Криві другого порядку (продовження)

Гіпербола

Якщо a'_{11} і a'_{22} мають різні знаки, перетворене рівняння, $a'_{11}\overline{x}^2 + a'_{22}\overline{y}^2 + a'_{33} = 0$, можна звести до такого вигляду:

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2} - \frac{\overline{y}^2}{b^2} = \pm 1. \tag{1}$$

Рівняння (1) називають *канонічним рівнянням гіперболи*.

Гіпербола

Якщо a'_{11} і a'_{22} мають різні знаки, перетворене рівняння, $a'_{11}\overline{x}^2 + a'_{22}\overline{y}^2 + a'_{33} = 0$, можна звести до такого вигляду:

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2} - \frac{\overline{y}^2}{b^2} = \pm 1. \tag{1}$$

Рівняння (1) називають *канонічним рівнянням гіперболи.*
Для визначеності, у подальшому в основному будемо розглядати випадок рівняння гіперболи, у якому у правій частині (1) стоїть 1 (основне рівняння).

Гіпербола

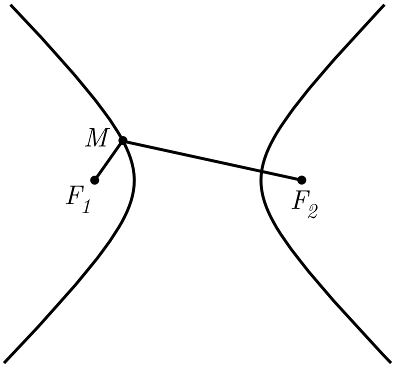
Якщо a'_{11} і a'_{22} мають різні знаки, перетворене рівняння, $a'_{11}\overline{x}^2 + a'_{22}\overline{y}^2 + a'_{33} = 0$, можна звести до такого вигляду:

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2} - \frac{\overline{y}^2}{b^2} = \pm 1. \tag{1}$$

Рівняння (1) називають *канонічним рівнянням гіперболи.*
Для визначеності, у подальшому в основному будемо розглядати випадок рівняння гіперболи, у якому у правій частині (1) стоїть 1 (основне рівняння). Випадок рівняння з -1 у правій частині зводиться до цього випадку переставлянням координат x та y. Гіпербола, яка відповідає цьому випадку, називається *спряженою гіперболою.*

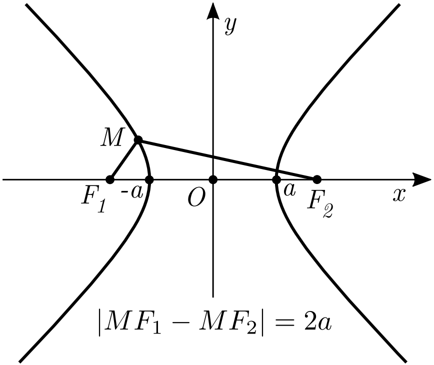
Класичне означення гіперболи

Гіперболою називається геометричне місце точок площини, модуль різниці відстаней кожної з яких до двох наперед заданих точок, які називаються *фокусами*, є величиною сталою.



Виведення канонічного рівняння з класичного визначення

Нехай маємо гіперболу з фокусами $F_1\left(-c;0\right)$ та $F_2\left(c;0\right)$ та точку $M\left(x;y\right)$, а модуль різниці відстаней MF_1 та MF_2 дорівнює $2a$.



Виведення канонічного рівняння з класичного визначення

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}; MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

$$|MF_1 - MF_2| = \left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

Виведення канонічного рівняння з класичного визначення

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}; MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

$$|MF_1 - MF_2| = \left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2.$$

Виведення канонічного рівняння з класичного визначення

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}; MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

$$|MF_1 - MF_2| = \left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2.$$

Після зведення подібних і скорочення на 4:

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

Виведення канонічного рівняння з класичного визначення

$$\left(a^2 - c^2\right) x^2 + a^2 y^2 = a^2 \left(a^2 - c^2\right).$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $b^2 = a^2 - c^2$.

Виведення канонічного рівняння з класичного визначення

$$\left(a^2 - c^2\right) x^2 + a^2 y^2 = a^2 \left(a^2 - c^2\right).$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $b^2 = a^2 - c^2$.

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right),$$

звідки $|x| \geqslant a$.

