Скалярний, векторний і мішаний добутки векторів. Рівняння прямої на площині.

Скалярний добуток векторів

<u>Означення.</u> Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, рівне добутку довжин цих сторін на косинус кута між ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\varphi$$

Властивості скалярного добутку

1. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2;$

Властивості скалярного добутку

1. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$;
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, або $\vec{a} = 0$, або $\vec{b} = 0$.

Властивості скалярного добутку

1. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$;
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, або $\vec{a} = 0$, або $\vec{b} = 0$.
3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

Властивості скалярного добутку

1. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$;
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, або $\vec{a} = 0$, або $\vec{b} = 0$.
3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
4. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

Властивості скалярного добутку

1. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$;
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, або $\vec{a} = 0$, або $\vec{b} = 0$.
3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
4. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
5. $(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

Скалярний добуток векторів, які задано координатами

$$\overrightarrow{a} = (x_a, y_a, z_a);$$

$$\overrightarrow{b} = (x_b, y_b, z_b);$$

Скалярний добуток векторів, які задано координатами

$$\overrightarrow{a} = (x_a, y_a, z_a);$$

$$\overrightarrow{b} = (x_b, y_b, z_b);$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b;$$

Обчислення кута між векторами

$$\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|};$$

Приклад

Знайти $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = 2, \quad \left|\vec{b}\right| = 3, \quad \vec{a} \perp \vec{b}$.

Розв'язання

$$10\vec{a}\cdot\vec{a}-5\vec{a}\cdot\vec{b}+6\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}\cdot\vec{b}=10\left|\vec{a}\right|^2-3\left|\vec{b}\right|^2=40-27=13.$$

Розв'язання

$$10\vec{a}\cdot\vec{a} - 5\vec{a}\cdot\vec{b} + 6\vec{a}\cdot\vec{b} - 3\vec{b}\cdot\vec{b} = 10\left|\vec{a}\right|^2 - 3\left|\vec{b}\right|^2 = 40 - 27 = 13.$$

Оскільки $\vec{a}\cdot\vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2 = 4$, $\vec{b}\cdot\vec{b} = \left|\vec{b}\right|^2 = 9$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Приклад

Знайти кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Розв'язання

Маємо: $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (6, 4, -2)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 + 8 - 6 = 8 :$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}; \qquad \left|\vec{b}\right| = \sqrt{36 + 16 + 4} = \sqrt{56}.$$

$$\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}; \quad \varphi = \arccos\frac{2}{7}.$$

Приклад

Знайти скалярний добуток $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(5\vec{a}-6\vec{b})$, якщо $|\vec{a}|=4$, $\left|\vec{b}\right|=6$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=\pi/3$.

Розв'язання

$$(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(5\vec{a}-6\vec{b})$$

Розв'язання

$$(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(5\vec{a}-6\vec{b}) = 15\vec{a}\cdot\vec{a}-18\vec{a}\cdot\vec{b}-10\vec{a}\cdot\vec{b}+12\vec{b}\cdot\vec{b} = 15\left|\vec{a}\right|^2-28\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\frac{\pi}{3}+12\left|\vec{b}\right|^2 =$$

Розв'язання

$$(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(5\vec{a}-6\vec{b}) = 15\vec{a}\cdot\vec{a}-18\vec{a}\cdot\vec{b}-10\vec{a}\cdot\vec{b}+12\vec{b}\cdot\vec{b} = 15\left|\vec{a}\right|^2-28\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\frac{\pi}{3}+12\left|\vec{b}\right|^2 =$$

$$= 15\cdot 16 - 28\cdot 4\cdot 6\cdot\frac{1}{2} + 12\cdot 36 = 240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336.$$

Приклад

Знайти кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.
Тобто $\vec{a} = (3, 4, 5)$, $\vec{b} = (4, 5, -3)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 12 + 20 - 15 = 17;$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50}; \qquad \left|\vec{b}\right| = \sqrt{16 + 25 + 9} = \sqrt{50}.$$

$$\cos\varphi = \frac{17}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \frac{17}{50}; \quad \varphi = \arccos\frac{17}{50}.$$

