Границя і неперервність функції декількох змінних у точці

Функція двох змінних

При розгляді функцій декількох змінних обмежимося докладним описом функцій двох змінних, оскільки всі отримані результати будуть справедливі для функцій довільної кількості змінних.

Функція двох змінних

При розгляді функцій декількох змінних обмежимося докладним описом функцій двох змінних, оскільки всі отримані результати будуть справедливі для функцій довільної кількості змінних.

Означення: Якщо кожній парі незалежних одне від одного чисел (x, y) з деякої множини за якимось правилом ставиться у відповідність одне або кілька значень змінної z, то змінна z називається **функцією двох змінних**

$$z = f(x, y)$$

Однозначна і багатозначна функція двох змінних

Означення: Якщо парі чисел (x, y) відповідає одне значення z, то функція називається **однозначною**, а якщо більше одного, то – **багатозначною**.

Область визначення функції

Означення: Областю визначення функції z називається сукупність пар (x, y), при яких функція z існує.

Приклад

Знайти область визначення функції $z = \dfrac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} + e^{\frac{xy}{x-1}}$.

Розв'язання

Записуємо умови, які обмежують можливості обчислення функції:

$$y^2 - 1 \geqslant 0$$

Розв'язання

Записуємо умови, які обмежують можливості обчислення функції:

$$y^2 - 1 \geqslant 0$$

$$\sqrt{y^2 - 1} \neq 0$$

Розв'язання

Записуємо умови, які обмежують можливості обчислення функції:

$$y^2 - 1 \geqslant 0$$

$$\sqrt{y^2 - 1} \neq 0$$

$$x - 1 \neq 0$$

Розв'язання

Записуємо умови, які обмежують можливості обчислення функції:

$$y^2 - 1 \geqslant 0$$

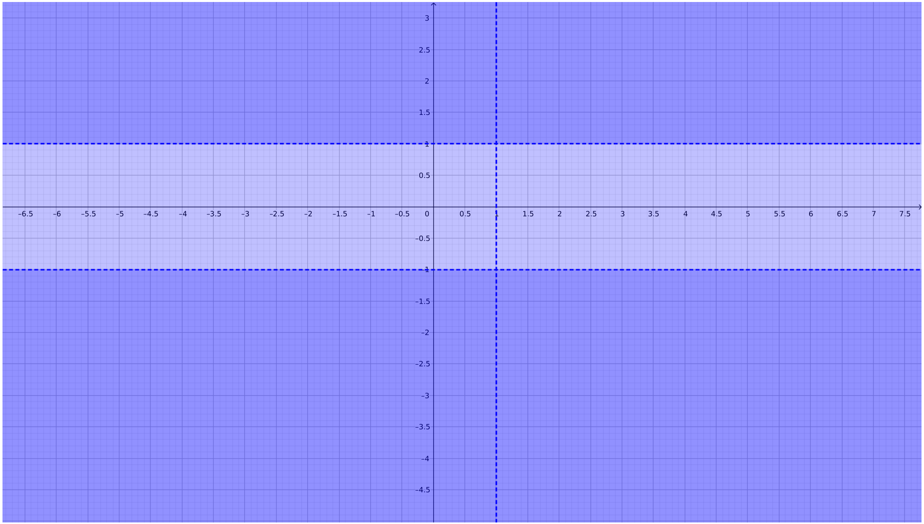
$$\sqrt{y^2 - 1} \neq 0$$

$$x - 1 \neq 0$$

Спрощуємо:

$$\begin{cases} y^2 > 1 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Побудова області визначення



Окіл точки

<u>**Означення:**</u> **Околом точки** $M_0(x_0, y_0)$ радіуса r називається сукупність всіх точок (x, y), які задовольняють умові $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$.