Виведення канонічного рівняння з класичного визначення

$$\left(a^2 - c^2\right) x^2 + a^2 y^2 = a^2 \left(a^2 - c^2\right).$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $b^2 = a^2 - c^2$.

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \left(x^2 - a^2\right),$$

звідки $|x| \geqslant a$.
Лінія гіперболи складається з двох частин, для $x \leqslant -a$ та для $x \geqslant a$, відповідно. Ці частини називаються *лівою та правою гілками гіперболи.*

Фокальні радіуси гіперболи

$$F_1M = r_1; MF_2 = r_2.$$

Фокальні радіуси гіперболи

$$F_1M = r_1; MF_2 = r_2.$$

$$\begin{cases} r_1 = -a - \dfrac{c}{a}x; \\ r_2 = a - \dfrac{c}{a}x. \end{cases}$$

Вершини і вісі гіперболи

Так само, як і еліпс, гіпербола є симетричною відносно координатних осей і має центр.

Вершини і вісі гіперболи

Так само, як і еліпс, гіпербола є симетричною відносно координатних осей і має центр.
У випадку основного рівняння гіперболи точки перетину лінії гіперболи з осями координат, $(-a;0)$ та $(a;0)$ називаються *вершинами гіперболи*.

Вершини і вісі гіперболи

Так само, як і еліпс, гіпербола є симетричною відносно координатних осей і має центр.
У випадку основного рівняння гіперболи точки перетину лінії гіперболи з осями координат, $(-a; 0)$ та $(a; 0)$ називаються *вершинами гіперболи*.
Відстань між ними, $2a$, називається *дійсною віссю гіперболи*, а відстань між вершинами спряженої гіперболи, $(0; -b)$ та $(0; b)$, $2b$, називається *уявною віссю гіперболи*.

Асимптоти гіперболи

Якщо у виразі для знаходження y з канонічного рівняння гіперболи:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

припустити, що x є дуже великою величиною, можна вважати що a^2 змінює вираз під коренем незначно. Тоді маємо

$$y = \pm\frac{b}{a}x. \tag{2}$$

Асимптоти гіперболи

Якщо у виразі для знаходження y з канонічного рівняння гіперболи:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

припустити, що x є дуже великою величиною, можна вважати що a^2 змінює вираз під коренем незначно. Тоді маємо

$$y = \pm\frac{b}{a}x. \tag{2}$$

Рівняння прямих (2), до яких гранично наближається лінія гіперболи при віддаленні від початку координат, називаються рівняннями *асимптот гіперболи*. На рисунку асимптоти позначено штриховими лініями.

Асимптоти гіперболи

Якщо у виразі для знаходження y з канонічного рівняння гіперболи:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

припустити, що x є дуже великою величиною, можна вважати що a^2 змінює вираз під коренем незначно. Тоді маємо

$$y = \pm\frac{b}{a}x. \tag{2}$$

Рівняння прямих (2), до яких гранично наближається лінія гіперболи при віддаленні від початку координат, називаються рівняннями *асимптот гіперболи*. На рисунку асимптоти позначено штриховими лініями. Побудову ескізу гіперболи слід розпочинати з побудови вершин та асимптот.

Асимптоти гіперболи

Якщо у виразі для знаходження y з канонічного рівняння гіперболи:

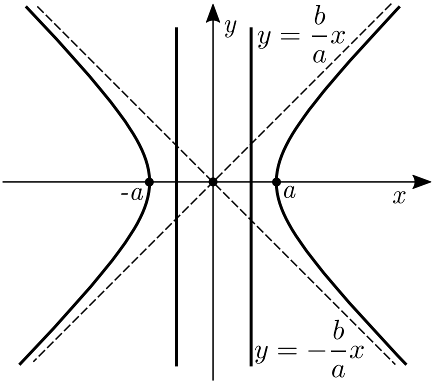
$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

припустити, що x є дуже великою величиною, можна вважати що a^2 змінює вираз під коренем незначно. Тоді маємо

$$y = \pm \frac{b}{a}x. \tag{2}$$

Рівняння прямих (2), до яких гранично наближається лінія гіперболи при віддаленні від початку координат, називаються рівняннями *асимптот гіперболи*. На рисунку асимптоти позначено штриховими лініями.
Побудову ескізу гіперболи слід розпочинати з побудови вершин та асимптот.
Гіпербола, у рівнянні якої $a = b$, називається *рівнобічною*. Асимптотами такої гіперболи є бісектриси чвертей координатної системи.

