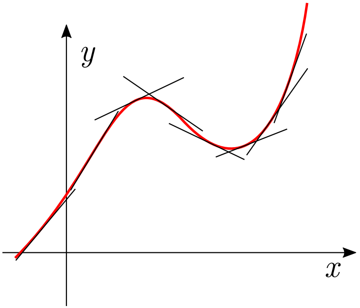
Опуклість і увігнутість графіків функцій. Асимптоти

Опуклість і увігнутість кривої

Означення Крива звернена опуклістю **догори** на інтервалі (a, b), якщо всі її точки лежать нижче будь-якої її дотичної на цьому інтервалі.

Опуклість і увігнутість кривої

<u>**Означення**</u> Крива звернена опуклістю **догори** на інтервалі (a, b), якщо всі її точки лежать нижче будь-якої її дотичної на цьому інтервалі.Крива, звернена опуклістю нагору, називається **опуклою (concave)**, а крива, звернена опуклістю вниз – називається **увігнутою (convex)**.



Достатня умова опуклості

Теорема 1 *Якщо у всіх точках інтервалу* (a, b) *друга похідна функції* $f(x)$ *від'ємна, то крива* $y = f(x)$ *звернена опуклістю нагору (опукла).*

Доведення

Нехай $x_0 \in (a, b)$. Проведемо дотичну до кривої у цій точці.

Доведення

Нехай $x_0 \in (a, b)$. Проведемо дотичну до кривої у цій точці.
Рівняння кривої: $y = f(x)$. Рівняння дотичної: $\overline{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Доведення

Нехай $x_0 \in (a, b)$. Проведемо дотичну до кривої у цій точці.
Рівняння кривої: $y = f(x)$. Рівняння дотичної: $\overline{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
Слід довести, що $y - \overline{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

Доведення

Нехай $x_0 \in (a, b)$. Проведемо дотичну до кривої у цій точці.
Рівняння кривої: $y = f(x)$. Рівняння дотичної: $\overline{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
Слід довести, що $y - \overline{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.
За теоремою Лагранжа для $f(x) - f(x_0)$: $y - \overline{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$,
$x_0 < c < x$. Отже, $y - \overline{y} = (x - x_0)\left[f'(c) - f'(x_0)\right]$.

Доведення

Нехай $x_0 \in (a, b)$. Проведемо дотичну до кривої у цій точці.
Рівняння кривої: $y = f(x)$. Рівняння дотичної: $\overline{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
Слід довести, що $y - \overline{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.
За теоремою Лагранжа для $f(x) - f(x_0)$: $y - \overline{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$,
$x_0 < c < x$. Отже, $y - \overline{y} = (x - x_0)\left[f'(c) - f'(x_0)\right]$.
За теоремою Лагранжа для $f'(c) - f'(x_0)$:
$y - \overline{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0), \quad x_0 < c_1 < c$.

Доведення

Нехай $x_0 \in (a, b)$. Проведемо дотичну до кривої у цій точці.
Рівняння кривої: $y = f(x)$. Рівняння дотичної: $\overline{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
Слід довести, що $y - \overline{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.
За теоремою Лагранжа для $f(x) - f(x_0)$: $y - \overline{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, $x_0 < c < x$. Отже, $y - \overline{y} = (x - x_0)\left[f'(c) - f'(x_0)\right]$.
За теоремою Лагранжа для $f'(c) - f'(x_0)$:
$y - \overline{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0), \quad x_0 < c_1 < c$.
Нехай $x > x_0$ тоді $x_0 < c_1 < c < x$. Оскільки $x - x_0 > 0$ і $c - x_0 > 0$, і крім того за умовою $f''(c_1) < 0$, отже, $y - \overline{y} < 0$.

Доведення

Нехай $x_0 \in (a, b)$. Проведемо дотичну до кривої у цій точці.
Рівняння кривої: $y = f(x)$. Рівняння дотичної: $\overline{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
Слід довести, що $y - \overline{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.
За теоремою Лагранжа для $f(x) - f(x_0)$: $y - \overline{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, $x_0 < c < x$. Отже, $y - \overline{y} = (x - x_0)\left[f'(c) - f'(x_0)\right]$.
За теоремою Лагранжа для $f'(c) - f'(x_0)$:
$y - \overline{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0), \quad x_0 < c_1 < c$.
Нехай $x > x_0$ тоді $x_0 < c_1 < c < x$. Оскільки $x - x_0 > 0$ і $c - x_0 > 0$, і крім того за умовою $f''(c_1) < 0$, отже, $y - \overline{y} < 0$.
Нехай $x < x_0$ тоді $x < c < c_1 < x_0$ і $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$, оскільки за умовою $f''(c_1) < 0$, тому $y - \overrightarrow{y} < 0$.

