Комплексні числа

Основні означення

Означення. **Множиною комплексних чисел** називається множина упорядкованих пар дійсних чисел, додавання і множення яких виконується за такими правилами:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y');$$
$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx').$$

Уявна одиниця

Приклад

$$(0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0)$$

Уявна одиниця

Приклад

$$(0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0).$$

Уявна одиниця

Приклад

$$(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1, 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0).$$

$i=(0,1)$ – уявна одиниця.

Алгебраїчна форма запису комплексного числа

.

Означення. **Комплексним числом** z називається вираз $z = a + ib$, де a і b – дійсні числа, i – уявна одиниця, що визначається співвідношенням:

$$i^2 = -1.$$

При цьому число a називається **дійсною частиною** числа z ($a = \mathrm{Re} z$), а b – **уявною частиною** ($b = \mathrm{Im} z$).
Якщо $a = \mathrm{Re} z = 0$, то число z буде суто уявним, якщо $b = \mathrm{Im} z = 0$, то число z буде дійсним.

Комплексно спряжені числа

<u>Означення.</u> Числа $z = a + ib$ і $\bar{z} = a - ib$ називаються **комплексно спряженими.**

Рівні числа. Нуль

Означення. Два комплексних числа $z_1 = a_1 + ib_1$ і $z_2 = a_2 + ib_2$ називаються рівними, якщо відповідно рівні їхні дійсні і уявні частини:

$$a_1 = a_2; \qquad b_1 = b_2;$$

Рівні числа. Нуль

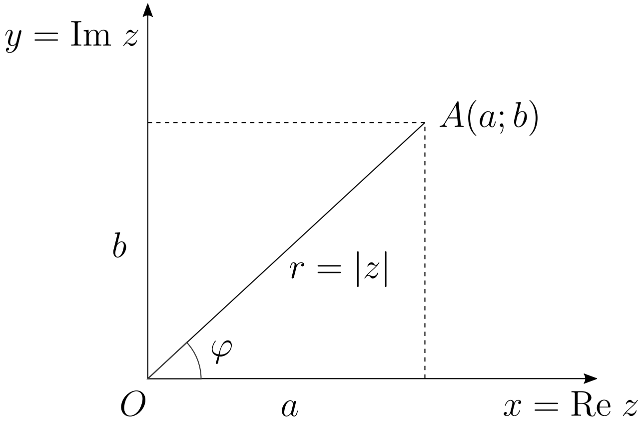
Означення. Два комплексних числа $z_1 = a_1 + ib_1$ і $z_2 = a_2 + ib_2$ називаються рівними, якщо відповідно рівні їхні дійсні і уявні частини:

$$a_1 = a_2; \qquad b_1 = b_2;$$

Означення. Комплексне число дорівнює нулю, якщо відповідно дорівнюють нулю дійсна і уявна частини.

$$a = b = 0.$$

Геометричне представлення



Тригонометрична форма комплексного числа

$$a = r\cos\varphi; \quad b = r\sin\varphi$$

Тригонометрична форма комплексного числа

$$a = r\cos\varphi; \quad b = r\sin\varphi$$

$$z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Така форма запису називається **тригонометричною формою запису комплексного числа.**

Модуль і аргумент комплексного числа

r – **модуль** комплексного числа
φ – **аргумент** комплексного числа.

Модуль і аргумент комплексного числа

r – **модуль** комплексного числа

φ – **аргумент** комплексного числа.

$$r = |z|\,; \qquad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Модуль і аргумент комплексного числа

r – **модуль** комплексного числа
φ – **аргумент** комплексного числа.

$$r = |z|\,; \qquad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = \operatorname{Arg} z$$

Модуль і аргумент комплексного числа

r – **модуль** комплексного числа
φ – **аргумент** комплексного числа.

$$r = |z|\,; \qquad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = \operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg} \frac{b}{a};$$

Модуль і аргумент комплексного числа

r – **модуль** комплексного числа
φ – **аргумент** комплексного числа.