Побудова гіперболи



Ексцентриситет гіперболи

Ексцентриситетом гіперболи називають величину

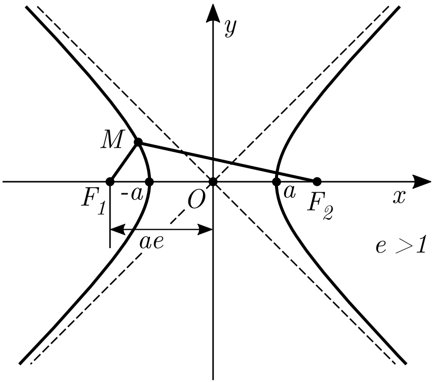
$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Ексцентриситет гіперболи

Ексцентриситетом гіперболи називають величину

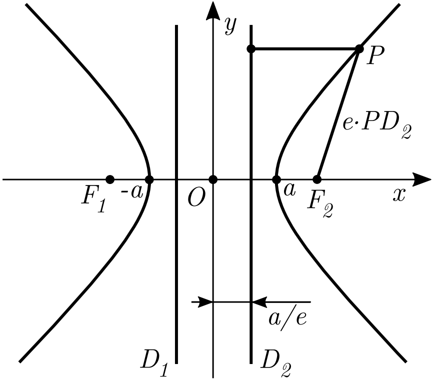
$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Для гіперболи ексцентриситет $e > 1$.

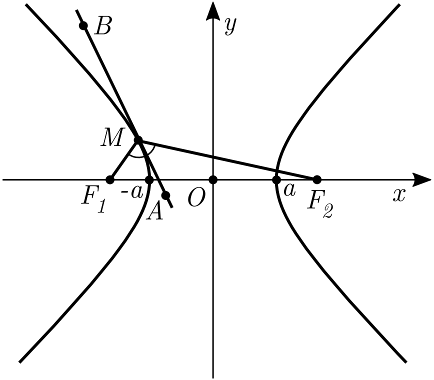


Директриси гіперболи

Прямі $x = \pm\dfrac{a}{e}$ називаються *директрисами*(напрямними) гіперболи (на рисунку директриси позначено D_1 та D_2. Особливістю директриси є те, що відношення фокального радіуса будь-якої точки гіперболи до відповідної відстані до директриси є величиною сталою, що дорівнює ексцентриситету.



Оптичні властивості гіперболи



$$\angle AMF_1 = \angle BMF_2$$

Парабола

Якщо, наприклад, $a'_{11} = 0$ перетворене рівняння, $a'_{22}\overline{y}^2 + 2a'_{13}\overline{x} = 0$, можна звести до такого вигляду:

$$y^2 = 2px. \tag{3}$$

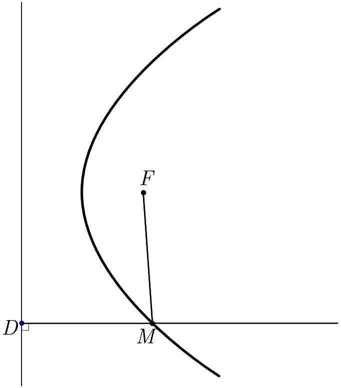
Рівняння (3) називається *канонічним рівнянням параболи.*

Класичне означення параболи

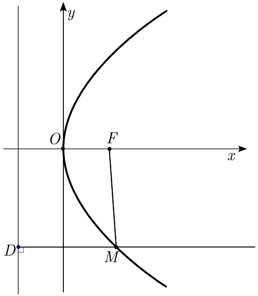
Параболою називається геометричне місце точок площини, рівновіддалених від фіксованої точки (*фокуса*) та фіксованої прямої (*директриси*), що не проходить через цю точку.

Класичне означення параболи

Параболою називається геометричне місце точок площини, рівновіддалених від фіксованої точки (*фокуса*) та фіксованої прямої (*директриси*), що не проходить через цю точку.