Доведення

Нехай $x_0 \in (a, b)$. Проведемо дотичну до кривої у цій точці.
Рівняння кривої: $y = f(x)$. Рівняння дотичної: $\overline{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
Слід довести, що $y - \overline{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.
За теоремою Лагранжа для $f(x) - f(x_0)$: $y - \overline{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, $x_0 < c < x$. Отже, $y - \overline{y} = (x - x_0)\left[f'(c) - f'(x_0)\right]$.
За теоремою Лагранжа для $f'(c) - f'(x_0)$:
$y - \overline{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0), \quad x_0 < c_1 < c.$
Нехай $x > x_0$ тоді $x_0 < c_1 < c < x$. Оскільки $x - x_0 > 0$ і $c - x_0 > 0$, і крім того за умовою $f''(c_1) < 0$, отже, $y - \overline{y} < 0$.
Нехай $x < x_0$ тоді $x < c < c_1 < x_0$ і $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$, оскільки за умовою $f''(c_1) < 0$, тому $y - \overrightarrow{y} < 0$.
Аналогічно доводиться, що якщо $f''(x) > 0$ на інтервалі (a, b), то крива $y = f(x)$ увігнута на інтервалі (a, b).

Доведення

Нехай $x_0 \in (a, b)$. Проведемо дотичну до кривої у цій точці.
Рівняння кривої: $y = f(x)$. Рівняння дотичної: $\overline{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
Слід довести, що $y - \overline{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.
За теоремою Лагранжа для $f(x) - f(x_0)$: $y - \overline{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, $x_0 < c < x$. Отже, $y - \overline{y} = (x - x_0)\left[f'(c) - f'(x_0)\right]$.
За теоремою Лагранжа для $f'(c) - f'(x_0)$:
$y - \overline{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0), \quad x_0 < c_1 < c$.
Нехай $x > x_0$ тоді $x_0 < c_1 < c < x$. Оскільки $x - x_0 > 0$ і $c - x_0 > 0$, і крім того за умовою $f''(c_1) < 0$, отже, $y - \overline{y} < 0$.
Нехай $x < x_0$ тоді $x < c < c_1 < x_0$ і $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$, оскільки за умовою $f''(c_1) < 0$, тому $y - \overrightarrow{y} < 0$.
Аналогічно доводиться, що якщо $f''(x) > 0$ на інтервалі (a, b), то крива $y = f(x)$ увігнута на інтервалі (a, b).
Теорему доведено.

Точки перегину

Означення Точка, що відокремлює опуклу частину кривої від увігнутої, називається **точкою перегину**.

Точки перегину

<u>**Означення**</u> Точка, що відокремлює опуклу частину кривої від увігнутої, називається **точкою перегину**.
Очевидно, що у точці перегину дотична перетинає криву.

Точки перегину

Означення Точка, що відокремлює опуклу частину кривої від увігнутої, називається **точкою перегину**.
Очевидно, що у точці перегину дотична перетинає криву.
Теорема 2 *Нехай крива визначається рівнянням* $y = f(x)$. *Якщо друга похідна* $f''(a) = 0$ *або* $f''(a)$ *не існує і при переході через точку* $x = a$ $f''(x)$ *міняє знак, то точка кривої з абсцисою* $x = a$ *є точкою перегину*

Доведення

1) Нехай $f''(x) < 0$ при $x < a$ і $f''(x) > 0$ при $x > a$. Тоді при $x < a$ крива опукла, а при $x > a$ крива увігнута, тобто точка $x = a$ – точка перегину.

Доведення

1) Нехай $f''(x) < 0$ при $x < a$ і $f''(x) > 0$ при $x > a$. Тоді при $x < a$ крива опукла, а при $x > a$ крива увігнута, тобто точка $x = a$ – точка перегину.
2) Нехай $f''(x) > 0$ при $x < b$ і $f''(x) < 0$ при $x > b$. Тоді при $x < b$ крива звернена опуклістю вниз, а при $x > b$ – опуклістю нагору. Тоді $x = b$ – точка перегину.