Приклад

При якому m вектори $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ і $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ перпендикулярні?
$\vec{a} = (m, 1, 0)$; $\vec{b} = (3, -3, -4)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3m - 3 = 0; \quad \Rightarrow m = 1.$$

Приклад

Знайти скалярний добуток векторів $2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$ і $5\vec{a}+6\vec{b}+7\vec{c}$, якщо
$|\vec{a}|=1, \quad \left|\vec{b}\right|=2, \quad |\vec{c}|=3, \quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=\widehat{\vec{a}\,\vec{c}}=\widehat{\vec{b}\,\vec{c}}=\dfrac{\pi}{3}.$

Розв'язання

$$(2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c})(5\vec{a}+6\vec{b}+7\vec{c}) = 10\vec{a}\cdot\vec{a}+12\vec{a}\cdot\vec{b}+14\vec{a}\cdot\vec{c}+15\vec{a}\cdot\vec{b}+18\vec{b}\cdot\vec{b}+21\vec{b}\cdot\vec{c}+$$

Розв'язання

$$(2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c})(5\vec{a}+6\vec{b}+7\vec{c}) = 10\vec{a}\cdot\vec{a}+12\vec{a}\cdot\vec{b}+14\vec{a}\cdot\vec{c}+15\vec{a}\cdot\vec{b}+18\vec{b}\cdot\vec{b}+21\vec{b}\cdot\vec{c}+$$

$$+20\vec{c}\cdot\vec{a}+24\vec{b}\cdot\vec{c}+28\vec{c}\cdot\vec{c} = 10\vec{a}\cdot\vec{a}+27\vec{a}\cdot\vec{b}+34\vec{a}\cdot\vec{c}+45\vec{b}\cdot\vec{c}+18\vec{b}\cdot\vec{b}+28\vec{c}\cdot\vec{c} =$$

Розв'язання

$$(2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c})(5\vec{a}+6\vec{b}+7\vec{c}) = 10\vec{a}\cdot\vec{a}+12\vec{a}\cdot\vec{b}+14\vec{a}\cdot\vec{c}+15\vec{a}\cdot\vec{b}+18\vec{b}\cdot\vec{b}+21\vec{b}\cdot\vec{c}+$$

$$+20\vec{c}\cdot\vec{a}+24\vec{b}\cdot\vec{c}+28\vec{c}\cdot\vec{c} = 10\vec{a}\cdot\vec{a}+27\vec{a}\cdot\vec{b}+34\vec{a}\cdot\vec{c}+45\vec{b}\cdot\vec{c}+18\vec{b}\cdot\vec{b}+28\vec{c}\cdot\vec{c} =$$

$$= 10+27+51+135+72+252 = 547.$$

Основні застосування скалярного добутку

1. Перевірка перпендикулярності векторів.

Основні застосування скалярного добутку

1. Перевірка перпендикулярності векторів.
2. Знаходження кута між векторами.

Основні застосування скалярного добутку

1. Перевірка перпендикулярності векторів.
2. Знаходження кута між векторами.
3. Знаходження проєкції вектора на напрямок іншого вектора. Проєкцію $\vec{a}$ на напрям вектора $\vec{b}$ можна знайти за такою формулою:

$$\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Основні застосування скалярного добутку

1. Перевірка перпендикулярності векторів.
2. Знаходження кута між векторами.
3. Знаходження проєкції вектора на напрямок іншого вектора. Проєкцію $\vec{a}$ на напрям вектора $\vec{b}$ можна знайти за такою формулою:

$$\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

4. Знаходження роботи сили при пересуванні точки її прикладання уздовж заданого вектора. Якщо вектор $\vec{F}$ відповідає силі, прикладеній до матеріальної точки, що рухається з початку у кінець вектора $\vec{s}$, то робота A цієї сили визначається рівністю

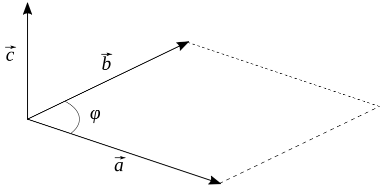
$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}.$$

Векторний добуток векторів

<u>**Означення.**</u> **Векторним добутком** векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, що задовольняє наступним умовам:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $\sin\varphi \geqslant 0$; $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$;
2. вектор $\vec{c}$ ортогональний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
3. $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів.