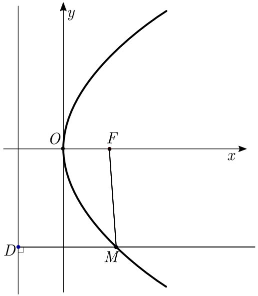


Виведення канонічного рівняння з класичного визначення



$$F(p/2;0); M\left(x;y\right); MD = MF$$

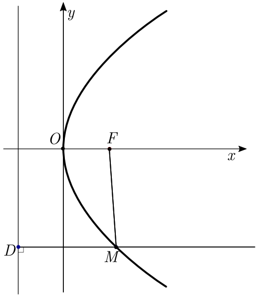
Виведення канонічного рівняння з класичного визначення



$$F(p/2;0);M\,(x;y)\,;MD=MF$$

$$x+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}.$$

Виведення канонічного рівняння з класичного визначення



$$F(p/2;0); M\left(x;y\right); MD = MF$$

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

$$y^2 = 2px.$$

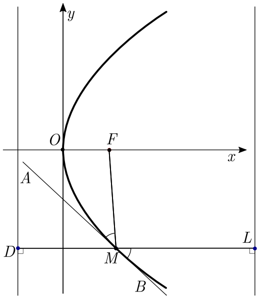
Парабола – не центральна крива

Парабола є симетричною лише відносно вісі y, тому не є центральною кривою (не має центра).

Ексцентриситет параболи

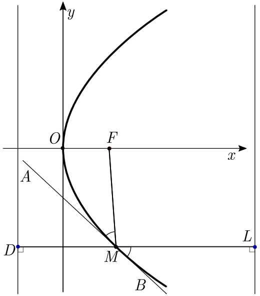
Ексцентриситет параболи з міркувань щодо відстані точок параболи від директриси та фокуса слід прийняти рівним одиниці: $e = 1$.

Оптична властивість параболи



$$\angle AMF = \angle BML.$$

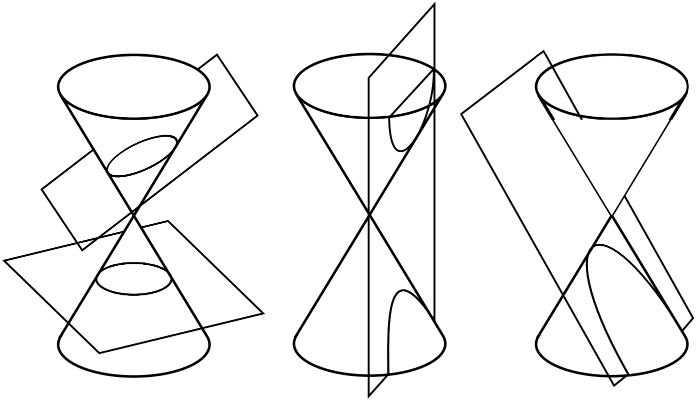
Оптична властивість параболи



$$\angle AMF = \angle BML.$$

Оптичні властивості параболи використовують для концентрації хвиль у фокусі (параболічні антени) або створення паралельного потоку хвиль, що надходять від точкового джерела випромінювання (прожектори і гучномовці).

Криві другого порядку – конічні перерізи



Оскільки усі криві другого порядку є конічними перерізами, проблеми, пов'язані з розрахунками на міцність та проєктувальними розрахунками елементів конструкцій з граничними точками, що лежать на кривих другого порядку є доволі важливими.

Полярне рівняння кривих другого порядку

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi},$$

p — так званий фокальний параметр,
e — ексцентриситет.

Полярне рівняння кривих другого порядку

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi},$$

p — так званий фокальний параметр,
e — ексцентриситет.
Полярну систему координат при цьому буде розташовано так, що полюс перебуватиме у фокусі, а полярну вісь буде спрямовано у бік, протилежний до найближчої до цього фокуса директриси.

Перетин кривої другого порядку з прямою

$$\begin{cases} x = x_0 + lt; \\ y = y_0 + mt, \end{cases} \tag{4}$$

де виберемо компоненти напрямного вектора прямої, $\overrightarrow{u} = (l; m)$ так, щоб $|\overrightarrow{u}| = 1$. Підставивши (4) до загального рівняння кривої другого порядку, отримаємо таке квадратне рівняння відносно t:

$$Lt^2 + 2Mt + N = 0,$$

де

$$L = a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2;$$

$$M = l\left(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}\right) + m\left(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}\right);$$

$$N = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}.$$

Можливі випадки перетину

Можливі точки перетину через M_1 $(t = t_1)$ та M_2 $(t = t_2)$.