Доведення

1) Нехай $f''(x) < 0$ при $x < a$ і $f''(x) > 0$ при $x > a$. Тоді при $x < a$ крива опукла, а при $x > a$ крива увігнута, тобто точка $x = a$ – точка перегину.
2) Нехай $f''(x) > 0$ при $x < b$ і $f''(x) < 0$ при $x > b$. Тоді при $x < b$ крива звернена опуклістю вниз, а при $x > b$ – опуклістю нагору. Тоді $x = b$ – точка перегину.
Теорему доведено.

Нерівність Єнсена (Jensen)

Теорема *Нехай f – увігнута (опукла донизу) на $(a;b)$ функція. Тоді для будь-яких $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset (a;b)$ і для будь-яких $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset (0;1)$, таких, що $\sum\limits_{i=1}^{n} = 1$ виконується нерівність*

$$f\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n\right) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots \alpha_n f(x_n)$$

Нерівність Єнсена (Jensen)

<u>Теорема</u> *Нехай f – увігнута (опукла донизу) на $(a;b)$ функція. Тоді для будь-яких $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset (a;b)$ і для будь-яких $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset (0;1)$, таких, що $\sum\limits_{i=1}^{n} = 1$ виконується нерівність*

$$f\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n\right) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots \alpha_n f(x_n)$$

Нерівність перетворюється на строгу, якщо функція є строго увігнутою, а усі $x_i, i = 1, 2, \ldots n$ – різні.

Доведення

Для $n = 2$, очевидно, виконується (функція опукла).

Доведення

Для $n = 2$, очевидно, виконується (функція опукла).
Скористаємося індукцією.

Доведення

Для $n = 2$, очевидно, виконується (функція опукла).
Скористаємося індукцією.
Нехай нерівність виконується для $n - 1$:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f(x_i)$$

Доведення

Для n:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i x_i + \alpha_n x_n\right)$$

Доведення

Для n:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i x_i + \alpha_n x_n\right) = f\left((1-\alpha_n)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_n}x_i + \alpha_n x_n\right)$$

Доведення

Для n:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i + \alpha_n x_n\right) = f\left((1-\alpha_n)\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_n} x_i + \alpha_n x_n\right) \leqslant$$

$$\leqslant (1-\alpha_n) f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_n} x_i\right) + \alpha_n f(x_n)$$

Доведення

Для n:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)=f\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i x_i+\alpha_n x_n\right)=f\left((1-\alpha_n)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_n}x_i+\alpha_n x_n\right)\leqslant$$

$$\leqslant(1-\alpha_n)f\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_n}x_i\right)+\alpha_n f(x_n)$$

Оскільки $\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_n}=1$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)\leqslant(1-\alpha_n)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_n}f(x_i)+\alpha_n f(x_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)$$

Доведення

Для n:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i x_i + \alpha_n x_n\right) = f\left((1-\alpha_n)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_n}x_i + \alpha_n x_n\right) \leqslant$$

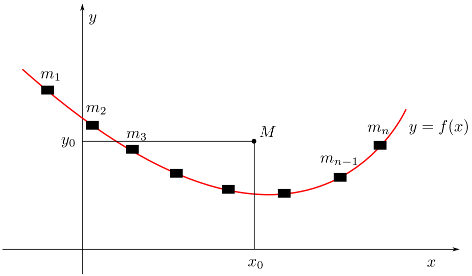
$$\leqslant (1-\alpha_n) f\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_n}x_i\right) + \alpha_n f(x_n)$$

Оскільки $\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_n} = 1$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right) \leqslant (1-\alpha_n)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_n}f(x_i) + \alpha_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)$$

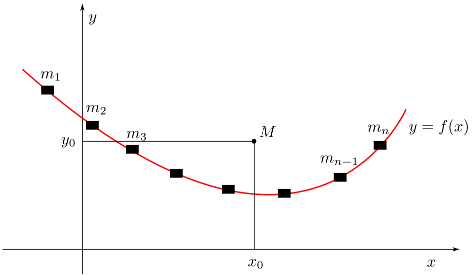
Доведення завершено.