$$r = |z|\,; \qquad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = \operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg} \frac{b}{a};$$

$$|z| = |\overline{z}|\,; \qquad Arg\, z = -Arg\, \overline{z}.$$

Дії з комплексними числами

1) **Додавання і віднімання.**

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

$$|z| = \sqrt{(a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2}$$

Дії з комплексними числами

1) **Додавання і віднімання.**

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

$$|z| = \sqrt{(a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2}$$

2) **Множення.**

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + i a_1 b_2 + i b_1 a_2 + i^2 b_1 b_2$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

Дії з комплексними числами

1) **Додавання і віднімання.**

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$
$$|z| = \sqrt{(a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2}$$

2) **Множення.**

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + i a_1 b_2 + i b_1 a_2 + i^2 b_1 b_2$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

У тригонометричній формі:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Для випадку комплексно-спряжених чисел:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2 \, .$$

Дії з комплексними числами

Для випадку комплексно-спряжених чисел:

$$z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2 .$$

3) **Ділення.**

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$$

$$z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$z = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Дії з комплексними числами

Для випадку комплексно-спряжених чисел:

$$z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2 .$$

3) **Ділення.**

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$$

$$z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$z = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Дії з комплексними числами

У тригонометричній формі:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

4) **Піднесення до степеня.**
З операції множення комплексних чисел випливає, що

$$z^2 = z \cdot z = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

[1] Абрахам де Муавр (Abraham de Moivre) (1667–1754) – англійський математик

У тригонометричній формі:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

4) **Піднесення до степеня.**
З операції множення комплексних чисел випливає, що

$$z^2 = z \cdot z = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

У загальному випадку одержимо:

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),}$$

де n – ціле додатне число.
Цей вираз називається **формулою Муавра**[1].

[1] Абрахам де Муавр (Abraham de Moivre) (1667–1754) – англійський математик

Застосування формули Муавра

Приклад. Знайти формули $\sin 2\varphi$ і $\cos 2\varphi$.

Застосування формули Муавра

<u>Приклад.</u> Знайти формули $\sin 2\varphi$ і $\cos 2\varphi$.
Розгляньмо деяке комплексне число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Застосування формули Муавра

Приклад. Знайти формули $\sin 2\varphi$ і $\cos 2\varphi$.
Розгляньмо деяке комплексне число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
Тоді з одного боку $z^2 = r^2(\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi)$.

Застосування формули Муавра

Приклад. Знайти формули $\sin 2\varphi$ і $\cos 2\varphi$.
Розгляньмо деяке комплексне число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
Тоді з одного боку $z^2 = r^2(\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi)$.
За формулою Муавра: $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$

Застосування формули Муавра

Приклад. Знайти формули $\sin 2\varphi$ і $\cos 2\varphi$.
Розгляньмо деяке комплексне число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
Тоді з одного боку $z^2 = r^2(\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi)$.
За формулою Муавра: $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$
Дорівнюючи, одержимо $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi$

Застосування формули Муавра

Приклад. Знайти формули $\sin 2\varphi$ і $\cos 2\varphi$.
Розгляньмо деяке комплексне число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
Тоді з одного боку $z^2 = r^2(\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi)$.
За формулою Муавра: $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$
Дорівнюючи, одержимо $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi$
Оскільки два комплексних числа рівні, якщо рівні їхні дійсні і уявні частини, то

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$

Застосування формули Муавра

<u>Приклад.</u> Знайти формули $\sin 2\varphi$ і $\cos 2\varphi$.
Розгляньмо деяке комплексне число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
Тоді з одного боку $z^2 = r^2(\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi)$.
За формулою Муавра: $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$
Дорівнюючи, одержимо $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi$
Оскільки два комплексних числа рівні, якщо рівні їхні дійсні і уявні частини, то

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

Застосування формули Муавра

Приклад. Знайти формули $\sin 2\varphi$ і $\cos 2\varphi$.
Розгляньмо деяке комплексне число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
Тоді з одного боку $z^2 = r^2(\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi)$.
За формулою Муавра: $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$
Дорівнюючи, одержимо $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi$
Оскільки два комплексних числа рівні, якщо рівні їхні дійсні і уявні частини, то

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

Одержали відомі формули для подвійного кута.