Можливі випадки перетину

Можливі точки перетину через M_1 $(t = t_1)$ та M_2 $(t = t_2)$.
Випадки для коренів отриманого квадратного рівняння:

Можливі випадки перетину

Можливі точки перетину через M_1 $(t = t_1)$ та M_2 $(t = t_2)$.
Випадки для коренів отриманого квадратного рівняння:
1) Дискримінант рівняння, $LN - M^2$, є більшим за нуль, а $N \neq 0$. Тоді матимемо дві точки перетину прямої і кривої, які не збігаються з точкою $M_0\,(x_0; y_0)$, через яку проведено пряму. Відрізок перетину, M_1M_2, у цьому випадку називається *хордою* (подібно до хорди при перетині прямої і кола). $M_1M_0 = |t_1|$, а $M_2M_0 = |t_2|$. Якщо крива другого порядку є центральною (еліпс або гіпербола), хорди, що проходять через центр, називаються *діаметрами кривої другого порядку*.

Можливі випадки перетину

Можливі точки перетину через M_1 $(t = t_1)$ та M_2 $(t = t_2)$.
Випадки для коренів отриманого квадратного рівняння:
1) Дискримінант рівняння, $LN - M^2$, є більшим за нуль, а $N \neq 0$. Тоді матимемо дві точки перетину прямої і кривої, які не збігаються з точкою $M_0\,(x_0; y_0)$, через яку проведено пряму. Відрізок перетину, M_1M_2, у цьому випадку називається *хордою* (подібно до хорди при перетині прямої і кола).
$M_1M_0 = |t_1|$, а $M_2M_0 = |t_2|$. Якщо крива другого порядку є центральною (еліпс або гіпербола), хорди, що проходять через центр, називаються *діаметрами кривої другого порядку*.
Усі діаметри поділятимуться центром навпіл. M_0 — центр $\Rightarrow t_1 + t_2 = 0$.

Можливі випадки перетину

Можливі точки перетину через M_1 $(t = t_1)$ та M_2 $(t = t_2)$.
Випадки для коренів отриманого квадратного рівняння:
1) Дискримінант рівняння, $LN - M^2$, є більшим за нуль, а $N \neq 0$. Тоді матимемо дві точки перетину прямої і кривої, які не збігаються з точкою $M_0\,(x_0; y_0)$, через яку проведено пряму. Відрізок перетину, M_1M_2, у цьому випадку називається *хордою* (подібно до хорди при перетині прямої і кола).
$M_1M_0 = |t_1|$, а $M_2M_0 = |t_2|$. Якщо крива другого порядку є центральною (еліпс або гіпербола), хорди, що проходять через центр, називаються *діаметрами кривої другого порядку*.
Усі діаметри поділятимуться центром навпіл. M_0 — центр $\Rightarrow t_1 + t_2 = 0$.
З теореми Вієта $M = 0$.

Можливі випадки перетину

Можливі точки перетину через M_1 $(t = t_1)$ та M_2 $(t = t_2)$.
Випадки для коренів отриманого квадратного рівняння:
1) Дискримінант рівняння, $LN - M^2$, є більшим за нуль, а $N \neq 0$. Тоді матимемо дві точки перетину прямої і кривої, які не збігаються з точкою $M_0\,(x_0; y_0)$, через яку проведено пряму. Відрізок перетину, M_1M_2, у цьому випадку називається *хордою* (подібно до хорди при перетині прямої і кола).
$M_1M_0 = |t_1|$, а $M_2M_0 = |t_2|$. Якщо крива другого порядку є центральною (еліпс або гіпербола), хорди, що проходять через центр, називаються *діаметрами кривої другого порядку*.
Усі діаметри поділятимуться центром навпіл. M_0 — центр $\Rightarrow t_1 + t_2 = 0$.
З теореми Вієта $M = 0$.
Умови для пошуку центра:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0; \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0. \end{cases}$$

Можливі випадки перетину

2) Дискримінант рівняння, $LN - M^2$, є більшим за нуль, а $N = 0$. Тоді маємо дві точки перетину, а точка M_0 збігається з точкою M_1 або M_2.

Можливі випадки перетину

3) $M = N = 0$, $L \neq 0$ — усі точки M_0, M_1 та M_2 стягуються у одну точку. Отже, маємо дотик кривої і прямої. Виразивши l та m з параметричного рівняння прямої, рівняння дотичної у цьому випадку можна записати так:

$$F_x\left(x - x_0\right) + F_y\left(y - y_0\right) = 0,$$

де

$$F_x = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}; F_y = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}.$$

Можливі випадки перетину

4) $N = L = 0$ — одна точка перетину (пряма паралельна до вісі симетрії параболи).