Позначається: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ або $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.



Властивості векторного добутку

1. $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;

Властивості векторного добутку

1. $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;
2. $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$, або $\vec{a} = 0$, або $\vec{b} = 0$;

Властивості векторного добутку

1. $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;
2. $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$, або $\vec{a} = 0$, або $\vec{b} = 0$;
3. $(m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b})$;

Властивості векторного добутку

1. $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;
2. $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$, або $\vec{a} = 0$, або $\vec{b} = 0$;
3. $(m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b})$;
4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{A}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{A}$;

Властивості векторного добутку

1. $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;
2. $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$, або $\vec{a} = 0$, або $\vec{b} = 0$;
3. $(m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b})$;
4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{A}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{A}$;
5. Якщо задані вектори $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$ і $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$ у декартовій прямокутній системі координат з одиничними векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

Властивості векторного добутку

1. $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;
2. $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$, або $\vec{a} = 0$, або $\vec{b} = 0$;
3. $(m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b})$;
4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{A}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{A}$;
5. Якщо задані вектори $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$ і $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$ у декартовій прямокутній системі координат з одиничними векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

6. Геометричним змістом векторного добутку векторів є площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Приклад

Знайти векторний добуток векторів $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ і

$$\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}.$$

$$\vec{a} = (2, 5, 1); \vec{b} = (1, 2, -3)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}.$$

Приклад

Обчислити площу трикутника з вершинами $A(2,2,2)$, $B(4,0,3)$, $C(0,1,0)$.

$$\overrightarrow{AC} = (0-2; 1-2; 0-2) = (-2; -1; -2)$$
$$\overrightarrow{AB} = (4-2; 0-2; 3-2) = (2; -2; 1)$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-1-4) - \vec{j}(-2+4) + \vec{k}(4+2) = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

$$\left| \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} \right| = \sqrt{25+4+36} = \sqrt{65.} \; S_{\Delta} = \frac{\sqrt{65}}{2}(\text{од}^2).$$

Приклад

Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}+3\vec{b}; \quad 3\vec{a}+\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = 1; \quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 30^\circ$.

$$(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}+\vec{b}) = 3\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+9\vec{b}\times\vec{a}+3\vec{b}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}+9\vec{b}\times\vec{a} = 8\vec{b}\times\vec{a}$$

$S = 8\left|\vec{b}\right| |\vec{a}| \sin 30^\circ = 4(\text{од}^2)$.

Основні застосування векторного добутку

1. Знаходження вектора, який є перпендикулярним до заданих координатами векторів. Такий вектор можна знайти як векторний добуток початкових векторів.

Основні застосування векторного добутку

1. Знаходження вектора, який є перпендикулярним до заданих координатами векторів. Такий вектор можна знайти як векторний добуток початкових векторів.
2. Знаходження площі паралелограма, який побудовано на заданих векторах. Зокрема, для знаходження площі S паралелограма, який побудовано на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна скористатися формулою:

$$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|.$$

Основні застосування векторного добутку

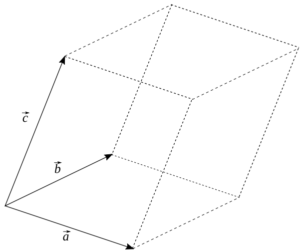
1. Знаходження вектора, який є перпендикулярним до заданих координатами векторів. Такий вектор можна знайти як векторний добуток початкових векторів.
2. Знаходження площі паралелограма, який побудовано на заданих векторах. Зокрема, для знаходження площі S паралелограма, який побудовано на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна скористатися формулою:

$$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|.$$

3. Знаходження моменту сили. Якщо вектор $\vec{F}$ відповідає силі, прикладеній до матеріальної точки N, то момент $\vec{M}$ сили $\vec{F}$ відносно точки O обчислюється за формулою