5) **Добування кореня з комплексного числа.**

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

5) **Добування кореня з комплексного числа.**

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Підносячи до степеня, одержимо:

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

5) **Добування кореня з комплексного числа.**

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Підносячи до степеня, одержимо:

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\rho = \sqrt[n]{r}; n\psi = \varphi + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}.$$

5) **Добування кореня з комплексного числа.**

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Підносячи до степеня, одержимо:

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\rho = \sqrt[n]{r}; n\psi = \varphi + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}.$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

Показникова форма комплексного числа

$$w = e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y)$$

Ця рівність називається **рівнянням Ойлера (Euler)**.

Властивості

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$;

Властивості

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$;
2. $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$;

Властивості

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$;
2. $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$;
3. $(e^z)^m = e^{mz}$; де m – ціле число.

Властивості

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$;
2. $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$;
3. $(e^z)^m = e^{mz}$; де m – ціле число.

Властивості

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$;
2. $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$;
3. $(e^z)^m = e^{mz}$; де m – ціле число.

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

Властивості

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$;
2. $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$;
3. $(e^z)^m = e^{mz}$; де m – ціле число.

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y$$

Властивості

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$;
2. $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$;
3. $(e^z)^m = e^{mz}$; де m – ціле число.

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y$$

З цих двох рівнянь одержуємо:

$$\begin{cases} \cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\ \sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \end{cases}$$

Показникова форма запису комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Показникова форма запису комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$z = re^{i\varphi}$$

<u>Означення.</u> Функція вигляду $f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + ... + A_n$ називається **цілою раціональною** функцією від x.

[2] Етьєн Безу (Étienne Bézout) (1730–1783) – французький математик

Розклад многочлена на множники

Означення. Функція вигляду $f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + ... + A_n$ називається **цілою раціональною** функцією від x.
Теорема Безу. [2]

[2] Етьєн Безу (Étienne Bézout) (1730–1783) – французький математик

Розклад многочлена на множники

<ins>**Означення.**</ins> Функція вигляду $f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + ... + A_n$ називається **цілою раціональною** функцією від x.

<ins>**Теорема Безу.**</ins> [2]

При діленні многочлена $f(x)$ на різницю $x - a$ виходить остача, рівна $f(a)$.

[2] Етьєн Безу (Étienne Bézout) (1730–1783) – французький математик

Розклад многочлена на множники

Означення. Функція вигляду $f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + ... + A_n$ називається **цілою раціональною** функцією від x.

Теорема Безу. [2]

При діленні многочлена $f(x)$ на різницю $x - a$ виходить остача, рівна $f(a)$.

Доведення. При діленні многочлена $f(x)$ на різницю $x - a$ часткою буде многочлен $f_1(x)$ степеня на одиницю меншого, ніж $f(x)$, а остачею – стале число R.

[2] Етьєн Безу (Étienne Bézout) (1730–1783) – французький математик

Розклад многочлена на множники

Означення. Функція вигляду $f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + ... + A_n$ називається **цілою раціональною** функцією від x.

Теорема Безу. [2]

При діленні многочлена $f(x)$ на різницю $x - a$ виходить остача, рівна $f(a)$.

Доведення. При діленні многочлена $f(x)$ на різницю $x - a$ часткою буде многочлен $f_1(x)$ степеня на одиницю меншого, ніж $f(x)$, а остачею – стале число R.

$$f(x) = f_1(x)(x - a) + R$$

[2] Етьєн Безу (Étienne Bézout) (1730–1783) – французький математик

Розклад многочлена на множники

Означення. Функція вигляду $f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + ... + A_n$ називається **цілою раціональною** функцією від x.

Теорема Безу. [2]

При діленні многочлена $f(x)$ на різницю $x - a$ виходить остача, рівна $f(a)$.

Доведення. При діленні многочлена $f(x)$ на різницю $x - a$ часткою буде многочлен $f_1(x)$ степеня на одиницю меншого, ніж $f(x)$, а остачею – стале число R.

$$f(x) = f_1(x)(x - a) + R$$

Спрямовуючи x до a, одержуємо $f(a) = R$.