Можливі випадки перетину

5) $L = M = 0$, $N \neq 0$ — пряма і крива другого порядку не перетинаються. Таке можливо, якщо ми маємо справу з прямою поза межами еліпса чи параболи або асимптотою гіперболи. Тому зі співвідношення $L = 0$, можна отримати умову асимптотичності прямої:

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0.$$

Загальна схема зведення рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду

З теорії квадратичних форм відомо, що якщо записати коефіцієнти при старших степенях у загальному рівнянні кривої другого порядку у формі матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

то оскільки матриця симетрична (елемент на другій позиції першого рядка дорівнює елементу на першій позиції другого рядка), власні вектори лінійного оператора, який вона задає, будуть перпендикулярні.

Загальна схема зведення рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду

З теорії квадратичних форм відомо, що якщо записати коефіцієнти при старших степенях у загальному рівнянні кривої другого порядку у формі матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

то оскільки матриця симетрична (елемент на другій позиції першого рядка дорівнює елементу на першій позиції другого рядка), власні вектори лінійного оператора, який вона задає, будуть перпендикулярні.
λ_1 та λ_2 – коефіцієнтами у канонічному вигляді квадратичної форми загального рівняння. Заміна для канонічного вигляду квадратичної форми:

$$x = b_{11}x_1 + b_{12}y_1 + x_0;$$
$$y = b_{21}x_1 + b_{22}y_1 + y_0.$$

Загальна схема зведення рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду

Якщо квадратична форма не є виродженою (задає криву саме *другого* порядку), у випадку, якщо λ_1 та λ_2 одного знаку, матимемо еліпс, якщо різних — гіперболу, якщо одне з власних значень рівне нулю — параболу. Канонічним виглядом нашого рівняння буде (еліпс або гіпербола):

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + a_{33}^{'} = 0$$

або (парабола)

$$y_1^2 + a_{13}^{'} x_1 = 0.$$

Загальна схема зведення рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду

Якщо квадратична форма не є виродженою (задає криву саме *другого* порядку), у випадку, якщо λ_1 та λ_2 одного знаку, матимемо еліпс, якщо різних — гіперболу, якщо одне з власних значень рівне нулю — параболу. Канонічним виглядом нашого рівняння буде (еліпс або гіпербола):

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + a_{33}^{'} = 0$$

або (парабола)

$$y_1^2 + a_{13}^{'} x_1 = 0.$$

При цьому напрямок осей нової системи координат, $x_1 O_1 y_1$ визначається власними векторами, що відповідають власним значенням λ_1 та λ_2 відповідно.

Загальна схема зведення рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду

Отже схема зведення рівняння кривої до канонічного вигляду має бути такою:

- Записати матрицю A та знайти власні значення та власні вектори лінійного оператора, який нею задається.

Загальна схема зведення рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду

Отже схема зведення рівняння кривої до канонічного вигляду має бути такою:

- Записати матрицю A та знайти власні значення та власні вектори лінійного оператора, який нею задається.
- За допомогою власних векторів знайти підстановку, що повертає координати до напрямків, що збігаються з напрямками канонічної системи координат.

Загальна схема зведення рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду

Отже схема зведення рівняння кривої до канонічного вигляду має бути такою:

- Записати матрицю A та знайти власні значення та власні вектори лінійного оператора, який нею задається.
- За допомогою власних векторів знайти підстановку, що повертає координати до напрямків, що збігаються з напрямками канонічної системи координат.
- Виділивши повні квадрати відносно нових змінних у перетвореному рівнянні, встановити положення початку координат канонічної системи координат та остаточний вигляд канонічного рівняння кривої другого порядку.

Інваріанти загального рівняння лінії другого порядку

Інваріантом перетворення повороту координатної системи та перенесення початку координат для загального рівняння кривої другого порядку є функції параметрів цього рівняння, які не змінюють свого значення після перетворення.

