СЛАР загального вигляду. Лінійний простір. Лінійні оператори.

Метод Гауса (Gauss elimination)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Метод Гауса (Gauss elimination)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Розділимо обидві частини 1-го рівняння на $a_{11} \neq 0$, потім:

Метод Гауса (Gauss elimination)

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

Розділимо обидві частини 1-го рівняння на $a_{11} \neq 0$, потім:

1) помножимо на a_{21} і віднімемо із другого рівняння

Метод Гауса (Gauss elimination)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Розділимо обидві частини 1-го рівняння на $a_{11} \neq 0$, потім:
1) помножимо на a_{21} і віднімемо із другого рівняння
2) помножимо на a_{31} і віднімемо із третього рівняння

Метод Гауса (Gauss elimination)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Розділимо обидві частини 1-го рівняння на $a_{11} \neq 0$, потім:
1) помножимо на a_{21} і віднімемо із другого рівняння
2) помножимо на a_{31} і віднімемо із третього рівняння тощо.

Метод Гауса

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + ... + d_{1n}x_n = d_1 \\ d_{22}x_2 + d_{23}x_3 + ... + d_{2n}x_n = d_2 \\ .... \\ d_{m2}x_2 + d_{m3} + ... + d_{mn}x_n = d_m \end{cases}, \text{ де } d_{1j} = a_{1j}/a_{11}, \quad j = 2, 3, \ldots, n+1...$$

$$d_{ij} = a_{ij} - a_{i1}d_{1j},\ i = 2, 3, \ldots, n;\ j = 2, 3, \ldots, n+1...$$

Метод Гауса

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + ... + d_{1n}x_n = d_1 \\ d_{22}x_2 + d_{23}x_3 + ... + d_{2n}x_n = d_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d_{m2}x_2 + d_{m3} + ... + d_{mn}x_n = d_m \end{cases}, \text{ де } d_{1j} = a_{1j}/a_{11}, \quad j = 2, 3, \dots, n+1...$$

$d_{ij} = a_{ij} - a_{i1}d_{1j}$, $i = 2, 3, \dots, n$; $j = 2, 3, \dots, n+1$... Далі повторюємо цієї ж дії для другого рівняння системи, потім – для третього тощо. Це **прямий хід** методу Гауса.

Метод Гауса

Далі, останнє з рівнянь системи після завершення прямого ходу методу Гауса міститиме лише одну невідому.
Визначивши її і підставивши отримане значення до усіх інших рівнянь системи, зможемо визначити з передостаннього рівняння ще одну невідому.
Далі повторюємо дію для усіх інших рівнянь системи і отримуємо остаточний розв'язок.

Метод Гауса

Далі, останнє з рівнянь системи після завершення прямого ходу методу Гауса міститиме лише одну невідому.
Визначивши її і підставивши отримане значення до усіх інших рівнянь системи, зможемо визначити з передостаннього рівняння ще одну невідому.
Далі повторюємо дію для усіх інших рівнянь системи і отримуємо остаточний розв'язок.
Це **зворотний хід** методу Гауса.

Приклад

Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гауса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Розв'язання

Розширена матриця системи:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right)$$

Розв'язання

Розширена матриця системи:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[\xrightarrow{R_3 - 7R_1}]{R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{array}\right)$$

Розв'язання

Розширена матриця системи:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - 7R_1]{R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Запис у формі рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}$$

Розв'язання

Зворотний хід:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Розв'язання

Зворотний хід:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\xrightarrow{R_2-7R_3}]{R_1+3R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -9 \\ 0 & 5 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Розв'язання

Зворотний хід:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{R_1+3R_3} \\ \xrightarrow{R_2-7R_3} \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -9 \\ 0 & 5 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{R_1+2/5R_2} \\ \xrightarrow{R_2/5} \\ \xrightarrow{R_3/(-1)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Розв'язання

Зворотний хід:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{R_1+3R_3} \\ \xrightarrow{R_2-7R_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -9 \\ 0 & 5 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{R_1+2/5R_2} \\ \xrightarrow{R_2/5} \\ \xrightarrow{R_3/(-1)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Звідки одержуємо: $x_1 = 1$; $x_2 = 5$; $x_3 = 2$.

Однорідні СЛАР

Однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Однорідні СЛАР

Однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

1. якщо $\mathrm{rank}A = n$, то система має єдиний (тривіальний) розв'язок.
2. якщо $\mathrm{rank}A < n$, то система має безліч розв'язків.