Границя функції у точці (кратна)

<u>Означення:</u> Число A називається **границею** функції $f(x,y)$ при прямуванні точки $M(x,y)$ до точки $M_0(x_0,y_0)$, якщо для кожного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $r > 0$, що для будь-якої точки $M(x,y)$, для якої виконується умова

$$MM_0 < r$$

також виконується і умова $|f(x,y) - A| < \varepsilon$.
Записують: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$

Приклад

Знайти границю

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\mathrm{tg}(x^2+y^2)}{\ln(1+2x^2+2y^2)}$$

Розв'язання

Покладемо $x^2 + y^2 = t$.

Розв'язання

Покладемо $x^2 + y^2 = t$.
Тоді, при $(x; y) \to (0; 0)$ можемо переписати границю як

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\operatorname{tg}(x^2 + y^2)}{\ln(1 + 2x^2 + 2y^2)} = \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{tg} t}{\ln(1 + 2t)}$$

Розв'язання

Покладемо $x^2 + y^2 = t$.
Тоді, при $(x; y) \to (0; 0)$ можемо переписати границю як

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}{\ln(1+2x^2+2y^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg} t}{\ln(1+2t)} \overset{\text{еквівалентність}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{t}{2t}$$

Розв'язання

Покладемо $x^2 + y^2 = t$.
Тоді, при $(x; y) \to (0; 0)$ можемо переписати границю як

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}{\ln(1+2x^2+2y^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg} t}{\ln(1+2t)} \overset{\text{еквівалентність}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{t}{2t} = \frac{1}{2}$$

Приклад

Довести, що границя

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 + 2y^2}{xy}$$

не існує за наведеним вище означенням.

Розв'язання

Нехай під час прямування $(x; y) \to (0; 0)$ зберігається співвідношення $y = kx$.

Розв'язання

Нехай під час прямування $(x; y) \to (0; 0)$ зберігається співвідношення $y = kx$. Тоді

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 + 2y^2}{xy} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 2k^2x^2}{x \cdot kx}$$

Розв'язання

Нехай під час прямування $(x;y) \to (0;0)$ зберігається співвідношення $y = kx$. Тоді

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+2y^2}{xy} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2k^2x^2}{x\cdot kx} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+2k^2)}{x^2k}$$

Розв'язання

Нехай під час прямування $(x; y) \to (0; 0)$ зберігається співвідношення $y = kx$. Тоді
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+2y^2}{xy} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2k^2x^2}{x\cdot kx} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+2k^2)}{x^2k} = \frac{1+2k^2}{k}$$

Розв'язання

Нехай під час прямування $(x; y) \to (0; 0)$ зберігається співвідношення $y = kx$. Тоді

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 + 2y^2}{xy} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2k^2x^2}{x \cdot kx} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2(1 + 2k^2)}{x^2k} = \frac{1 + 2k^2}{k}$$

Таким чином, значення границі має залежати від кутового коефіцієнта k. Але це не відповідає означенню, оскільки за означенням границя не повинна залежати від способу прямування $(x; y) \to (0; 0)$.

Розв'язання

Нехай під час прямування $(x; y) \to (0; 0)$ зберігається співвідношення $y = kx$.
Тоді

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+2y^2}{xy} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2k^2x^2}{x\cdot kx} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+2k^2)}{x^2k} = \frac{1+2k^2}{k}$$

Таким чином, значення границі має залежати від кутового коефіцієнта k. Але це не відповідає означенню, оскільки за означенням границя не повинна залежати від способу прямування $(x; y) \to (0; 0)$.
Отже, границі у сенсі записаного означення не існує.

Повторні границі

Нехай для довільного $y \in Y$ існує границя функції $f(x, y)$ при $x \to x_0$.

Повторні границі

Нехай для довільного $y \in Y$ існує границя функції $f(x, y)$ при $x \to x_0$.
У загальному випадку ця буде залежати від y:

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y) = \varphi(y)$$

Повторні границі

Нехай для довільного $y \in Y$ існує границя функції $f(x, y)$ при $x \to x_0$.
У загальному випадку ця буде залежати від y:

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y) = \varphi(y)$$

Якщо існує границя

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = A,$$

то ця границя називається повторною границею.

