; 1)$, $A_4(1; 2; 5)$.

- Знайти довжину ребра A_1A_2.

Приклад

Дано координати вершин піраміди $A_1(1;0;3)$, $A_2(2;-1;3)$, $A_3(2;1;1)$, $A_4(1;2;5)$.

- Знайти довжину ребра A_1A_2.

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \{2-1; -1-0; 3-3\} = \{1; -1; 0\}\,; \quad \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}(\text{од}).$$

Приклад

Дано координати вершин піраміди $A_1(1;0;3)$, $A_2(2;-1;3)$, $A_3(2;1;1)$, $A_4(1;2;5)$.

- Знайти довжину ребра A_1A_2.

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \{2-1; -1-0; 3-3\} = \{1; -1; 0\}\,; \quad \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}(\text{од}).$$

- Знайти кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4.

Приклад

Дано координати вершин піраміди $A_1(1;0;3)$, $A_2(2;-1;3)$, $A_3(2;1;1)$, $A_4(1;2;5)$.

- Знайти довжину ребра A_1A_2.

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \{2-1; -1-0; 3-3\} = \{1; -1; 0\}\,; \quad \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}(\text{од}).$$

- Знайти кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4.

$$\overrightarrow{A_1A_4} = \{1-1; 2-0; 5-3\} = \{0; 2; 2\}$$
$$\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| = 2\sqrt{2}(\text{од})$$
$$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = (1;-1;0)(0;2;2) = -2;$$

Приклад

Дано координати вершин піраміди $A_1(1;0;3)$, $A_2(2;-1;3)$, $A_3(2;1;1)$, $A_4(1;2;5)$.

- Знайти довжину ребра A_1A_2.

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \{2-1; -1-0; 3-3\} = \{1;-1;0\}\,; \quad \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}(\text{од}).$$

- Знайти кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4.

$$\overrightarrow{A_1A_4} = \{1-1; 2-0; 5-3\} = \{0;2;2\}$$
$$\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| = 2\sqrt{2}(\text{од})$$
$$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = (1;-1;0)(0;2;2) = -2;$$
$$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| \cos\alpha = 2\sqrt{2}\sqrt{2}\cos\alpha = 4\cos\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}; \quad \alpha = 120^\circ$$

Приклад

- Знайти кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$.

Приклад

- Знайти кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$.
  Спочатку знайдемо вектор нормалі до грані $A_1A_2A_3$, $\vec{N}$:

Приклад

- Знайти кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$.
  Спочатку знайдемо вектор нормалі до грані $A_1A_2A_3$, $\vec{N}$:
  $$\overrightarrow{A_1A_3} = (2-1; 1-0; 1-3) = (1; 1; -2);$$

Приклад

- Знайти кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$.
  Спочатку знайдемо вектор нормалі до грані $A_1A_2A_3$, $\vec{N}$:

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (2-1; 1-0; 1-3) = (1; 1; -2);$$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-2) - \vec{j}(0+2) + \vec{k}(-1-1) = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k};$$

$$\left|\vec{N}\right| = 2\sqrt{3}$$

Приклад

- Знайти кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$.
  Спочатку знайдемо вектор нормалі до грані $A_1A_2A_3$, $\vec{N}$:

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (2-1; 1-0; 1-3) = (1; 1; -2);$$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-2) - \vec{j}(0+2) + \vec{k}(-1-1) = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k};$$

$$\left|\vec{N}\right| = 2\sqrt{3}$$

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \left|\vec{N}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| \cos\beta = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} \cos\beta;$$

Приклад

- Знайти кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$.
  Спочатку знайдемо вектор нормалі до грані $A_1A_2A_3$, $\vec{N}$:

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (2-1; 1-0; 1-3) = (1; 1; -2);$$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-2) - \vec{j}(0+2) + \vec{k}(-1-1) = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k};$$

$$\left|\vec{N}\right| = 2\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \left|\vec{N}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| \cos\beta = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2}\cos\beta; \quad \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = -4 - 4 = -8.$$