Фундаментальна система розв'язків

<u>**Означення.**</u> Фундаментальною системою розв'язків системи однорідних лінійних рівнянь називається така лінійно незалежна сукупність її розв'язків, для якої усякий розв'язок даної системи є якоюсь лінійною комбінацією розв'язків з цієї сукупності.

Фундаментальна система розв'язків

Теорема Для довільної системи однорідних лінійних рівнянь з рангом $\mathrm{rank}A < n$ існує фундаментальна система розв'язків. Кількість розв'язків цієї системи дорівнює $n - \mathrm{rank}A$.

Базисні і вільні невідомі

Якщо базисний мінор матриці A може бути побудований на коефіцієнтах до певної групи невідомих, то ці невідомі називаються **базисними**. Решта невідомих називаються **вільними**.

Визначення фундаментальної системи розв'язків

Надаючи *вільним* невідомим сталих ненульових (наприклад одиничних) значень можна за допомогою методів розв'язування неоднорідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь знайти усі *базисні* невідомі. Використовуючи замість вільних невідомих довільні сталі можемо знайти лінійно незалежну систему з $n - \mathrm{rank} A$ розв'язків. Можна довести, що така система утворює *фундаментальну систему розв'язків*.

Приклад:

Знайти фундаментальну систему розв'язків такої системи:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання

Складемо матрицю системи і виконаємо елементарні перетворення з метою зведення матриці до верхньої трапецеподібної:

Розв'язання

Складемо матрицю системи і виконаємо елементарні перетворення з метою зведення матриці до верхньої трапецеподібної:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \\ 4 & -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Розв'язання

Складемо матрицю системи і виконаємо елементарні перетворення з метою зведення матриці до верхньої трапецеподібної:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \\ 4 & -4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{R_2 - 3R_1} \\ \xrightarrow{R_3 - R_1} \\ \xrightarrow{R_4 - 2R_1} \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 12 & -10 & -10 \\ 0 & 6 & -5 & -5 \\ 0 & 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

Розв'язання

Складемо матрицю системи і виконаємо елементарні перетворення з метою зведення матриці до верхньої трапецеподібної:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \\ 4 & -4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{R_2-3R_1} \\ \xrightarrow{R_3-R_1} \\ \xrightarrow{R_4-2R_1} \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 12 & -10 & -10 \\ 0 & 6 & -5 & -5 \\ 0 & 6 & -5 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{R_2/2} \\ \xrightarrow{R_3-R_2/2} \\ \xrightarrow{R_4-R_2/2} \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rank} A = 2$$

Базисних невідомих – 2

Розв'язання

Складемо матрицю системи і виконаємо елементарні перетворення з метою зведення матриці до верхньої трапецеподібної:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \\ 4 & -4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{R_2-3R_1} \\ \xrightarrow{R_3-R_1} \\ \xrightarrow{R_4-2R_1} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 12 & -10 & -10 \\ 0 & 6 & -5 & -5 \\ 0 & 6 & -5 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{R_2/2} \\ \xrightarrow{R_3-R_2/2} \\ \xrightarrow{R_4-R_2/2} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rank} A = 2$$

Базисних невідомих – 2
Вільних невідомих – $4 - \mathrm{rank} A = 4 - 2 = 2$.

Розв'язання

Складемо матрицю системи і виконаємо елементарні перетворення з метою зведення матриці до верхньої трапецеподібної:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \\ 4 & -4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{R_2-3R_1} \\ \xrightarrow{R_3-R_1} \\ \xrightarrow{R_4-2R_1} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 12 & -10 & -10 \\ 0 & 6 & -5 & -5 \\ 0 & 6 & -5 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{R_2/2} \\ \xrightarrow{R_3-R_2/2} \\ \xrightarrow{R_4-R_2/2} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rank} A = 2$$

Базисних невідомих – 2

Вільних невідомих – $4 - \mathrm{rank} A = 4 - 2 = 2$.

Визначник мінора, отриманого викреслюванням двох останніх рядків і стовпчиків не дорівнює нулеві $\Rightarrow$ його можна вважати базисним, x_1 та x_2 – базисні. x_3 та x_4 – вільні. Позначимо $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$.