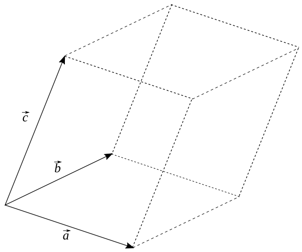
$$\vec{M} = \overrightarrow{ON} \times \vec{F}.$$

Мішаний добуток векторів



<u>Означення.</u> Мішаним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число, рівне скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на вектор, який дорівнює векторному добутку векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

Мішаний добуток векторів



<u>Означення.</u> Мішаним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число, рівне скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на вектор, який дорівнює векторному добутку векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Мішаний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ за модулем дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

Властивості мішаного добутку

1. Мішаний добуток дорівнює нулю, якщо:
   1.1 хоч один з векторів дорівнює нулю;
   1.2 два з векторів колінеарні;
   1.3 вектори компланарні.

Властивості мішаного добутку

1. Мішаний добуток дорівнює нулю, якщо:
   1.1 хоч один з векторів дорівнює нулю;
   1.2 два з векторів колінеарні;
   1.3 вектори компланарні.
2. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

Властивості мішаного добутку

1. Мішаний добуток дорівнює нулю, якщо:
   1.1 хоч один з векторів дорівнює нулю;
   1.2 два з векторів колінеарні;
   1.3 вектори компланарні.
2. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
3. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$

Властивості мішаного добутку

1. Мішаний добуток дорівнює нулю, якщо:
   1.1 хоч один з векторів дорівнює нулю;
   1.2 два з векторів колінеарні;
   1.3 вектори компланарні.
2. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
3. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$
4. $(\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + \mu(\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$

Властивості мішаного добутку

1. Мішаний добуток дорівнює нулю, якщо:
   1.1 хоч один з векторів дорівнює нулю;
   1.2 два з векторів колінеарні;
   1.3 вектори компланарні.
2. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
3. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$
4. $(\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + \mu(\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$
5. Об'єм трикутної піраміди, утвореної векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, дорівнює

$$|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|/6$$

Властивості мішаного добутку

1. Мішаний добуток дорівнює нулю, якщо:
   1.1 хоч один з векторів дорівнює нулю;
   1.2 два з векторів колінеарні;
   1.3 вектори компланарні.
2. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
3. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$
4. $(\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + \mu(\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$
5. Об'єм трикутної піраміди, утвореної векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, дорівнює
$$|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|/6$$
6. Якщо $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Приклад

Довести, що точки $A(5;7;-2)$, $B(3;1;-1)$, $C(9;4;-4)$, $D(1;5;0)$ лежать в одній площині.

Знайдемо координати векторів: $\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-2;-6;1) \\ \overrightarrow{AC} = (4;-3;-2) \\ \overrightarrow{AD} = (-4;-2;2) \end{array}$

Знайдемо мішаний добуток отриманих векторів:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Таким чином, отримані вище вектори компланарні, отже точки A, B, C і D лежать в одній площині.

Приклад

Знайти об'єм піраміди і довжину висоти, опущеної на грань BCD, якщо вершини мають координати $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$, $D(3;7;2)$.

