Екстремум функції декількох змінних. Умовний екстремум

Максимум функції декількох змінних

Означення Якщо для функції $z = f(x, y)$, визначеної в деякій області, у деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$ виконується нерівність

$$f(x_0, y_0) > f(x, y)$$

то точка M_0 називається **точкою максимуму**

Мінімум функції декількох змінних

Означення Якщо для функції $z = f(x, y)$, визначеної в деякій області, у деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$ виконується нерівність

$$f(x_0, y_0) < f(x, y)$$

то точка M_0 називається **точкою мінімуму**

Необхідні умови екстремуму

Теорема

Якщо функція $f(x, y)$ у точці $(x_0; y_0)$ має екстремум, то у цій точці або обидві її частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$, або хоча б одна з них не існує.

Необхідні умови екстремуму

<u>Теорема</u>
Якщо функція $f(x, y)$ у точці $(x_0; y_0)$ має екстремум, то у цій точці або обидві її частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$, або хоча б одна з них не існує.
Цю точку (x_0, y_0) будемо називати **критичною точкою**.

Достатні умови екстремуму

Теорема

Нехай в околі критичної точки $(x_0; y_0)$ функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно. Розглянемо вираз:

$$D(x, y) = f''_{x^2}(x, y) \cdot f''_{y^2}(x, y) - \left[f''_{xy}(x, y)\right]^2$$

Достатні умови екстремуму

Теорема

Нехай в околі критичної точки $(x_0; y_0)$ функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно. Розглянемо вираз:

$$D(x, y) = f''_{x^2}(x, y) \cdot f''_{y^2}(x, y) - \left[f''_{xy}(x, y)\right]^2$$

1. Якщо $D(x_0, y_0) > 0$, то у точці (x_0, y_0) функція $f(x, y)$ має екстремум, якщо $f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$ – максимум, якщо $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$ – мінімум.

Достатні умови екстремуму

<u>**Теорема**</u>
Нехай в околі критичної точки $(x_0; y_0)$ функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно. Розглянемо вираз:

$$D(x, y) = f''_{x^2}(x, y) \cdot f''_{y^2}(x, y) - \left[f''_{xy}(x, y)\right]^2$$

1. Якщо $D(x_0, y_0) > 0$, то у точці (x_0, y_0) функція $f(x, y)$ має екстремум, якщо $f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$ – максимум, якщо $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$ – мінімум.
2. Якщо $D(x_0, y_0) < 0$, то у точці (x_0, y_0) функція $f(x, y)$ не має екстремуму.

   У випадку, якщо $D = 0$, висновок про наявність екстремуму зробити не можна.

Приклад

Дослідити на екстремум функцію

$$z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 30.$$

Розв'язання

Спочатку визначимо $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

Розв'язання

Спочатку визначимо $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 36y;$$

Розв'язання

Спочатку визначимо $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 36y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6y^2 - 36x.$$

Розв'язання

Спочатку визначимо $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 36y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6y^2 - 36x.$$

Далі, розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Розв'язання

У цьому випадку

$$\begin{cases} 6x^2 - 36y = 0 \\ 6y^2 - 36x = 0 \end{cases}$$

Розв'язання

У цьому випадку

$$\begin{cases} 6x^2 - 36y = 0 \\ 6y^2 - 36x = 0 \end{cases}$$

Скорочуємо на 6:

$$\begin{cases} x^2 - 6y = 0 \\ y^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

Розв'язання

У цьому випадку

$$\begin{cases} 6x^2 - 36y = 0 \\ 6y^2 - 36x = 0 \end{cases}$$

Скорочуємо на 6:

$$\begin{cases} x^2 - 6y = 0 \\ y^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

З першого рівняння $y = \dfrac{x^2}{6}$.