Розв'язання

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3C_1 + 2C_2 = 0 \\ 6x_2 - 5C_1 - 5C_2 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3C_1 + 2C_2 = 0 \\ 6x_2 - 5C_1 - 5C_2 = 0 \end{cases}$$

$$6x_2 = 5C_1 + 5C_2; \Rightarrow x_2 = \frac{5}{6}C_1 + \frac{5}{6}C_2;$$

$$2x_1 - 5\cdot\frac{5}{6}C_1 - 5\cdot\frac{5}{6}C_2 + 3C_1 + 2C_2 = 0; \Rightarrow 2x_1 - \frac{7}{6}C_1 - \frac{13}{6}C_2 = 0; \Rightarrow x_1 = \frac{7}{12}C_1 + \frac{13}{12}C_2.$$

Розв'язання

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3C_1 + 2C_2 = 0 \\ 6x_2 - 5C_1 - 5C_2 = 0 \end{cases}$$

$$6x_2 = 5C_1 + 5C_2; \Rightarrow x_2 = \frac{5}{6}C_1 + \frac{5}{6}C_2;$$

$$2x_1 - 5\cdot\frac{5}{6}C_1 - 5\cdot\frac{5}{6}C_2 + 3C_1 + 2C_2 = 0; \Rightarrow 2x_1 - \frac{7}{6}C_1 - \frac{13}{6}C_2 = 0; \Rightarrow x_1 = \frac{7}{12}C_1 + \frac{13}{12}C_2.$$

Запишемо отриманий розв'язок у стовпчик:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{12}C_1 + \frac{13}{12}C_2 \\ \frac{5}{6}C_1 + \frac{5}{6}C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \frac{7}{12} \\ \frac{5}{6} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{13}{12} \\ \frac{5}{6} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язання

Записані нами два стовпчики значень у дужках останньої рівності і є, згідно з вищевикладеними міркуваннями, фундаментальною системою розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Представлення загального розв'язку неоднорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Можна довести, що розв'язок такої системи (через лінійність) є сумою загального розв'язку однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (цей розв'язок представляється через фундаментальну систему розв'язків) і довільного частинного розв'язку неоднорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Можна довести, що розв'язок такої системи (через лінійність) є сумою загального розв'язку однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (цей розв'язок представляється через фундаментальну систему розв'язків) і довільного частинного розв'язку неоднорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
Частинний розв'язок неоднорідної системи можна отримати підставлянням до неї замість вільних невідомих довільних ненульових значень.

Лінійний (векторний) простір

Означення. Лінійним (векторним) простором називають множину елементів L, для яких визначені операції додавання і множення на число із такими властивостями:

Лінійний (векторний) простір

Означення. Лінійним (векторним) простором називають множину елементів L, для яких визначені операції додавання і множення на число із такими властивостями:

1. Комутативність $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x}$

Лінійний (векторний) простір

<u>**Означення.**</u> Лінійним (векторним) простором називають множину елементів L, для яких визначені операції додавання і множення на число із такими властивостями:

1. Комутативність $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x}$
2. Асоціативність $(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) + \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z})$

Лінійний (векторний) простір

Означення. Лінійним (векторним) простором називають множину елементів L, для яких визначені операції додавання і множення на число із такими властивостями:

1. Комутативність $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y} = \overrightarrow{y}+\overrightarrow{x}$
2. Асоціативність $(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) + \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z})$
3. Існує такий нульовий вектор $\overrightarrow{O}$, що $\overrightarrow{O} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$ для $\forall \overrightarrow{x} \in L$

Лінійний (векторний) простір

Означення. Лінійним (векторним) простором називають множину елементів L, для яких визначені операції додавання і множення на число із такими властивостями:

1. Комутативність $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y} = \overrightarrow{y}+\overrightarrow{x}$
2. Асоціативність $(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) + \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z})$
3. Існує такий нульовий вектор $\overrightarrow{O}$, що $\overrightarrow{O} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$ для $\forall \overrightarrow{x} \in L$
4. Для $\forall \overrightarrow{x} \in L$ існує вектор $\overrightarrow{y} = -\overrightarrow{x}$, такий, що $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{O}$

Лінійний (векторний) простір

Означення. Лінійним (векторним) простором називають множину елементів L, для яких визначені операції додавання і множення на число із такими властивостями:

1. Комутативність $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y} = \overrightarrow{y}+\overrightarrow{x}$
2. Асоціативність $(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) + \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z})$
3. Існує такий нульовий вектор $\overrightarrow{O}$, що $\overrightarrow{O} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$ для $\forall \overrightarrow{x} \in L$
4. Для $\forall \overrightarrow{x} \in L$ існує вектор $\overrightarrow{y} = -\overrightarrow{x}$, такий, що $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{O}$
5. $1 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$

Лінійний (векторний) простір

Означення. Лінійним (векторним) простором називають множину елементів L, для яких визначені операції додавання і множення на число із такими властивостями:

1. Комутативність $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y} = \overrightarrow{y}+\overrightarrow{x}$
2. Асоціативність $(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}) + \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + (\overrightarrow{y}+\overrightarrow{z})$
3. Існує такий нульовий вектор $\overrightarrow{O}$, що $\overrightarrow{O} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$ для $\forall \overrightarrow{x} \in L$
4. Для $\forall \overrightarrow{x} \in L$ існує вектор $\overrightarrow{y} = -\overrightarrow{x}$, такий, що $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{O}$
5. $1 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$
6. $\alpha(\beta\overrightarrow{x}) = (\alpha\beta)\overrightarrow{x}$

Лінійний (векторний) простір

Означення. Лінійним (векторним) простором називають множину елементів L, для яких визначені операції додавання і множення на число із такими властивостями:

1. Комутативність $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y} = \overrightarrow{y}+\overrightarrow{x}$
2. Асоціативність $(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) + \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z})$
3. Існує такий нульовий вектор $\overrightarrow{O}$, що $\overrightarrow{O} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$ для $\forall \overrightarrow{x} \in L$
4. Для $\forall \overrightarrow{x} \in L$ існує вектор $\overrightarrow{y} = -\overrightarrow{x}$, такий, що $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{O}$
5. $1 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$
6. $\alpha(\beta \overrightarrow{x}) = (\alpha\beta)\overrightarrow{x}$
7. Розподільний закон $(\alpha + \beta)\overrightarrow{x} = \alpha \overrightarrow{x} + \beta \overrightarrow{x}$

Лінійний (векторний) простір

<u>**Означення.**</u> Лінійним (векторним) простором називають множину елементів L, для яких визначені операції додавання і множення на число із такими властивостями:

1. Комутативність $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y} = \overrightarrow{y}+\overrightarrow{x}$
2. Асоціативність $(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) + \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z})$
3. Існує такий нульовий вектор $\overrightarrow{O}$, що $\overrightarrow{O} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$ для $\forall \overrightarrow{x} \in L$
4. Для $\forall \overrightarrow{x} \in L$ існує вектор $\overrightarrow{y} = -\overrightarrow{x}$, такий, що $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{O}$
5. $1 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$
6. $\alpha(\beta \overrightarrow{x}) = (\alpha\beta)\overrightarrow{x}$
7. Розподільний закон $(\alpha + \beta)\overrightarrow{x} = \alpha \overrightarrow{x} + \beta \overrightarrow{x}$
8. $\alpha(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \alpha \overrightarrow{x} + \alpha \overrightarrow{y}$

Вектори

Означення: Елементи L називаються **векторами**.

Вектори

<u>**Означення:**</u> Елементи L називаються **векторами**.

Важливо не плутати поняття вектора, наведене вище з поняттям вектора як направленого відрізка на площині або у просторі.

Вектори

<u>Означення:</u> Елементи L називаються **векторами**.

Важливо не плутати поняття вектора, наведене вище з поняттям вектора як направленого відрізка на площині або у просторі.
Направлені відрізки є всього лише частинним випадком елементів лінійного (векторного) простору. Лінійний (векторний) простір – поняття ширше.

Вектори

<u>Означення:</u> Елементи L називаються **векторами**.

Важливо не плутати поняття вектора, наведене вище з поняттям вектора як направленого відрізка на площині або у просторі.
Направлені відрізки є всього лише частинним випадком елементів лінійного (векторного) простору. Лінійний (векторний) простір – поняття ширше.
Прикладами таких просторів можуть слугувати множина дійсних чисел, множина векторів на площині і у просторі, матриці тощо.

Властивості лінійних просторів

1. У кожному лінійному просторі існує тільки один нульовий елемент ($\overrightarrow{O}$).

Властивості лінійних просторів

1. У кожному лінійному просторі існує тільки один нульовий елемент $(\vec{O})$.
2. Для кожного елемента існує тільки один протилежний елемент.