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = A$$

Повторні границі

Нехай для довільного $y \in Y$ існує границя функції $f(x,y)$ при $x \to x_0$.
У загальному випадку ця буде залежати від y:

$$\lim_{x \to x_0} f(x,y) = \varphi(y)$$

Якщо існує границя

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = A,$$

то ця границя називається повторною границею.

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y) = A$$

Іншу повторну границю можна отримати помінявши місцями границі за x та y:

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x,y) = B$$

Приклад нерівності повторних границь

Нехай

$$f(x,y) = \frac{x - y}{x + y + x^2 + y^2}$$

Приклад нерівності повторних границь

Нехай

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y+x^2+y^2}$$

Тоді

$$\varphi(y) = \lim_{x\to 0} f(x,y) = -\frac{1}{y+1};$$

Приклад нерівності повторних границь

Нехай

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y+x^2+y^2}$$

Тоді

$$\varphi(y) = \lim_{x\to 0} f(x,y) = -\frac{1}{y+1}; \quad \lim_{y\to 0} \varphi(y) = \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x,y)$$

Приклад нерівності повторних границь

Нехай

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y + x^2 + y^2}$$

Тоді

$$\varphi(y) = \lim_{x \to 0} f(x, y) = -\frac{1}{y + 1}; \quad \lim_{y \to 0} \varphi(y) = \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = -1$$

Приклад нерівності повторних границь

Нехай

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y+x^2+y^2}$$

Тоді

$$\varphi(y) = \lim_{x\to 0} f(x,y) = -\frac{1}{y+1}; \qquad \lim_{y\to 0}\varphi(y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = -1$$

$$\psi(x) = \lim_{y\to 0} f(x,y) = \frac{1}{x+1};$$

Приклад нерівності повторних границь

Нехай

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y+x^2+y^2}$$

Тоді

$$\varphi(y) = \lim_{x\to 0} f(x,y) = -\frac{1}{y+1}; \quad \lim_{y\to 0}\varphi(y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = -1$$

$$\psi(x) = \lim_{y\to 0} f(x,y) = \frac{1}{x+1}; \quad \lim_{x\to 0}\psi(x) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$$

Приклад нерівності повторних границь

Нехай

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y+x^2+y^2}$$

Тоді

$$\varphi(y) = \lim_{x\to 0} f(x,y) = -\frac{1}{y+1}; \quad \lim_{y\to 0}\varphi(y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = -1$$

$$\psi(x) = \lim_{y\to 0} f(x,y) = \frac{1}{x+1}; \quad \lim_{x\to 0}\psi(x) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 1$$

Приклад нерівності повторних границь

Нехай

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y+x^2+y^2}$$

Тоді

$$\varphi(y) = \lim_{x\to 0} f(x,y) = -\frac{1}{y+1}; \quad \lim_{y\to 0} \varphi(y) = \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x,y) = -1$$

$$\psi(x) = \lim_{y\to 0} f(x,y) = \frac{1}{x+1}; \quad \lim_{x\to 0} \psi(x) = \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y) = 1$$

Отже, повторні границі є різними.

Приклад, коли одна з повторних границь існує, а інша – ні

Нехай

$$f(x,y) = \frac{x \sin \frac{1}{x} + y}{x + y}$$

Приклад, коли одна з повторних границь існує, а інша – ні

Нехай

$$f(x,y) = \frac{x \sin \frac{1}{x} + y}{x + y}$$

Тоді

$$\varphi(y) = \lim_{x \to 0} f(x,y) = \frac{y}{y}$$

Приклад, коли одна з повторних границь існує, а інша – ні

Нехай

$$f(x, y) = \frac{x \sin \frac{1}{x} + y}{x + y}$$

Тоді

$$\varphi(y) = \lim_{x \to 0} f(x, y) = \frac{y}{y} = 1;$$

Приклад, коли одна з повторних границь існує, а інша – ні

Нехай

$$f(x,y) = \frac{x\sin\frac{1}{x} + y}{x+y}$$

Тоді

$$\varphi(y) = \lim_{x\to 0} f(x,y) = \frac{y}{y} = 1; \quad \lim_{y\to 0}\varphi(y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