[2] Етьєн Безу (Étienne Bézout) (1730–1783) – французький математик

Розклад многочлена на множники

Означення. Функція вигляду $f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + ... + A_n$ називається **цілою раціональною** функцією від x.

Теорема Безу. [2]

При діленні многочлена $f(x)$ на різницю $x - a$ виходить остача, рівна $f(a)$.

Доведення. При діленні многочлена $f(x)$ на різницю $x - a$ часткою буде многочлен $f_1(x)$ степеня на одиницю меншого, ніж $f(x)$, а остачею – стале число R.

$$f(x) = f_1(x)(x - a) + R$$

Спрямовуючи x до a, одержуємо $f(a) = R$.

Наслідок. *Якщо, a – корінь многочлена, тобто $f(a) = 0$, то многочлен $f(x)$ ділиться на $(x - a)$ без остачі.*

[2] Етьєн Безу (Étienne Bézout) (1730–1783) – французький математик

Основна теорема алгебри

<u>**Означення.**</u> Якщо рівняння має вигляд $P(x) = 0$, де $P(x)$ – многочлен степеня n, то це рівняння називається **алгебраїчним** рівнянням степеня n.

Основна теорема алгебри

Означення. Якщо рівняння має вигляд $P(x) = 0$, де $P(x)$ – многочлен степеня n, то це рівняння називається **алгебраїчним** рівнянням степеня n.
Теорема. (Основна теорема алгебри) *Усяка ціла раціональна функція $f(x)$ має принаймні один корінь, дійсний або комплексний.*

Основна теорема алгебри

Означення. Якщо рівняння має вигляд $P(x) = 0$, де $P(x)$ – многочлен степеня n, то це рівняння називається **алгебраїчним** рівнянням степеня n.

Теорема. (Основна теорема алгебри) *Усяка ціла раціональна функція $f(x)$ має принаймні один корінь, дійсний або комплексний.*

Теорема. *Усякий многочлен n-го степеня розкладається на n лінійних множників вигляду $x - a$ і множник, що дорівнює коефіцієнту при x^n.*

Основна теорема алгебри

Означення. Якщо рівняння має вигляд $P(x) = 0$, де $P(x)$ – многочлен степеня n, то це рівняння називається **алгебраїчним** рівнянням степеня n.

Теорема. (Основна теорема алгебри) *Усяка ціла раціональна функція* $f(x)$ *має принаймні один корінь, дійсний або комплексний.*

Теорема. *Усякий многочлен n-го степеня розкладається на n лінійних множників вигляду $x - a$ і множник, що дорівнює коефіцієнту при x^n.*

Теорема. *Якщо два многочлени тотожно рівні один одному, то коефіцієнти одного многочлена дорівнюють відповідним коефіцієнтам іншого.*

Основна теорема алгебри

Означення. Якщо рівняння має вигляд $P(x) = 0$, де $P(x)$ – многочлен степеня n, то це рівняння називається **алгебраїчним** рівнянням степеня n.

Теорема. (Основна теорема алгебри) *Усяка ціла раціональна функція $f(x)$ має принаймні один корінь, дійсний або комплексний.*

Теорема. *Усякий многочлен n-го степеня розкладається на n лінійних множників вигляду $x - a$ і множник, що дорівнює коефіцієнту при x^n.*

Теорема. *Якщо два многочлени тотожно рівні один одному, то коефіцієнти одного многочлена дорівнюють відповідним коефіцієнтам іншого.*

Розклади для кратних коренів

Якщо серед коренів многочлена зустрічаються кратні корені, то розклад на множники має вигляд:

$$f(x) = A_0(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2}...(x - a_m)^{k_m}.$$

$$k_1 + k_2 + ... + k_m = n$$

k_i – кратність відповідного кореня.

Інше формулювання основної теореми алгебри

Будь-який многочлен n-го степеня має рівно n коренів (дійсних або комплексних).

Приклади дій з комплексними числами

Приклад. Дано два комплексних числа $z_1 = 1 - \frac{7}{2}i$; $z_2 = -7 - 2i$. Потрібно а) знайти значення виразу $\left(\frac{1-\frac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4}$ в алгебраїчній формі, б) для числа $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ знайти тригонометричну форму, знайти z^{20}, знайти корінь рівняння $w^3 - z = 0$.

