Обернена матриця. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

Обернена матриця

Означення. Якщо існують квадратні матриці X і A одного порядку, що задовольняють умові:

$$XA = AX = I,$$

де I – одинична матриця того ж самого порядку, що і матриця A, то матриця X називається **оберненою** до матриці A і позначається A^{-1}.

Обернена матриця

$$AX = I \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot x_{kj} = e_{ij}, i = (1, n), j = (1, n),$$

$$e_{ij} = 0, i \neq j,$$

$$e_{ij} = 1, i = j.$$

Обернена матриця

$$AX = I \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot x_{kj} = e_{ij}, i = (1, n), j = (1, n),$$

$$e_{ij} = 0, i \neq j,$$

$$e_{ij} = 1, i = j.$$

Звідси

$$\begin{cases} a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + ... + a_{1n}x_{nj} = 0 \\ .... \\ a_{j1}x_{1j} + a_{j2}x_{2j} + ... + a_{jn}x_{nj} = 1 \\ .... \\ a_{n1}x_{1j} + a_{n2}x_{2j} + ... + a_{nn}x_{nj} = 0 \end{cases},$$

Розв'язавши цю систему, знаходимо елементи матриці X.

Приклад

Дано матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, знайти A^{-1}.

Розв'язання

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = e_{11} = 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = e_{12} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = e_{21} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = e_{22} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 3x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ 3x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases} \begin{cases} x_{11} = -2 \\ x_{12} = 1 \\ x_{21} = 3/2 \\ x_{22} = -1/2 \end{cases}$$

Розв'язання

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = e_{11} = 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = e_{12} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = e_{21} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = e_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 3x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ 3x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases} \begin{cases} x_{11} = -2 \\ x_{12} = 1 \\ x_{21} = 3/2 \\ x_{22} = -1/2 \end{cases}$$

Таким чином, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Спряжена матриця

$$x_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A},$$

де A_{ji} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ji} матриці A.

Спряжена матриця

$$x_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A},$$

де A_{ji} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ji} матриці A.
Цей метод знаходження оберненої матриці називається **методом спряженої матриці**, а матриця з алгебраїчних доповнень — **спряженою матрицею** (позначають $\tilde{A}$).

Спряжена матриця

$$x_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A},$$

де A_{ji} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ji} матриці A.
Цей метод знаходження оберненої матриці називається **методом спряженої матриці**, а матриця з алгебраїчних доповнень — **спряженою матрицею** (позначають $\tilde{A}$).

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}^T$$

Приклад

Дано матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, знайти A^{-1}.

Розв'язання

$$\det A = 4 - 6 = -2.$$

Розв'язання

$$\det A = 4 - 6 = -2.$$

$$M_{11} = 4; M_{12} = 3; M_{21} = 2; M_{22} = 1.$$

Розв'язання

$$\det A = 4 - 6 = -2.$$

$$M_{11} = 4; M_{12} = 3; M_{21} = 2; M_{22} = 1.$$

$$x_{11} = -2; x_{12} = 1; x_{21} = 3/2; x_{22} = -1/2.$$

Розв'язання

$$\det A = 4 - 6 = -2.$$

$$M_{11} = 4; M_{12} = 3; M_{21} = 2; M_{22} = 1.$$

$$x_{11} = -2; x_{12} = 1; x_{21} = 3/2; x_{22} = -1/2.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Властивості обернених матриць

1. $(A^{-1})^{-1} = A$;

Властивості обернених матриць

1. $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Властивості обернених матриць

1. $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Поелементний запис системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Поелементний запис системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Позначимо

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

Поелементний запис системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Позначимо

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix};$$

Поелементний запис системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Позначимо

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Матрична форма запису системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$A \cdot x = b$$

Розв'язування СЛАР матричним способом

$$A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b$$

Розв'язування СЛАР матричним способом

$$A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b$$

$$A^{-1} \cdot A = I$$

Розв'язування СЛАР матричним способом

$$A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b$$

$$A^{-1} \cdot A = I$$

$$I \cdot x = A^{-1} \cdot b,$$

$$x = A^{-1} \cdot b.$$

Приклад

Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Розв'язання

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Розв'язання

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Розв'язання

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Обернена матриця A^{-1}: $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

Розв'язання

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Обернена матриця A^{-1}: $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$

$5 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot (-1) - (-1) \cdot 3 \cdot 4 - ((-1) \cdot 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 2) = 5 - 35 = -30.$

Розв'язання

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;\ A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1;\ A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

Розв'язання

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;\ A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1;\ A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10;\ A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -16;$$

Розв'язання

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; \ A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1; \ A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10; \ A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \ A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -16;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5; \ A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -19; \ A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

Розв'язання

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;\ A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1;\ A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$
$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10;\ A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -16;$$
$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -19;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^T = -\frac{1}{30} \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} =$$

Розв'язання

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Розв'язання

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Отже розв'язок системи: $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$.