Приклад, коли одна з повторних границь існує, а інша – ні

Нехай

$$f(x,y) = \frac{x \sin \frac{1}{x} + y}{x+y}$$

Тоді

$$\varphi(y) = \lim_{x\to 0} f(x,y) = \frac{y}{y} = 1; \quad \lim_{y\to 0} \varphi(y) = \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x,y) = 1$$

Приклад, коли одна з повторних границь існує, а інша – ні

Нехай

$$f(x,y) = \frac{x \sin \frac{1}{x} + y}{x+y}$$

Тоді

$$\varphi(y) = \lim_{x\to 0} f(x,y) = \frac{y}{y} = 1; \quad \lim_{y\to 0} \varphi(y) = \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x,y) = 1$$

$$\psi(x) = \lim_{y\to 0} f(x,y) = \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x}$$

Приклад, коли одна з повторних границь існує, а інша – ні

Нехай

$$f(x,y) = \frac{x \sin \frac{1}{x} + y}{x+y}$$

Тоді

$$\varphi(y) = \lim_{x \to 0} f(x,y) = \frac{y}{y} = 1; \qquad \lim_{y \to 0} \varphi(y) = \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x,y) = 1$$

$$\psi(x) = \lim_{y \to 0} f(x,y) = \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \sin \frac{1}{x};$$

Приклад, коли одна з повторних границь існує, а інша – ні

Нехай

$$f(x,y) = \frac{x\sin\frac{1}{x} + y}{x+y}$$

Тоді

$$\varphi(y) = \lim_{x\to 0} f(x,y) = \frac{y}{y} = 1; \quad \lim_{y\to 0}\varphi(y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 1$$

$$\psi(x) = \lim_{y\to 0} f(x,y) = \frac{x\sin\frac{1}{x}}{x} = \sin\frac{1}{x}; \quad \lim_{x\to 0}\psi(x) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$$

Приклад, коли одна з повторних границь існує, а інша – ні

Нехай

$$f(x,y)=\frac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}$$

Тоді

$$\varphi(y)=\lim_{x\to 0}f(x,y)=\frac{y}{y}=1;\qquad \lim_{y\to 0}\varphi(y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x,y)=1$$

$$\psi(x)=\lim_{y\to 0}f(x,y)=\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\sin\frac{1}{x};\qquad \lim_{x\to 0}\psi(x)=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x,y)\text{ – не існує}$$

Приклад, коли одна з повторних границь існує, а інша – ні

Нехай

$$f(x,y) = \frac{x \sin \frac{1}{x} + y}{x+y}$$

Тоді

$$\varphi(y) = \lim_{x\to 0} f(x,y) = \frac{y}{y} = 1; \quad \lim_{y\to 0} \varphi(y) = \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x,y) = 1$$

$$\psi(x) = \lim_{y\to 0} f(x,y) = \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \sin \frac{1}{x}; \quad \lim_{x\to 0} \psi(x) = \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y) \text{ – не існує}$$

Отже, одна з повторних границь існує, а інша – ні.

Зв'язок між повторною і кратною границями

Отже, можливість переставляння границь має бути обґрунтовано.

Зв'язок між повторною і кратною границями

Отже, можливість переставляння границь має бути обґрунтовано.
Теорема Якщо існує (скінченна або ні) подвійна границя

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$$

і для будь-якого $y \in Y$ існує (скінченна) звичайна границя за x $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = \varphi(y)$, існує повторна границя $\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y) = A$, яка дорівнює подвійній границі.

Доведення

Доведемо для випадку скінченних A, x_0 та y_0.

Доведення

Доведемо для випадку скінченних A, x_0 та y_0.
За означенням $\forall \varepsilon > 0 \; \exists r$: $|f(x, y) - A| < \varepsilon$, тільки-но $MM_0 < r$.