Приклади дій з комплексними числами

Очевидно, справедливе наступне перетворення:

$$\left(\frac{1-\dfrac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4}$$

Приклади дій з комплексними числами

Очевидно, справедливе наступне перетворення:

$$\left(\frac{1-\dfrac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4} = \left(\frac{2-7i}{-14-4i}\right)^{-4}$$

Приклади дій з комплексними числами

Очевидно, справедливе наступне перетворення:

$$\left(\frac{1-\dfrac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4} = \left(\frac{2-7i}{-14-4i}\right)^{-4} = \left(\frac{-14-4i}{2-7i}\right)^{4}$$

Приклади дій з комплексними числами

Очевидно, справедливе наступне перетворення:

$$\left(\frac{1-\dfrac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4}=\left(\frac{2-7i}{-14-4i}\right)^{-4}=\left(\frac{-14-4i}{2-7i}\right)^{4}=16\left(\frac{-7-2i}{2-7i}\right)^{4}$$

Приклади дій з комплексними числами

Очевидно, справедливе наступне перетворення:

$$\left(\frac{1-\dfrac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4} = \left(\frac{2-7i}{-14-4i}\right)^{-4} = \left(\frac{-14-4i}{2-7i}\right)^{4} = 16\left(\frac{-7-2i}{2-7i}\right)^{4}$$

Далі, виконуємо ділення двох комплексних чисел:

$$\frac{-7-2i}{2-7i} = \frac{(-7-2i)(2+7i)}{(2-7i)(2+7i)} = \frac{-14-49i-4i+14}{4+49} = \frac{-53i}{53} = -i.$$

Приклади дій з комплексними числами

Очевидно, справедливе наступне перетворення:

$$\left(\frac{1-\dfrac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4} = \left(\frac{2-7i}{-14-4i}\right)^{-4} = \left(\frac{-14-4i}{2-7i}\right)^{4} = 16\left(\frac{-7-2i}{2-7i}\right)^{4}$$

Далі, виконуємо ділення двох комплексних чисел:

$$\frac{-7-2i}{2-7i} = \frac{(-7-2i)(2+7i)}{(2-7i)(2+7i)} = \frac{-14-49i-4i+14}{4+49} = \frac{-53i}{53} = -i.$$

Одержуємо значення заданого виразу: $16(-i)^4 = 16i^4 = 16.$

Приклади дій з комплексними числами

Число $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ представимо у вигляді $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, де

$$r = |z| = \sqrt{4+12} = 4; \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -60^\circ = -\frac{\pi}{3}$$

Тоді $z = 4(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3))$.

Приклади дій з комплексними числами

Для знаходження z^{20} скористаємося формулою Муавра.

$$z^{20} = 4^{20}(\cos 1200^\circ - i\sin 1200^\circ) = 4^{20}(\cos(3\cdot 360^\circ + 120^\circ) - i\sin(3\cdot 360^\circ + 120^\circ)) =$$

$$= 4^{20}(\cos 120^\circ - i\sin 120^\circ) = -4^{20}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Приклади дій з комплексними числами

Для знаходження z^{20} скористаємося формулою Муавра.

$$z^{20} = 4^{20}(\cos 1200^\circ - i\sin 1200^\circ) = 4^{20}(\cos(3\cdot 360^\circ + 120^\circ) - i\sin(3\cdot 360^\circ + 120^\circ)) =$$

$$= 4^{20}(\cos 120^\circ - i\sin 120^\circ) = -4^{20}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Приклади дій з комплексними числами

Якщо $w^3 - z = 0$, то $w = \sqrt[3]{z}$

Приклади дій з комплексними числами

Якщо $w^3 - z = 0$, то $w = \sqrt[3]{z}$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{3}\right)$$

Приклади дій з комплексними числами

Якщо $w^3 - z = 0$, то $w = \sqrt[3]{z}$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{-\pi/3 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{-\pi/3 + 2\pi k}{3}\right); \quad k = 0, 1, 2.$$