Властивості лінійних просторів

1. У кожному лінійному просторі існує тільки один нульовий елемент $(\overrightarrow{O})$.
2. Для кожного елемента існує тільки один протилежний елемент.
3. Для кожного $\overrightarrow{x} \in L$ виконується $0 \cdot \overrightarrow{x} = 0$

Властивості лінійних просторів

1. У кожному лінійному просторі існує тільки один нульовий елемент $(\overrightarrow{O})$.
2. Для кожного елемента існує тільки один протилежний елемент.
3. Для кожного $\overrightarrow{x} \in L$ виконується $0 \cdot \overrightarrow{x} = 0$
4. Для кожного $\alpha \in \mathbb{R}$ і $\overrightarrow{O}$ виконується $\alpha \cdot \overrightarrow{O} = \overrightarrow{O}$

Властивості лінійних просторів

1. У кожному лінійному просторі існує тільки один нульовий елемент $(\overrightarrow{O})$.
2. Для кожного елемента існує тільки один протилежний елемент.
3. Для кожного $\overrightarrow{x} \in L$ виконується $0 \cdot \overrightarrow{x} = 0$
4. Для кожного $\alpha \in \mathbb{R}$ і $\overrightarrow{O}$ виконується $\alpha \cdot \overrightarrow{O} = \overrightarrow{O}$
5. Якщо $\alpha \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{O}$, то $\alpha = 0$ або $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{O}$

Властивості лінійних просторів

1. У кожному лінійному просторі існує тільки один нульовий елемент $(\overrightarrow{O})$.
2. Для кожного елемента існує тільки один протилежний елемент.
3. Для кожного $\overrightarrow{x} \in L$ виконується $0 \cdot \overrightarrow{x} = 0$
4. Для кожного $\alpha \in \mathbb{R}$ і $\overrightarrow{O}$ виконується $\alpha \cdot \overrightarrow{O} = \overrightarrow{O}$
5. Якщо $\alpha \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{O}$, то $\alpha = 0$ або $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{O}$
6. $(-1)\overrightarrow{x} = -\overrightarrow{x}$

Лінійні перетворення

<u>**Означення:**</u> Будемо вважати, що в лінійному просторі L задане деяке лінійне перетворення (linear transform) A, якщо будь-якому елементу $\overrightarrow{x} \in L$ за деяким правилом ставиться у відповідність елемент $A\overrightarrow{x} \in L$.

Лінійні перетворення

<u>Означення:</u> Будемо вважати, що в лінійному просторі L задане деяке лінійне перетворення (linear transform) A, якщо будь-якому елементу $\overrightarrow{x} \in L$ за деяким правилом ставиться у відповідність елемент $A\overrightarrow{x} \in L$.
<u>Означення:</u> Перетворення A називається **лінійним**, якщо для будь-яких векторів $\overrightarrow{x} \in L$ і $\overrightarrow{y} \in L$ і кожного α виконується

$$A(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = A\overrightarrow{x} + A\overrightarrow{y}$$

$$A(\alpha\overrightarrow{x}) = \alpha A\overrightarrow{x}$$

Тотожне лінійне перетворення

<u>**Означення:**</u> Лінійне перетворення називається **тотожним** (identity), якщо воно перетворює елемент лінійного простору сам у себе.

$$I\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$$

Приклад

Чи є A лінійним перетворенням. $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{x_0}$; $\overrightarrow{x_0} \neq 0$.

Розв'язання

Запишемо перетворення A для якогось елемента $\overrightarrow{y}$.

$$A\overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x_0}.$$

Розв'язання

Запишемо перетворення A для якогось елемента $\overrightarrow{y}$.

$$A\overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x_0}.$$

Перевіримо, чи виконується правило операції додавання для цього перетворення

$$A(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x} + \overrightarrow{x_0};$$

Розв'язання

Запишемо перетворення A для якогось елемента $\overrightarrow{y}$.

$$A\overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x_0}.$$

Перевіримо, чи виконується правило операції додавання для цього перетворення

$$A(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x} + \overrightarrow{x_0};$$

$$A(\overrightarrow{x}) + A(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{x_0} + \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x_0}.$$

Розв'язання

Запишемо перетворення A для якогось елемента $\overrightarrow{y}$.

$$A\overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x_0}.$$

Перевіримо, чи виконується правило операції додавання для цього перетворення

$$A(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x} + \overrightarrow{x_0};$$

$$A(\overrightarrow{x}) + A(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{x_0} + \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x_0}.$$

Це виконується, лише якщо $\overrightarrow{x_0} = 0$, тобто перетворення A нелінійне.