Доведення

Доведемо для випадку скінченних A, x_0 та y_0.
За означенням $\forall\varepsilon > 0\ \exists r$: $|f(x,y) - A| < \varepsilon$, тільки-но $MM_0 < r$.
Зафіксуємо y так, щоб $|y - y_0| < r$, і перейдемо у $|f(x,y) - A| < \varepsilon$ до границі $x \to x_0$.

Доведення

Доведемо для випадку скінченних A, x_0 та y_0.
За означенням $\forall \varepsilon > 0$ $\exists r$: $|f(x, y) - A| < \varepsilon$, тільки-но $MM_0 < r$.
Зафіксуємо y так, щоб $|y - y_0| < r$, і перейдемо у $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ до границі $x \to x_0$.
Оскільки $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = \varphi(y)$,

$$|\varphi(y) - A| \leqslant \varepsilon$$

Доведення

Доведемо для випадку скінченних A, x_0 та y_0.
За означенням $\forall\varepsilon > 0\ \exists r$: $|f(x,y) - A| < \varepsilon$, тільки-но $MM_0 < r$.
Зафіксуємо y так, щоб $|y - y_0| < r$, і перейдемо у $|f(x,y) - A| < \varepsilon$ до границі $x \to x_0$.
Оскільки $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y)$,

$$|\varphi(y) - A| \leqslant \varepsilon$$

Тоді

$$A = \lim_{y\to y_0} \varphi(y) = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

Доведення

Доведемо для випадку скінченних A, x_0 та y_0.
За означенням $\forall \varepsilon > 0 \; \exists r$: $|f(x,y) - A| < \varepsilon$, тільки-но $MM_0 < r$.
Зафіксуємо y так, щоб $|y - y_0| < r$, і перейдемо у $|f(x,y) - A| < \varepsilon$ до границі $x \to x_0$.
Оскільки $\lim\limits_{x \to x_0} f(x,y) = \varphi(y)$,

$$|\varphi(y) - A| \leqslant \varepsilon$$

Тоді

$$A = \lim_{y \to y_0} \varphi(y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y)$$

Що і слід було довести.

Доведення

Якщо, окрім умов, які вказано у формулюванні теореми, $\forall x \in X$ існує (скінченна) звичайна границя $\psi(x) = \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$, то, як випливає з доведеного, існує також і друга повторна границя $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$, що дорівнює також числу A (у цьому випадку обидві повторні границі є рівними).

Неперервність

<u>Означення:</u> Нехай точка $M_0(x_0, y_0)$ належить області визначення функції $f(x, y)$. Тоді функція $z = f(x, y)$ називається **неперервною** у точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \tag{1}$$

причому точка $M(x,\ y)$ прямує до точки $M_0(x_0, y_0)$ довільним чином.

Точки розриву

Якщо в будь-якій точці умова (1) не виконується, то ця точка називається **точкою розриву** функції $f(x, y)$.

Точки розриву

Якщо в будь-якій точці умова (1) не виконується, то ця точка називається **точкою розриву** функції $f(x, y)$.
Це може бути у наступних випадках:

1. Функція $z = f(x, y)$ не визначена у точці $M_0(x_0, y_0)$.

Точки розриву

Якщо в будь-якій точці умова (1) не виконується, то ця точка називається **точкою розриву** функції $f(x, y)$.
Це може бути у наступних випадках:

1. Функція $z = f(x, y)$ не визначена у точці $M_0(x_0, y_0)$.
2. Не існує границя $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$.

Точки розриву

Якщо в будь-якій точці умова (1) не виконується, то ця точка називається **точкою розриву** функції $f(x, y)$.
Це може бути у наступних випадках:

1. Функція $z = f(x, y)$ не визначена у точці $M_0(x_0, y_0)$.
2. Не існує границя $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$.
3. Ця границя існує, але вона не дорівнює $f(x_0, y_0)$.

Приклад

Дослідити функцію на неперервність $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

Розв'язання

Функція є суперпозицією (комбінацією) неперервних функцій, тому розрив можливий лише там, де функцію не визначено.