Застосування: Розподіл мас уздовж кривої



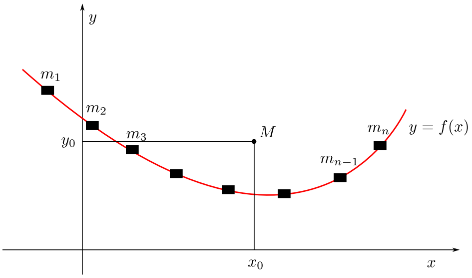
$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k$$

Застосування: Розподіл мас уздовж кривої



$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k, \quad S_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k$$

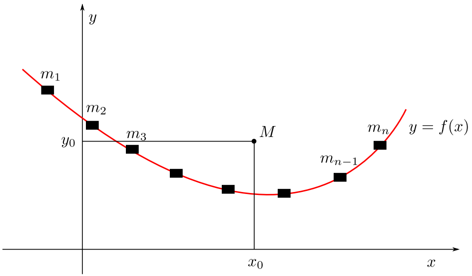
Застосування: Розподіл мас уздовж кривої



$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k, \quad S_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k$$

$$\alpha_k = \frac{m_k}{M} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$$

Застосування: Розподіл мас уздовж кривої

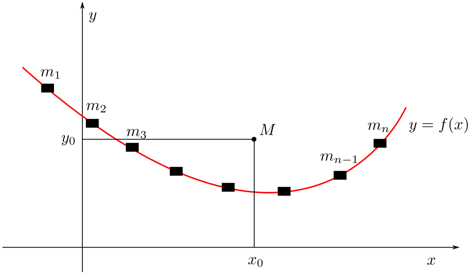


$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k, \quad S_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k$$

$$\alpha_k = \frac{m_k}{M} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$$

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{M} x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{M} f(x_k)$$

Застосування: Розподіл мас уздовж кривої



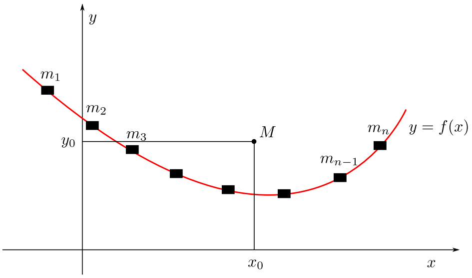
$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k, \quad S_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k$$

$$\alpha_k = \frac{m_k}{M} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$$

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{M} x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{M} f(x_k)$$

Центр мас: $\sum_{k=1}^{n} m_k f(x_k) = M y_0$, $\sum_{k=1}^{n} m_k x_k = M x_0$,

Застосування: Розподіл мас уздовж кривої



$$M=\sum_{k=1}^{n} m_k, \quad S_x=\sum_{k=1}^{n} m_k y_k$$

$$\alpha_k=\frac{m_k}{M} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$$

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{M} x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{M} f(x_k)$$

Центр мас: $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k f(x_k) = M y_0$, $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k x_k = M x_0$,

Отже,

$$y_0 = f\left(x_0\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{M} f(x_k)$$

Асимптоти

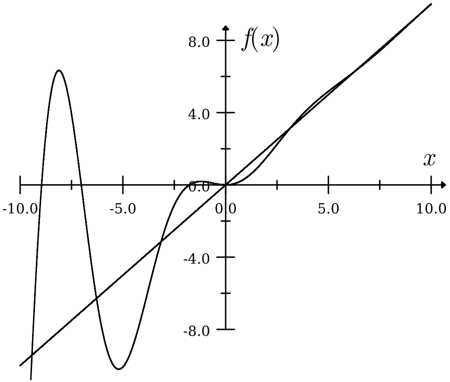
Означення Пряма називається **асимптотою** кривої, якщо відстань від змінної точки кривої до цієї прямої при віддаленні точки в нескінченність прямує до нуля.

Різновиди асимптот

Слід зазначити, що не будь-яка крива має асимптоту. Асимптоти можуть бути **вертикальні** і **похилі**.

Приклад

Загалом кажучи, крива, необмежено наближаючись до своєї асимптоти, може і перетинати її, причому не в одній точці, як показано на наведеному нижче графіку функції $y = x + e^{-\frac{x}{3}} \sin x$. Її похила асимптота – $y = x$.