Приклад

- Знайти кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$.
  Спочатку знайдемо вектор нормалі до грані $A_1A_2A_3$, $\vec{N}$:
  $$\overrightarrow{A_1A_3} = (2-1; 1-0; 1-3) = (1; 1; -2);$$
  $$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-2) - \vec{j}(0+2) + \vec{k}(-1-1) = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k};$$
  $$\left|\vec{N}\right| = 2\sqrt{3}$$
  $$\vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \left|\vec{N}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| \cos\beta = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} \cos\beta; \quad \vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = -4 - 4 = -8.$$
  $$\sin\gamma = \sin(90^\circ - \beta)$$

Приклад

- Знайти кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$.
  Спочатку знайдемо вектор нормалі до грані $A_1A_2A_3$, $\vec{N}$:

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (2-1; 1-0; 1-3) = (1; 1; -2);$$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-2) - \vec{j}(0+2) + \vec{k}(-1-1) = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k};$$

$$\left|\vec{N}\right| = 2\sqrt{3}$$

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \left|\vec{N}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| \cos\beta = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} \cos\beta; \quad \vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = -4 - 4 = -8.$$

$$\sin\gamma = \sin(90^\circ - \beta) = \cos\beta = \frac{|-8|}{4\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Приклад

- Знайти кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$.
  Спочатку знайдемо вектор нормалі до грані $A_1A_2A_3$, $\vec{N}$:

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (2-1; 1-0; 1-3) = (1; 1; -2);$$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-2) - \vec{j}(0+2) + \vec{k}(-1-1) = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k};$$

$$\left|\vec{N}\right| = 2\sqrt{3}$$

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \left|\vec{N}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| \cos\beta = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2}\cos\beta; \quad \vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = -4-4 = -8.$$

$$\sin\gamma = \sin(90^\circ - \beta) = \cos\beta = \frac{|-8|}{4\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.\gamma = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Приклад

- Знайти площу грані $A_1A_2A_3$.

Приклад

- Знайти площу грані $A_1A_2A_3$.

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{N}\right| = \sqrt{3}(\text{од}^2)$$

Приклад

- Знайти площу грані $A_1A_2A_3$.

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{N}\right| = \sqrt{3}(\text{од}^2)$$

- Знайти об'єм піраміди.

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\left(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right) \cdot \overrightarrow{A_1A_4}\right)\right| = \left|\frac{1}{6}\vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}\right| = \frac{4}{3}(\text{од}^3).$$

Приклад

- Знайти площу грані $A_1A_2A_3$.

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{N}\right| = \sqrt{3}(\text{од}^2)$$

- Знайти об'єм піраміди.

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\left(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right) \cdot \overrightarrow{A_1A_4}\right)\right| = \left|\frac{1}{6}\vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}\right| = \frac{4}{3}(\text{од}^3).$$

Приклад

- Знайти рівняння площини $A_1A_2A_3$.

Приклад

- Знайти рівняння площини $A_1A_2A_3$. Скористаємося формулою рівняння площини, що проходить через три точки.

Приклад

- Знайти рівняння площини $A_1A_2A_3$. Скористаємося формулою рівняння площини, що проходить через три точки.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-3 \\ 2-1 & -1-0 & 3-3 \\ 2-1 & 1-0 & 1-3 \end{vmatrix}$$

Приклад

- Знайти рівняння площини $A_1A_2A_3$. Скористаємося формулою рівняння площини, що проходить через три точки.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-3 \\ 2-1 & -1-0 & 3-3 \\ 2-1 & 1-0 & 1-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Приклад

- Знайти рівняння площини $A_1A_2A_3$. Скористаємося формулою рівняння площини, що проходить через три точки.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-3 \\ 2-1 & -1-0 & 3-3 \\ 2-1 & 1-0 & 1-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)\cdot 2 - y(-2) + (z-3)(1+1) =$$

$$= 2x - 2 + 2y + 2z - 6 = 0$$

Приклад

- Знайти рівняння площини $A_1A_2A_3$. Скористаємося формулою рівняння площини, що проходить через три точки.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-3 \\ 2-1 & -1-0 & 3-3 \\ 2-1 & 1-0 & 1-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)\cdot 2 - y(-2) + (z-3)(1+1) =$$

$$= 2x - 2 + 2y + 2z - 6 = 0$$

$$2x + 2y + 2z - 8 = 0;$$

$$x + y + z - 4 = 0;$$