Інваріанти загального рівняння лінії другого порядку

Інваріантом перетворення повороту координатної системи та перенесення початку координат для загального рівняння кривої другого порядку є функції параметрів цього рівняння, які не змінюють свого значення після перетворення.

$$I_1 = a_{11} + a_{22}; I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}; I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Класифікація кривих другого порядку за інваріантами

Умова	Рівняння	Назва лінії
$I_2 \neq 0; I_3 \neq 0$	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \dfrac{I_3}{I_2} = 0$	$I_2 > 0; I_2 I_3 < 0$ — еліпс
		$I_2 > 0; I_2 I_3 > 0$ — уявний еліпс
		$I_2 < 0$ — гіпербола
$I_2 = 0; I_3 \neq 0$	$\lambda_1 y_1^2 \pm \sqrt{-\dfrac{I_3}{I_1}} x_1 = 0$	парабола
$I_3 = 0; I_2 \neq 0$	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 = 0$	$I_2 > 0$ — точка
		$I_2 < 0$ — дві прямі, що перетинаються
$I_3 = 0; I_2 = 0$	$\lambda_1 x_1^2 + a'_{33} = 0$	$a'_{33}\lambda_1 > 0$ — дві уявні прямі
		$a'_{33}\lambda_1 < 0$ — дві паралельні прямі
		$a'_{33} = 0$ — одна пряма

Приклад

Дано гіперболу $16x^2 - 9y^2 = 25$. Знайти: 1) напіввісі a та b; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 4) рівняння асимптот; 5) рівняння директрис.

Розв'язання

1) Для визначення a та b приведемо рівняння до канонічного вигляду, поділивши обидві його частини на 25 (так, щоб отримати у правій частині рівняння 1):

$$\frac{x^2}{\frac{25}{16}} - \frac{y^2}{\frac{25}{9}} = 1.$$

Порівнюючи отриманий результат з загальною формою запису канонічного рівняння, отримуємо

$$a = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}; b = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}.$$

Розв'язання

2) За відомою формулою напіввідстань між фокусами, c, для гіперболи можна знайти з рівності $c^2 = a^2 + b^2$. Отже,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{25}{9}} = \frac{25}{12}.$$

Оскільки маємо справу з основним рівнянням, фокуси буде розташовано у точках $F_1\left(-\frac{25}{12}; 0\right)$ та $F_2\left(\frac{25}{12}; 0\right)$.

Розв'язання

3) Значення ексцентриситету гіперболи обчислюється за формулою $e = \dfrac{c}{a}$.

Отже, у нашій задачі $e = \left.\dfrac{25}{12}\right/\dfrac{5}{4} = \dfrac{5}{3}$.

Розв'язання

4) Асимптоти гіперболи мають рівняння $y = \pm\frac{b}{a}x$. Отже, у нашій задачі рівняннями асимптот будуть такі рівняння:

$$y = \pm\frac{4}{3}x.$$

Розв'язання

5) Директрисами будуть прямі $x = \pm\frac{a}{e}$. Отже, у нашій задачі $x = \pm\frac{5}{4}\Big/\frac{5}{3} = \pm\frac{3}{4}$.

Приклад

Знайти рівняння гіперболи, якщо її ексцентриситет $e = 2$ і фокуси збігаються з фокусами еліпса $9x^2 + 25y^2 = 225$.

Розв'язання

Приводимо рівняння еліпса до канонічного вигляду діленням обох його частин на 225. Оскільки $225/9 = 25$, а $225/25 = 9$, маємо

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Отже, велика напіввісь дорівнює $\sqrt{25} = 5$, мала напіввісь дорівнює $\sqrt{9} = 3$, а фокуси еліпса розташовано на вісі x. Для еліпса $c = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Оскільки фокуси гіперболи за умовою збігаються з фокусами еліпса, це значення є напіввідстанню між фокусами гіперболи.

Ексцентриситет гіперболи – $e = c/a$. Тому напіввісь гіперболи можна знайти за формулою $a = c/e = 4/2 = 2$.

Крім того, іншу піввісь можна знайти з формули $b^2 = c^2 - a^2$. Отже, $b = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$. Остаточно, рівнянням шуканої гіперболи буде

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

Приклад

Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву.

$$x^2 + y^2 - 4xy - 2x + 4y = 1$$

Розв'язання

У нашому випадку матриця A матиме вигляд (оскільки коефіцієнт при xy є подвоєним значенням a_{12}, в нашому випадку $a_{12} = \dfrac{-4}{2} = -2$):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Власні значення знаходимо з рівняння $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ або, після розкриття визначника, $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$.
Розв'язками цього рівняння є, очевидно, $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = 3$. Ці значення різних знаків, отже маємо рівняння гіперболи.