Розв'язання

Функція є суперпозицією (комбінацією) неперервних функцій, тому розрив можливий лише там, де функцію не визначено.
Функцію не визначено там, де $x^2 + y^2 = 0$.

Розв'язання

Функція є суперпозицією (комбінацією) неперервних функцій, тому розрив можливий лише там, де функцію не визначено.
Функцію не визначено там, де $x^2 + y^2 = 0$.
Звідси $x = y = 0$.

Розв'язання

Функція є суперпозицією (комбінацією) неперервних функцій, тому розрив можливий лише там, де функцію не визначено.
Функцію не визначено там, де $x^2 + y^2 = 0$.
Звідси $x = y = 0$.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{1}{x^2 + y^2} \text{ не існує}$$

Розв'язання

Функція є суперпозицією (комбінацією) неперервних функцій, тому розрив можливий лише там, де функцію не визначено.
Функцію не визначено там, де $x^2 + y^2 = 0$.
Звідси $x = y = 0$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{x^2+y^2} \text{ не існує}$$

Отже, функція є неперервною усюди, окрім точки $(0;0)$.

Властивості неперервних функцій

<u>**Властивість**</u> Якщо функція $f(x,\ y,\ ...)$ визначена і неперервна в замкнутій і обмеженій області D, то у цій області знайдеться принаймні одна точка $N(x_0,$ $y_0, \ldots)$, така, що для інших точок виконується нерівність

$$f\left(x_0, y_0, \ldots\right) \geqslant f\left(x, y, \ldots\right)$$

а також точка $N_1(x_{01}, y_{01}, \ldots)$, така, що для всіх інших точок виконується нерівність

$$f\left(x_{01}, y_{01}, \ldots\right) \leqslant f\left(x, y, \ldots\right)$$

тоді $f(x_0, y_0, \ldots) = M$ – **найбільше значення** функції, а $f(x_{01}, y_{01}, \ldots) = m$ – **найменше значення** функції $f(x, y, \ldots)$ в області D.

Властивості неперервних функцій

Неперервна функція в замкнутій і обмеженій області D досягає принаймні один раз найбільшого значення і один раз найменшого.

Властивості неперервних функцій

<u>**Властивість**</u> Якщо функція $f(x, y, \dots)$ визначена і неперервна в замкнутій обмеженій області D, а M і m – відповідно найбільше і найменше значення функції у цій області, то для будь-якої точки $\mu \in [m, M]$ існує точка $N_0(x_0, y_0, \dots)$ така, що $f(x_0, y_0, \dots) = \mu$.

Властивості неперервних функцій

<u>**Властивість**</u> Якщо функція $f(x, y, \dots)$ визначена і неперервна в замкнутій обмеженій області D, а M і m – відповідно найбільше і найменше значення функції у цій області, то для будь-якої точки $\mu \in [m, M]$ існує точка $N_0(x_0, y_0, \dots)$ така, що $f(x_0, y_0, \dots) = \mu$.
Простіше кажучи, неперервна функція приймає в області D всі проміжні значення між M і m. Наслідком цієї властивості може служити висновок, що якщо числа M і m різних знаків, то в області D функція принаймні один раз обертається у нуль.

Властивості неперервних функцій

Властивість Функція $f(x, y, \dots)$, неперервна в замкнутій обмеженій області D, **обмежена** у цій області, якщо існує таке число K, що для всіх точок області виконується нерівність $|f(x, y, ...)| < K$.

Властивості неперервних функцій

<ins>**Властивість**</ins> Якщо функція $f(x,\, y,\, \dots)$ визначена і неперервна в замкнутій обмеженій області D, то вона **рівномірно неперервна** у цій області, тобто для будь-якого додатного числа ε існує таке число $\Delta > 0$, що для будь-яких двох точок (x_1, y_1) і (x_2, y_2) області, що перебувають на відстані, меншій Δ, виконується нерівність

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$$

Властивості неперервних функцій

Наведені вище властивості аналогічні властивостям функцій однієї змінної, неперервним на відрізку.