Лінійна комбінація

Означення: Якщо у просторі L є вектори лінійного перетворення $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$, то інший вектор $\overrightarrow{b} = \alpha\overrightarrow{a_1} + \beta\overrightarrow{a_2} + ... + \lambda\overrightarrow{a_n}$ є **лінійною комбінацією** векторів $\overrightarrow{a_i}$.

Лінійна незалежність

<u>Означення:</u> Якщо $\alpha\overrightarrow{a_1} + \beta\overrightarrow{a_2} + ... + \lambda\overrightarrow{a_n} = 0$ тільки при $\alpha = \beta = \ldots = \lambda = 0$, то вектори $\overrightarrow{a_i}$ називаються **лінійно незалежними**.

Вимірність простору. Базис

Означення: Якщо в лінійному просторі L є n лінійно незалежних векторів, але будь-які $n+1$ векторів лінійно залежні, то простір L називається n-**вимірним**, а сукупність лінійно незалежних векторів називається **базисом** лінійного простору L.

Вимірність простору. Базис

<u>**Означення:**</u> Якщо в лінійному просторі L є n лінійно незалежних векторів, але будь-які $n+1$ векторів лінійно залежні, то простір L називається **n-вимірним**, а сукупність лінійно незалежних векторів називається **базисом** лінійного простору L.

<u>**Наслідок:**</u> Будь-який вектор лінійного простору може бути представлений у вигляді лінійної комбінації векторів базису.

Матриця лінійного перетворення

Нехай в n-вимірному лінійному просторі з базисом $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ задано лінійне перетворення A.

Матриця лінійного перетворення

Нехай в n-вимірному лінійному просторі з базисом $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\ldots,\overrightarrow{e_n}$ задано лінійне перетворення A.
Вектори $A\overrightarrow{e_1}$, $A\overrightarrow{e_2},\ldots,$ $A\overrightarrow{e_n}$ – також вектори цього простору і їх можна представити у вигляді лінійної комбінації векторів базису:

$$A\overrightarrow{e_1} = a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{12}\overrightarrow{e_2} + \cdots + a_{1n}\overrightarrow{e_n}$$
$$A\overrightarrow{e_2} = a_{21}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2} + \cdots + a_{n2}\overrightarrow{e_n}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A\overrightarrow{e_n} = a_{n1}\overrightarrow{e_1} + a_{n2}\overrightarrow{e_2} + \cdots + a_{nn}\overrightarrow{e_n}$$

Матриця лінійного перетворення

Нехай в n-вимірному лінійному просторі з базисом $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ задано лінійне перетворення A.

Вектори $A\overrightarrow{e_1}$, $A\overrightarrow{e_2}, \ldots,$ $A\overrightarrow{e_n}$ – також вектори цього простору і їх можна представити у вигляді лінійної комбінації векторів базису:

$$A\overrightarrow{e_1} = a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{12}\overrightarrow{e_2} + \cdots + a_{1n}\overrightarrow{e_n}$$
$$A\overrightarrow{e_2} = a_{21}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2} + \cdots + a_{n2}\overrightarrow{e_n}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A\overrightarrow{e_n} = a_{n1}\overrightarrow{e_1} + a_{n2}\overrightarrow{e_2} + \cdots + a_{nn}\overrightarrow{e_n}$$

Тоді матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ називається **матрицею лінійного перетворення A.**

Матриця лінійного перетворення

Якщо у просторі L взяти вектор $\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$, то $A\overrightarrow{x} \in L$.
$A\overrightarrow{x} = x'_1\overrightarrow{e_1} + x'_2\overrightarrow{e_2} + ... + x'_n\overrightarrow{e_n}$, де

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n$$

$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n$$

Ці рівності можна назвати лінійним перетворенням у базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$... У матричному вигляді:

$$\overrightarrow{x} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix}, A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x'}$$

Приклад

Знайти матрицю лінійного перетворення, заданого у вигляді:

$$
\begin{aligned}
x' &= x + y \\
y' &= y + z \\
z' &= z + x
\end{aligned}
$$

Розв'язання

$$x' = 1 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z$$
$$y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z$$
$$z' = 1 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Добуток лінійних перетворень