Розв'язання

Почергово знайдемо власні вектори, що відповідають цим власним значенням:

$$\lambda_1 = -1 : \begin{pmatrix} 1-(-1) & -2 \\ -2 & 1-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2a_1 - 2a_2 = 0, \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Якщо тепер покласти $a_2 = C$, то можна записати власний вектор $\vec{u}_1$, що відповідає власному значенню $\lambda_1 = -1$, у вигляді
$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Аналогічно знаходимо для власного значення $\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} 1-3 & -2 \\ -2 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2a_1 + 2a_2 = 0, \Rightarrow a_1 = -a_2 = -C.$$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Для знаходження першої підстановки нам слід знайти одиничні вектори напрямлені за власними векторами. Для цього слід розділити кожну компоненту власного вектора на його модуль отримані значення будуть компонентами ортів нової системи координат у початковій системі координат:

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}; \quad \vec{v}_2 = \frac{\vec{u}_2}{|\vec{u}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Координати цих ортів є коефіцієнтами при x та y у виразах для координат у повернутій системі координат. Тобто координати $x^{'}$ та y' у повернутій системі координат виражаються через x та y так:

$$x^{'} = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y;$$
$$y^{'} = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y.$$

Розв'язання

Звідси можемо знайти x та y за допомогою правила Крамера:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'; \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'. \end{aligned} \tag{5}$$

Підставимо отримані значення до вихідного рівняння:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 - 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) \times$$
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) + 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) = 1$$

Після спрощення матимемо

$$-x'^2 + 3y'^2 + \sqrt{2}x' + 3\sqrt{2}y' - 1 = 0.$$

Розв'язання

Виокремлюємо повні квадрати

$$-\left(x'^2-\sqrt{2}x'+\frac{1}{2}\right)+3\left(y'^2+\sqrt{2}y'+\frac{1}{2}\right)-2=0\Rightarrow$$
$$-\left(x'-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+3\left(y'+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=2.$$

Виконуючи тепер підстановку

$$x_1=x'-\frac{1}{\sqrt{2}};\quad y_1=y'+\frac{1}{\sqrt{2}},\tag{6}$$

отримуємо канонічну форму рівняння нашої гіперболи

$$\frac{x_1^2}{2}-\frac{y_1^2}{\frac{2}{3}}=-1.$$

Розв'язання

Початок нової системи координат $x_1O_1y_1$ — точка O_1, матиме у системі координат $x^{'}Oy^{'}$ координати, що визначаються з рівнянь (6), — $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Беручи до уваги рівняння (5), знаходимо координати точки O_1 у початковій системі координат:

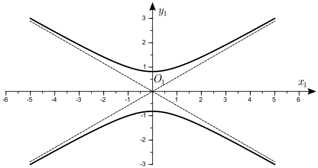
$$x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1;$$
$$y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

Отже координати точки O_1 у початковій системі координат — $O_1(1;0)$.

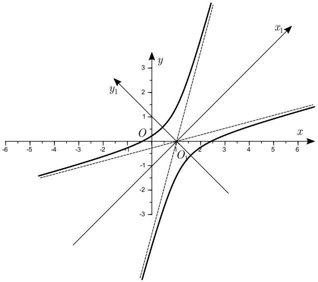
Розв'язання

Для того щоб правильно намалювати гіперболу, нам слід спочатку визначити положення її вершин та рівняння асимптот у новій системі координат. Очевидно, що маємо справу з другою формою канонічного рівняння гіперболи, коли вершини гіперболи розташовано на вісі y_1. Порівнюючи наше рівняння з загальною формою канонічного рівняння для таких гіпербол $\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1\right)$, маємо: $a = \sqrt{2}; b = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Отже, вершини розташовано у точках $y_1 = \pm b = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, а асимптоти мають рівняння $y_1 = \pm\frac{b}{a}x_1 = \pm\frac{x_1}{\sqrt{3}}$.

Розв'язання



(а) Допоміжна система координат



(б) Основна система координат

Спочатку слід намалювати на окремому малюнку гіперболу у перетвореній системі координат $x_1O_1y_1$, рис. а. Потім намалювати початкову та перетворену системи координат та гіперболу у початковій системі координат, рис. б.