Метод Крамера

Теорема. (Правило Крамера (Cramer's rule) *Система з n рівнянь із n невідомими*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

у випадку, якщо $\det A \neq 0$, *має єдиний розв'язок і цей розв'язок знаходиться за формулами* $x_i = \Delta_i/\Delta$, *де* $\Delta = \det A$, *а* Δ_i *– визначник матриці, одержаної з матриці системи заміною стовпця і стовпцем вільних членів* b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1}\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Приклад

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Приклад

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

Приклад

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$$x_1 = \Delta_1 / \det A; x_2 = \Delta_2 / \det A; x_3 = \Delta_3 / \det A$$

Приклад

Знайти розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Розв'язання

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30;$$

Розв'язання

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30;$$

Розв'язання

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30; \qquad x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$$

Розв'язання

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30; \qquad x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = -60;$$

Розв'язання

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30; \qquad x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = -60; \qquad x_2 = \Delta_2/\Delta = 2;$$

Розв'язання

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30; \qquad x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = -60; \qquad x_2 = \Delta_2/\Delta = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = -90;$$

Розв'язання

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30; \qquad x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = -60; \qquad x_2 = \Delta_2/\Delta = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = -90; \qquad x_3 = \Delta_3/\Delta = 3.$$

Розв'язання довільних систем лінійних рівнянь

Означення. Система m рівнянь із n невідомими в загальному виді записується у такий спосіб:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1)$$

Сумісність системи

Означення. Якщо система має хоча б один розв'язок, то вона називається **сумісною** (compatible). Якщо система не має жодного розв'язку, то вона називається **несумісною** (incompatible).

Визначеність системи

<u>Означення.</u> Система називається **визначеною** (determined), якщо вона має тільки один розв'язок і **невизначеною** (undetermined), якщо більше одного.

Матриця системи і розширена матриця системи

Означення. Для системи лінійних рівнянь матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ називається матрицею системи, а матриця

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ називається розширеною матрицею системи

Однорідна система

Означення. Якщо $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, то система називається **однорідною**.

Однорідна система

Означення. Якщо $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, то система називається **однорідною**. Однорідна система завжди сумісна, оскільки завжди має нульовий розв'язок.

Теорема Кронекера-Капеллі (умова сумісності системи)

Теорема Кронекера-Капеллі (Kronecker-Capelli): *Система сумісна (має хоча б один розв'язок) тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці.*

Теорема Кронекера-Капеллі (умова сумісності системи)

<u>Теорема Кронекера-Капеллі (Kronecker-Capelli):</u> *Система сумісна (має хоча б один розв'язок) тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці.*

$$\mathrm{rank} A = \mathrm{rank} A^*.$$

Теорема Кронекера-Капеллі (умова сумісності системи)

Теорема Кронекера-Капеллі (Kronecker-Capelli): *Система сумісна (має хоча б один розв'язок) тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці.*

$$\mathrm{rank} A = \mathrm{rank} A^*.$$

Причому система має єдиний розв'язок, якщо ранг дорівнює кількості невідомих, і нескінченно багато розв'язків, якщо ранг менше кількості невідомих.

Доведення

1) Якщо розв'язок існує, то стовпець вільних членів є лінійною комбінацією стовпців матриці A, а значить додавання цього стовпця у матрицю, тобто перехід $A \to A^*$ не змінює рангу.

Доведення

1) Якщо розв'язок існує, то стовпець вільних членів є лінійною комбінацією стовпців матриці A, а значить додавання цього стовпця у матрицю, тобто перехід $A \to A^*$ не змінює рангу.
2) Якщо $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}A^*$, то це означає, що вони мають той самий базисний мінор. Стовпець вільних членів – лінійна комбінація стовпців базисного мінора, тоді виконується рівність, наведена вище.

Приклад

Перевірити сумісність лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$$

Розв'язання

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}$$

Розв'язання

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow[\xrightarrow{R_3 - 2R_1}]{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

Розв'язання

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \\ \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{rank} A = 2.$$

Розв'язання

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right)$$

Розв'язання

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3-2R_1}]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Розв'язання

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Розв'язання

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

$$\mathrm{rank} A^* = 3.$$

Розв'язання

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\xrightarrow{R_3-2R_1}]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

$$\mathrm{rank} A^* = 3.$$

Система несумісна.