Розв'язання

У цьому випадку

$$\begin{cases} 6x^2 - 36y = 0 \\ 6y^2 - 36x = 0 \end{cases}$$

Скорочуємо на 6:

$$\begin{cases} x^2 - 6y = 0 \\ y^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

З першого рівняння $y = \dfrac{x^2}{6}$.
Підставляючи це значення до другого рівняння, маємо

$$\frac{x^4}{36} - 6x = 0$$

Розв'язання

У цьому випадку

$$\begin{cases} 6x^2 - 36y = 0 \\ 6y^2 - 36x = 0 \end{cases}$$

Скорочуємо на 6:

$$\begin{cases} x^2 - 6y = 0 \\ y^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

З першого рівняння $y = \dfrac{x^2}{6}$.
Підставляючи це значення до другого рівняння, маємо

$$\frac{x^4}{36} - 6x = 0 \text{ або } x^4 - 216x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 216) = 0$$

Розв'язання

У цьому випадку

$$\begin{cases} 6x^2 - 36y = 0 \\ 6y^2 - 36x = 0 \end{cases}$$

Скорочуємо на 6:

$$\begin{cases} x^2 - 6y = 0 \\ y^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

З першого рівняння $y = \dfrac{x^2}{6}$.
Підставляючи це значення до другого рівняння, маємо

$$\frac{x^4}{36} - 6x = 0 \text{ або } x^4 - 216x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 216) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x-6)(x^2+6x+36) = 0$$

Розв'язання

Звідси $x_1 = 0$ та $x_2 = 6$.

Розв'язання

Звідси $x_1 = 0$ та $x_2 = 6$.

Оскільки $y = \dfrac{x^2}{6}$, $y_1 = 0$ і $y_2 = 6$.

Розв'язання

Звідси $x_1 = 0$ та $x_2 = 6$.

Оскільки $y = \dfrac{x^2}{6}$, $y_1 = 0$ і $y_2 = 6$.

Маємо дві критичних точки – $(0; 0)$ і $(6; 6)$.

Розв'язання

Звідси $x_1 = 0$ та $x_2 = 6$.

Оскільки $y = \dfrac{x^2}{6}$, $y_1 = 0$ і $y_2 = 6$.

Маємо дві критичних точки – $(0; 0)$ і $(6; 6)$.

Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x;$$

Розв'язання

Звідси $x_1 = 0$ та $x_2 = 6$.

Оскільки $y = \dfrac{x^2}{6}$, $y_1 = 0$ і $y_2 = 6$.

Маємо дві критичних точки – $(0; 0)$ і $(6; 6)$.

Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -36;$$

Розв'язання

Звідси $x_1 = 0$ та $x_2 = 6$.
Оскільки $y = \dfrac{x^2}{6}$, $y_1 = 0$ і $y_2 = 6$.
Маємо дві критичних точки – $(0; 0)$ і $(6; 6)$.
Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -36; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y.$$

Розв'язання

Звідси $x_1 = 0$ та $x_2 = 6$.
Оскільки $y = \dfrac{x^2}{6}$, $y_1 = 0$ і $y_2 = 6$.
Маємо дві критичних точки – $(0; 0)$ і $(6; 6)$.
Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -36; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y.$$

$$D(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2$$

Розв'язання

Звідси $x_1 = 0$ та $x_2 = 6$.
Оскільки $y = \dfrac{x^2}{6}$, $y_1 = 0$ і $y_2 = 6$.
Маємо дві критичних точки – $(0; 0)$ і $(6; 6)$.
Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -36; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y.$$

$$D(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 12x \cdot 12y - (-36)^2$$

Розв'язання

Звідси $x_1 = 0$ та $x_2 = 6$.

Оскільки $y = \dfrac{x^2}{6}$, $y_1 = 0$ і $y_2 = 6$.

Маємо дві критичних точки – $(0; 0)$ і $(6; 6)$.

Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -36; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y.$$

$$D(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 12x \cdot 12y - (-36)^2 = 144xy - 1296$$

Розв'язання

$$D(x_0, y_0) = 144 \cdot 0 \cdot 0 - 1296$$

Розв'язання

$$D(x_0, y_0) = 144 \cdot 0 \cdot 0 - 1296 = -1296$$

Розв'язання

$$D(x_0, y_0) = 144 \cdot 0 \cdot 0 - 1296 = -1296 < 0$$

Розв'язання

$$D(x_0, y_0) = 144 \cdot 0 \cdot 0 - 1296 = -1296 < 0$$

Отже, за теоремою про достатні умови екстремуму у точці $(0; 0)$ немає екстремуму.

Розв'язання

$$D(x_0, y_0) = 144 \cdot 0 \cdot 0 - 1296 = -1296 < 0$$

Отже, за теоремою про достатні умови екстремуму у точці $(0; 0)$ немає екстремуму.

$$D(x_1, y_1) = 144 \cdot 6 \cdot 6 - 1296$$

Розв'язання

$$D(x_0, y_0) = 144 \cdot 0 \cdot 0 - 1296 = -1296 < 0$$

Отже, за теоремою про достатні умови екстремуму у точці $(0; 0)$ немає екстремуму.

$$D(x_1, y_1) = 144 \cdot 6 \cdot 6 - 1296 = 3888$$

Розв'язання

$$D(x_0, y_0) = 144 \cdot 0 \cdot 0 - 1296 = -1296 < 0$$

Отже, за теоремою про достатні умови екстремуму у точці $(0; 0)$ немає екстремуму.

$$D(x_1, y_1) = 144 \cdot 6 \cdot 6 - 1296 = 3888 > 0$$

Розв'язання

$$D(x_0, y_0) = 144 \cdot 0 \cdot 0 - 1296 = -1296 < 0$$

Отже, за теоремою про достатні умови екстремуму у точці $(0;0)$ немає екстремуму.

$$D(x_1, y_1) = 144 \cdot 6 \cdot 6 - 1296 = 3888 > 0$$

Отже, за теоремою про достатні умови екстремуму у точці $(6;6)$ є

екстремум.

Розв'язання

$$D(x_0, y_0) = 144 \cdot 0 \cdot 0 - 1296 = -1296 < 0$$

Отже, за теоремою про достатні умови екстремуму у точці $(0; 0)$ немає екстремуму.

$$D(x_1, y_1) = 144 \cdot 6 \cdot 6 - 1296 = 3888 > 0$$

Отже, за теоремою про достатні умови екстремуму у точці $(6; 6)$ є екстремум.Оскільки $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(x_1; y_1)} = 72 > 0$, маємо мінімум.

Розв'язання

$$D(x_0, y_0) = 144 \cdot 0 \cdot 0 - 1296 = -1296 < 0$$

Отже, за теоремою про достатні умови екстремуму у точці $(0;0)$ немає екстремуму.

$$D(x_1, y_1) = 144 \cdot 6 \cdot 6 - 1296 = 3888 > 0$$

Отже, за теоремою про достатні умови екстремуму у точці $(6;6)$ є екстремум.Оскільки $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(x_1;y_1)} = 72 > 0$, маємо мінімум.

Обчислюємо $z_{\min}$:

$$z_{\min} = 2x_1^3 + 2y_1^3 - 36x_1y_1 + 30$$

Розв'язання

$$D(x_0, y_0) = 144 \cdot 0 \cdot 0 - 1296 = -1296 < 0$$

Отже, за теоремою про достатні умови екстремуму у точці $(0;0)$ немає екстремуму.

$$D(x_1, y_1) = 144 \cdot 6 \cdot 6 - 1296 = 3888 > 0$$

Отже, за теоремою про достатні умови екстремуму у точці $(6;6)$ є екстремум.Оскільки $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(x_1;y_1)} = 72 > 0$, маємо мінімум.