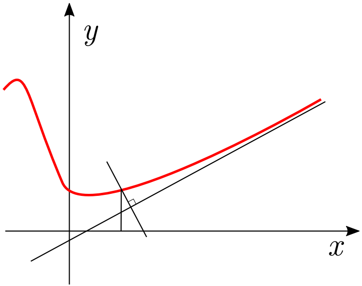
Вертикальні асимптоти

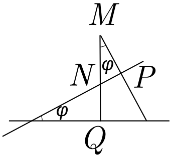
З визначення асимптоти слідує, що якщо $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ або $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$ або $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то пряма $x = a$ – асимптота кривої $y = f(x)$.

Наприклад, для функції $f(x) = \dfrac{2}{x-5}$ пряма $x = 5$ є вертикальною асимптотою.

Похилі асимптоти

Припустімо, що крива $y = f(x)$ має похилу асимптоту $y = kx + b$.





Визначення параметрів рівняння асимптоти

Тоді $MQ = y$ – ордината точки кривої, $NQ = \overline{y}$ – ордината точки N на асимптоті.

Визначення параметрів рівняння асимптоти

Тоді $MQ = y$ – ордината точки кривої, $NQ = \overline{y}$ – ордината точки N на асимптоті.

За умовою: $\lim\limits_{x\to\infty} |MP| = 0$, $\angle NMP = \varphi$, $|NM| = \dfrac{|MP|}{\cos\varphi}$.

Визначення параметрів рівняння асимптоти

Тоді $MQ = y$ – ордината точки кривої, $NQ = \overline{y}$ – ордината точки N на асимптоті.

За умовою: $\lim\limits_{x\to\infty} |MP| = 0$, $\angle NMP = \varphi$, $|NM| = \dfrac{|MP|}{\cos\varphi}$.

Кут φ – сталий і не рівний 90°, тому

Визначення параметрів рівняння асимптоти

Тоді $MQ = y$ – ордината точки кривої, $NQ = \overline{y}$ – ордината точки N на асимптоті.

За умовою: $\lim\limits_{x\to\infty} |MP| = 0$, $\angle NMP = \varphi$, $|NM| = \dfrac{|MP|}{\cos\varphi}$.

Кут φ – сталий і не рівний 90°, тому

$$\lim_{x\to\infty} |MP| = \lim_{x\to\infty} |NM| \cos\varphi = \lim_{x\to\infty} |NM| = 0$$

Визначення параметрів рівняння асимптоти

Тоді $MQ = y$ – ордината точки кривої, $NQ = \overline{y}$ – ордината точки N на асимптоті.
За умовою: $\lim\limits_{x\to\infty} |MP| = 0$, $\angle NMP = \varphi$, $|NM| = \dfrac{|MP|}{\cos\varphi}$.
Кут φ – сталий і не рівний 90°, тому

$$\lim_{x\to\infty} |MP| = \lim_{x\to\infty} |NM|\cos\varphi = \lim_{x\to\infty} |NM| = 0$$

$$|NM| = ||MQ| - |QN|| = |y - \overline{y}| = |f(x) - (kx + b)|$$

Визначення параметрів рівняння асимптоти

Тоді $MQ = y$ – ордината точки кривої, $NQ = \overline{y}$ – ордината точки N на асимптоті.

За умовою: $\lim\limits_{x\to\infty}|MP| = 0$, $\angle NMP = \varphi$, $|NM| = \dfrac{|MP|}{\cos\varphi}$.

Кут φ – сталий і не рівний 90°, тому

$$\lim_{x\to\infty}|MP| = \lim_{x\to\infty}|NM|\cos\varphi = \lim_{x\to\infty}|NM| = 0$$

$$|NM| = ||MQ| - |QN|| = |y - \overline{y}| = |f(x) - (kx + b)|$$

Тоді $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0$.

Визначення параметрів рівняння асимптоти

Отже, пряма $y = kx + b$ – асимптота кривої. Для точного визначення цієї прямої необхідно знайти спосіб обчислення коефіцієнтів k і b.

Визначення параметрів рівняння асимптоти

Отже, пряма $y = kx + b$ – асимптота кривої. Для точного визначення цієї прямої необхідно знайти спосіб обчислення коефіцієнтів k і b.
В отриманому виразі виносимо за дужки x:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$$

Визначення параметрів рівняння асимптоти

Отже, пряма $y = kx + b$ – асимптота кривої. Для точного визначення цієї прямої необхідно знайти спосіб обчислення коефіцієнтів k і b.
В отриманому виразі виносимо за дужки x:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$$

Оскільки $x \to \infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0.$

Визначення параметрів рівняння асимптоти

Отже, пряма $y = kx + b$ – асимптота кривої. Для точного визначення цієї прямої необхідно знайти спосіб обчислення коефіцієнтів k і b.
В отриманому виразі виносимо за дужки x:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$$

Оскільки $x \to \infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$.
Оскільки $b = const$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} k = k$.