<u>**Означення:**</u> Якщо вектор $\overrightarrow{x}$ переводиться у вектор $\overrightarrow{y}$ лінійним перетворенням з матрицею A, а вектор $\overrightarrow{y}$ у вектор $\overrightarrow{z}$ лінійним перетворенням з матрицею B, то послідовне застосування цих перетворень рівносильне лінійному перетворенню, що переводить вектор $\overrightarrow{x}$ у вектор $\overrightarrow{z}$ (воно називається **добутком складових перетворень**).

$$C = B \cdot A$$

Власні значення і власні вектори лінійного перетворення

Означення: Нехай L – заданий n-вимірний лінійний простір. Ненульовий вектор $\overrightarrow{v} \in L$ називається **власним вектором (eigen vector)** лінійного перетворення A, якщо існує таке число λ, що виконується рівність:

$$A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}.$$

При цьому число λ називається **власним значенням (характеристичним числом, eigen value)** лінійного перетворення A, що відповідає вектору $\overrightarrow{v}$.

Характеристичне рівняння

Перетворимо рівняння для власних векторів, перенісши його праву частину ліворуч і винісши спільний множник:

$$A\overrightarrow{v} - \lambda\overrightarrow{v} = (A - \lambda I)\overrightarrow{v} = 0.$$

Характеристичне рівняння

Перетворимо рівняння для власних векторів, перенісши його праву частину ліворуч і винісши спільний множник:

$$A\overrightarrow{v} - \lambda\overrightarrow{v} = (A - \lambda I)\overrightarrow{v} = 0.$$

За теоремою Кронекера-Капеллі записана СЛАР має нетривіальний розв'язок, лише якщо її визначник дорівнює нулеві.

Характеристичне рівняння

Перетворимо рівняння для власних векторів, перенісши його праву частину ліворуч і винісши спільний множник:

$$A\overrightarrow{v} - \lambda\overrightarrow{v} = (A - \lambda I)\overrightarrow{v} = 0.$$

За теоремою Кронекера-Капеллі записана СЛАР має нетривіальний розв'язок, лише якщо її визначник дорівнює нулеві.

Означення: Рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

називається **характеристичним рівнянням,** а його ліва частина – **характеристичним многочленом** лінійного перетворення A.

Приклад

Знайти характеристичні числа і власні вектори лінійного перетворення з матрицею $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Запишемо лінійне перетворення у вигляді: $\begin{aligned} x_1' &= \lambda x_1 = 5x_1 + 4x_2 \\ x_2' &= \lambda x_2 = 2x_1 + 3x_2 \end{aligned}$

Складемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 15 - 3\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0;$$

Корені характеристичного рівняння: $\lambda_1 = 7$; $\lambda_2 = 1$;

Розв'язання

Для кореня $\lambda_1 = 7$: $\begin{cases} (5-7)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-7)x_2 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$

Розв'язання

Для кореня $\lambda_1 = 7$: $\begin{cases} (5-7)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-7)x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$

Таким чином, в однорідній СЛАР є лише одна базисна невідома, а зв'язок між невідомими є таким: $x_1 - 2x_2 = 0$.

Розв'язання

Для кореня $\lambda_1 = 7$: $\begin{cases} (5-7)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-7)x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$

Таким чином, в однорідній СЛАР є лише одна базисна невідома, а зв'язок між невідомими є таким: $x_1 - 2x_2 = 0$.

Будемо вважати вільною змінною x_1.

Розв'язання

Для кореня $\lambda_1 = 7$: $\begin{cases} (5-7)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-7)x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$

Таким чином, в однорідній СЛАР є лише одна базисна невідома, а зв'язок між невідомими є таким: $x_1 - 2x_2 = 0$.

Будемо вважати вільною змінною x_1.

Позначаємо $x_1 = C$, тоді власні вектори для другого кореня характеристичного рівняння будуть такими:

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ C/2 \end{pmatrix},$$

де C – параметр.

Розв'язання

Для кореня $\lambda_2 = 1$: $\begin{cases} (5-1)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-1)x_2 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$

Таким чином, в однорідній СЛАР є лише одна базисна невідома, а зв'язок між невідомими є таким: $x_1 + x_2 = 0$.

