Матриці. Основні означення. Дії над матрицями

Матриця

Матрицею розміру $m \times n$, де m – кількість рядків, n – кількість стовпців, називається таблиця чисел, розташованих у певному порядку. Ці числа називаються елементами матриці. Місце кожного елемента однозначно визначається номером рядка і стовпця, на перетині яких він перебуває. Елементи матриці позначаються a_{ij}, де i – номер рядка, а j – номер стовпця.

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Квадратна матриця

Якщо кількість стовпців матриці дорівнює кількості рядків $(m = n)$, то матриця називається **квадратною**.

Одинична матриця

Матриця вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = I$$

називається **одиничною матрицею**.

Симетрична матриця

Якщо $a_{mn} = a_{nm}$, то матриця називається **симетричною**.

Симетрична матриця

Якщо $a_{mn} = a_{nm}$, то матриця називається **симетричною**.

Приклад. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ – симетрична матриця

Діагональна матриця

Квадратна матриця виду $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ називається **діагональною** матрицею.

Верхня трикутна матриця

Матриця виду $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ називається **верхньою трикутною** матрицею.

Нижня трикутна матриця

Матриця виду $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ називається **нижньою трикутною** матрицею.

Трапецеподібні матриці

Означення. Якщо ж у матриці форма області ненульових елементів подібна до трапеції, така матриця називається (відповідно до форми області) верхньою або нижньою **трапецеподібною**.

Додавання і віднімання матриць

Додавання і віднімання матриць зводиться до відповідних операцій над їхніми елементами. Найголовнішою властивістю цих операцій є те, що вони визначені тільки для матриць однакового розміру. Таким чином, можна визначити операції додавання і віднімання матриць:

Додавання і віднімання матриць

Додавання і віднімання матриць зводиться до відповідних операцій над їхніми елементами. Найголовнішою властивістю цих операцій є те, що вони визначені тільки для матриць однакового розміру. Таким чином, можна визначити операції додавання і віднімання матриць:
Означення. Сумою (різницею) матриць є матриця, елементами якої є відповідно сума (різниця) елементів вихідних матриць.

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

$$C = A + B = B + A.$$

Множення або ділення на число

Операція **множення (ділення)** матриці будь-якого розміру на довільне число зводиться до множення (ділення) кожного елемента матриці на це число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha(A \pm B) = \alpha A \pm \alpha B$$

$$A(\alpha \pm \beta) = \alpha A \pm \beta A$$

Приклад

Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, знайти $2A + B$.

Приклад

Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, знайти $2A + B$.

$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}$.

Операція множення матриць

Добутком матриць називається матриця, елементи якої можуть бути обчислені за наступними формулами:

$$A \cdot B = C;$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Операція множення матриць

Добутком матриць називається матриця, елементи якої можуть бути обчислені за наступними формулами:

$$A \cdot B = C;$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

З наведеного визначення видно, що операція множення матриць визначена тільки для матриць, **кількість стовпців першої з яких дорівнює кількості рядків другої.**

Властивості операції множення матриць

1) Множення матриць не комутативне, тобто $AB \neq BA$, навіть якщо визначені обидва добутки. Однак, якщо для яких-небудь матриць співвідношення $AB = BA$ виконується, то такі матриці називаються комутуючими.

Властивості операції множення матриць

1) Множення матриць не комутативне, тобто $AB \neq BA$, навіть якщо визначені обидва добутки. Однак, якщо для яких-небудь матриць співвідношення $AB = BA$ виконується, то такі матриці називаються комутуючими. Найхарактернішим прикладом може слугувати одинична матриця, що є комутуючою з будь-якою іншою матрицею того ж розміру.

Властивості операції множення матриць

1) Множення матриць не комутативне, тобто $AB \neq BA$, навіть якщо визначені обидва добутки. Однак, якщо для яких-небудь матриць співвідношення $AB = BA$ виконується, то такі матриці називаються комутуючими.
Найхарактернішим прикладом може слугувати одинична матриця, що є комутуючою з будь-якою іншою матрицею того ж розміру.
Комутуючими можуть бути тільки квадратні матриці того самого порядку.
$A \cdot I = I \cdot A = A$.
Очевидно, що для будь-яких матриць виконується така властивість:
$A \cdot O = O$; $O \cdot A = O$, де O – **нульова** матриця.

Властивості операції множення матриць

2) Операція перемножування матриць **асоціативна,** тобто якщо визначені добутки AB і $(AB)C$, то визначені BC і $A(BC)$, і виконується рівність: $(AB)C = A(BC)$.

Властивості операції множення матриць

3) Операція множення матриць **дистрибутивна** стосовно додавання, тобто якщо мають сенс вирази $A(B+C)$ і $(A+B)C$, то відповідно:
$A(B+C) = AB + AC$,
$(A+B)C = AC + BC$.

Властивості операції множення матриць

4) Якщо добуток AB визначений, то для будь-якого числа α виконується співвідношення:
$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

Властивості операції множення матриць

5) Якщо визначено добуток AB, то визначено і добуток $B^T A^T$, і виконується рівність:
$(AB)^T = B^T A^T$, де індексом T позначається **транспонована** матриця.

Властивості операції множення матриць

<u>Означення</u>. Матрицю B називають **транспонованою** матрицею A, а перехід від A до B **транспонуванням**, якщо елементи кожного рядка матриці A записати у тім же порядку в стовпці матриці B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; B = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

інакше кажучи, $b_{ji} = a_{ij}$.
Як наслідок з попередньої властивості (5) можна записати, що:
$(ABC)^T = C^T B^T A^T$,
за умови, що визначено добуток матриць ABC.

Приклад

Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ і число $\alpha = 2$.

Знайти $A^T B + \alpha C$.

Приклад

Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ і число $\alpha = 2$.

Знайти $A^T B + \alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

Приклад

Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ і число $\alpha = 2$.

Знайти $A^T B + \alpha C$.

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

$A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$;

$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $A^T B + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Приклад

Знайти добуток матриць $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot 4 & 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приклад

Знайти добуток матриць $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1 \\ 4\cdot 2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\cdot 1 + 4 \cdot +1 \cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

Приклад

Знайти добуток матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

Приклад

Знайти добуток матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}.$$