Обчислюємо $z_{\min}$:

$$z_{\min} = 2x_1^3 + 2y_1^3 - 36x_1y_1 + 30 =$$

$$= 2 \cdot 216 + 2 \cdot 216 - 36 \cdot 6 \cdot 6 + 30$$

Розв'язання

$$D(x_0, y_0) = 144 \cdot 0 \cdot 0 - 1296 = -1296 < 0$$

Отже, за теоремою про достатні умови екстремуму у точці $(0; 0)$ немає екстремуму.

$$D(x_1, y_1) = 144 \cdot 6 \cdot 6 - 1296 = 3888 > 0$$

Отже, за теоремою про достатні умови екстремуму у точці $(6; 6)$ є екстремум.Оскільки $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(x_1; y_1)} = 72 > 0$, маємо мінімум.

Обчислюємо $z_{\min}$:

$$z_{\min} = 2x_1^3 + 2y_1^3 - 36x_1y_1 + 30 =$$

$$= 2 \cdot 216 + 2 \cdot 216 - 36 \cdot 6 \cdot 6 + 30 = -402.$$

Умовний екстремум. Рівняння зв'язку

Умовний екстремум знаходиться, коли змінні x і y, що входять у функцію $u = f(x, y)$, не є незалежними, тобто існує деяке співвідношення $\varphi(x, y) = 0$, що називається **рівнянням зв'язку**.

Умовний екстремум. Рівняння зв'язку

Умовний екстремум знаходиться, коли змінні x і y, що входять у функцію $u = f(x, y)$, не є незалежними, тобто існує деяке співвідношення $\varphi(x, y) = 0$, що називається **рівнянням зв'язку**.
Тоді зі змінних x і y тільки одна буде незалежною, оскільки інша може бути виражена через неї з рівняння зв'язку.

Виведення критерію екстремуму

Тоді $u = f(x, y(x))$.

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Виведення критерію екстремуму

Тоді $u = f(x, y(x))$.

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

У точках екстремуму:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{1}$$

Виведення критерію екстремуму

Тоді $u = f(x, y(x))$.

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

У точках екстремуму:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{1}$$

Крім того:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{2}$$

Виведення критерію екстремуму

Помножимо рівність (2) на число λ і складемо з рівністю (1).

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0$$

Виведення критерію екстремуму

Помножимо рівність (2) на число λ і складемо з рівністю (1).

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

Необхідні умови екстремуму

Для виконання цієї умови у всіх точках знайдемо невизначений коефіцієнт λ так, щоб виконувалася система трьох рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Необхідні умови екстремуму

Для виконання цієї умови у всіх точках знайдемо невизначений коефіцієнт λ так, щоб виконувалася система трьох рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Отримана система рівнянь є необхідними умовами умовного екстремуму. Однак ця умова не є достатньою. Тому при знаходженні критичних точок потрібно їхнє додаткове дослідження на екстремум.

Функція Лагранжа

Вираз $u = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ називається **функцією Лагранжа**

Приклад

Знайти екстремум функції $f(x, y) = xy$, якщо рівняння зв'язку: $2x + 3y - 5 = 0$.

Розв'язання

$$u = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$$

Розв'язання

$$u = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x + 3\lambda;$$

Розв'язання

$$u = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x + 3\lambda;$$

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0 \\ x + 3\lambda = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання

$$u = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x + 3\lambda;$$

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0 \\ x + 3\lambda = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = -\frac{5}{12}; \qquad x = \frac{5}{4}; \qquad y = \frac{5}{6};$$

Розв'язання

$$u = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x + 3\lambda;$$

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0 \\ x + 3\lambda = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = -\frac{5}{12}; \qquad x = \frac{5}{4}; \qquad y = \frac{5}{6};$$

Таким чином, функція має екстремум у точці $\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right)$.

Метод множників Лагранжа

Використання функції Лагранжа для знаходження точок екстремуму функції називається також **методом множників Лагранжа**.

Метод множників Лагранжа

Використання функції Лагранжа для знаходження точок екстремуму функції називається також **методом множників Лагранжа**.
Вище ми розглянули функцію двох змінних, однак, всі міркування щодо умовного екстремуму можуть бути поширені на функції більшого числа змінних.