Розв'язання

Для кореня $\lambda_2 = 1$: $\begin{cases} (5-1)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-1)x_2 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$

Таким чином, в однорідній СЛАР є лише одна базисна невідома, а зв'язок між невідомими є таким: $x_1 + x_2 = 0$.

Будемо вважати вільною змінною x_1.

Розв'язання

Для кореня $\lambda_2 = 1$: $\begin{cases} (5-1)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-1)x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$

Таким чином, в однорідній СЛАР є лише одна базисна невідома, а зв'язок між невідомими є таким: $x_1 + x_2 = 0$.

Будемо вважати вільною змінною x_1.

Позначаємо $x_1 = C$, тоді власні вектори для другого кореня характеристичного рівняння будуть такими:

$$\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ -C \end{pmatrix},$$

де C – параметр.

Розв'язання

Отримані власні вектори можна записати у вигляді:

$$\overrightarrow{v_1} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{v_2} = C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Приклад

Знайти характеристичні числа і власні вектори лінійного перетворення A, матриця лінійного перетворення $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Складемо характеристичне рівняння:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\left((5-\lambda)(1-\lambda)-1\right)-(1-\lambda-3)+3(1-15+3\lambda)=0$$

$$(1-\lambda)\left(5-5\lambda-\lambda+\lambda^2-1\right)+2+\lambda-42+9\lambda=0$$

$$(1-\lambda)\left(4-6\lambda+\lambda^2\right)+10\lambda-40=0$$

$$4-6\lambda+\lambda^2-4\lambda+6\lambda^2-\lambda^3+10\lambda-40=0$$

$$-\lambda^3+7\lambda^2-36=0$$

Власні значення: $\lambda_1=-2$; $\lambda_2=3$; $\lambda_3=6$;

Розв'язання

1) Для $\lambda_1 = -2$: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

Розв'язання

1) Для $\lambda_1 = -2$: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

Маємо систему лінійних однорідних рівнянь, у якій дві базисні невідомі і одна вільна.

Розв'язання

1) Для $\lambda_1 = -2$: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

Маємо систему лінійних однорідних рівнянь, у якій дві базисні невідомі і одна вільна.

Якщо прийняти $x_1 = C$, то $\begin{cases} 7x_2 + x_3 = -C \\ x_2 + 3x_3 = -3C \end{cases}$ $\Rightarrow x_2 = 0;\ x_3 = -C;$

Розв'язання

1) Для $\lambda_1 = -2$: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

Маємо систему лінійних однорідних рівнянь, у якій дві базисні невідомі і одна вільна.

Якщо прийняти $x_1 = C$, то $\begin{cases} 7x_2 + x_3 = -C \\ x_2 + 3x_3 = -3C \end{cases} \quad \Rightarrow x_2 = 0;\ x_3 = -C;$

Власні вектори: $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} C.$

Розв'язання

2) Для $\lambda_2 = 3$: $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

Розв'язання

2) Для $\lambda_2 = 3$: $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

Якщо прийняти $x_1 = C$, то $\begin{cases} 2x_2 + x_3 = -C \\ x_2 - 2x_3 = -3C \end{cases}$ $\Rightarrow x_2 = -C;\ x_3 = C.$

Розв'язання

2) Для $\lambda_2 = 3$: $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

Якщо прийняти $x_1 = C$, то $\begin{cases} 2x_2 + x_3 = -C \\ x_2 - 2x_3 = -3C \end{cases}$ $\Rightarrow x_2 = -C;\ x_3 = C.$

Власні вектори: $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} C.$

Розв'язання

3) Для $\lambda_3 = 6$: $\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

Розв'язання

3) Для $\lambda_3 = 6$: $\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

Якщо прийняти $x_1 = C$, то $\begin{cases} -x_2 + x_3 = -C \\ x_2 - 5x_3 = -3C \end{cases}$ $\Rightarrow x_2 = 2C;\ x_3 = C.$

Розв'язання

3) Для $\lambda_3 = 6$: $\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

Якщо прийняти $x_1 = C$, то $\begin{cases} -x_2 + x_3 = -C \\ x_2 - 5x_3 = -3C \end{cases}$ $\Rightarrow x_2 = 2C;\ x_3 = C.$

Власні вектори: $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} C.$

Власні вектори операторів, заданих симетричними матрицями

Якщо матриця симетрична, власні вектори є перпендикулярними. Зокрема, перпендикулярними є власні вектори для матриць, які складено із нормальних і дотичних напружень або моментів інерції.