Визначення параметрів рівняння асимптоти

Отже, пряма $y = kx + b$ – асимптота кривої. Для точного визначення цієї прямої необхідно знайти спосіб обчислення коефіцієнтів k і b.
В отриманому виразі виносимо за дужки x:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$$

Оскільки $x \to \infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0.$
Оскільки $b = const$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} k = k.$
Тоді

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} - k - 0 = 0.$$

Визначення параметрів рівняння асимптоти

Отже,

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Визначення параметрів рівняння асимптоти

Отже,

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx] - \lim\limits_{x\to\infty} b = 0$, отже,

Визначення параметрів рівняння асимптоти

Отже,

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Оскільки $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$, то $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - kx] - \lim\limits_{x \to \infty} b = 0$, отже,

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx]$$

Визначення параметрів рівняння асимптоти

Отже,

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Оскільки $\lim_{x \to \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$, то $\lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] - \lim_{x \to \infty} b = 0$, отже,

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx]$$

Зазначимо, що горизонтальні асимптоти є частковим випадком похилих асимптот при $k = 0$.

Приклад

Знайти асимптоти і побудувати графік функції

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}.$$

Розв'язання

1) Вертикальні асимптоти: $y \to +\infty$ при $x \to 0-0$; $y \to -\infty$ при $x \to 0+0$, отже, $x = 0$ – вертикальна асимптота.

Розв'язання

1) Вертикальні асимптоти: $y \to +\infty$ при $x \to 0-0$; $y \to -\infty$ при $x \to 0+0$, отже, $x = 0$ – вертикальна асимптота.

2) Похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2}$$

Розв'язання

1) Вертикальні асимптоти: $y \to +\infty$ при $x \to 0-0$; $y \to -\infty$ при $x \to 0+0$, отже, $x = 0$ – вертикальна асимптота.

2) Похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$$

Розв'язання

1) Вертикальні асимптоти: $y \to +\infty$ при $x \to 0-0$; $y \to -\infty$ при $x \to 0+0$, отже, $x = 0$ – вертикальна асимптота.

2) Похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = 1.$$

Розв'язання

1) Вертикальні асимптоти: $y \to +\infty$ при $x \to 0-0$; $y \to -\infty$ при $x \to 0+0$, отже, $x = 0$ – вертикальна асимптота.

2) Похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - x)$$

Розв'язання

1) Вертикальні асимптоти: $y \to +\infty$ при $x \to 0-0$; $y \to -\infty$ при $x \to 0+0$, отже, $x = 0$ – вертикальна асимптота.

2) Похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x-1}{x} - x\right)$$

Розв'язання

1) Вертикальні асимптоти: $y \to +\infty$ при $x \to 0-0$; $y \to -\infty$ при $x \to 0+0$, отже, $x = 0$ – вертикальна асимптота.

2) Похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 1.$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x}\right) =$$

Розв'язання

1) Вертикальні асимптоти: $y \to +\infty$ при $x \to 0-0$; $y \to -\infty$ при $x \to 0+0$, отже, $x = 0$ – вертикальна асимптота.
2) Похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x-1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x-1}{x}\right)$$

Розв'язання

1) Вертикальні асимптоти: $y \to +\infty$ при $x \to 0-0$; $y \to -\infty$ при $x \to 0+0$, отже, $x = 0$ – вертикальна асимптота.
2) Похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)$$

Розв'язання

1) Вертикальні асимптоти: $y \to +\infty$ при $x \to 0-0$; $y \to -\infty$ при $x \to 0+0$, отже, $x = 0$ – вертикальна асимптота.

2) Похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x-1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x-1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$$

Розв'язання

1) Вертикальні асимптоти: $y \to +\infty$ при $x \to 0-0$; $y \to -\infty$ при $x \to 0+0$, отже, $x = 0$ – вертикальна асимптота.
2) Похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 1.$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x - 1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$$

Таким чином, пряма $y = x + 2$ є похилою асимптотою.

Розв'язання