Розв'язання

Знайдемо координати векторів: $\begin{array}{l} \overrightarrow{BA} = (-2; -3; -4) \\ \overrightarrow{BD} = (1; 4; -3) \\ \overrightarrow{BC} = (4; -1; -2) \end{array}$

Об'єм піраміди

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(-2(-8-3)+3(-2+12)-4(-1-16)) =$$

$$= \frac{1}{6}(22+30+68) = 20(\text{од}^3)$$

Розв'язання

Для знаходження довжини висоти піраміди знайдемо спочатку площу основи BCD.

$$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}(-8-3)-\vec{j}(-2+12)+\vec{k}(-1-16)=-11\vec{i}-10\vec{j}-17\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{11^2+10^2+17^2}=\sqrt{121+100+289}=\sqrt{510}$$

$S_{\text{осн}}=\sqrt{510}/2\ (\text{од})^2$

Оскільки $V=\dfrac{S_{\text{осн}}\cdot h}{3}$; $h=\dfrac{3V}{S_{\text{осн}}}=\dfrac{120}{\sqrt{510}}=\dfrac{4\sqrt{510}}{17}(\text{од})$.

Основні застосування мішаного добутку

1. Перевірка компланарності векторів. Якщо трійка векторів є компланарною, їхній мішаний добуток має дорівнювати нулеві.

Основні застосування мішаного добутку

1. Перевірка компланарності векторів. Якщо трійка векторів є компланарною, їхній мішаний добуток має дорівнювати нулеві.
2. Знаходження об'ємів паралелепіпедів та тетраедрів, побудованих на заданих векторах.

Рівняння лінії на площині

<u>Означення.</u> Рівнянням лінії називається співвідношення $y = f(x)$ між координатами точок, що становлять цю лінію.

Параметричне рівняння лінії на площині

Відзначимо, що рівняння лінії може бути виражено параметричним способом, тобто кожна координата кожної точки виражається через деякий незалежний параметр t.
Характерний приклад – траєкторія точки, що рухається. У цьому випадку роль параметра відіграє час.

Рівняння прямої на площині

<u>**Означення.**</u> Будь-яка пряма на площині може бути задана рівнянням першого порядку

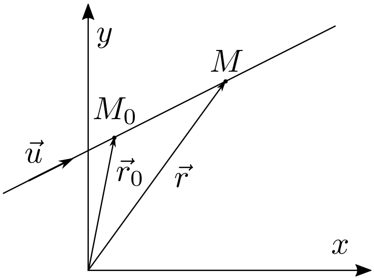
$$Ax + By + C = 0,$$

причому сталі A, B не дорівнюють нулю одночасно, тобто $A^2 + B^2 \neq 0$. Це рівняння першого порядку називають **загальним рівнянням прямої.** Залежно від значень сталих A, B і C можливі наступні окремі випадки:

1. $C = 0,\ A \neq 0,\ B \neq 0$ – пряма проходить через початок координат
2. $A = 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0\ \{By + C = 0\}$ – пряма паралельна осі Ox
3. $B = 0,\ A \neq 0,\ C \neq 0\ \{Ax + C = 0\}$ – пряма паралельна осі Oy
4. $B = C = 0,\ A \neq 0$ – пряма збігається з віссю Oy
5. $A = C = 0,\ B \neq 0$ – пряма збігається з віссю Ox

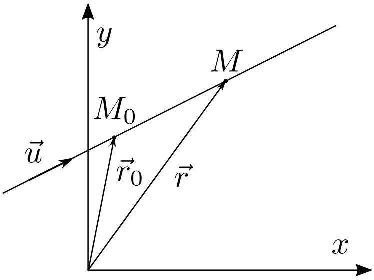
Рівняння прямої може бути представлене в різному виді залежно від яких-небудь заданих початкових умов.

Параметричне рівняння прямої



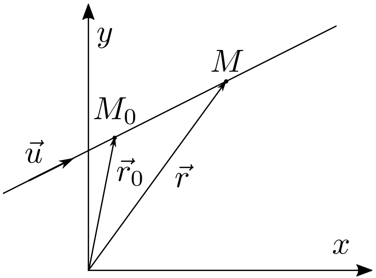
$\vec{u} = (m, n)$ – **напрямний вектор** прямої.

Параметричне рівняння прямої



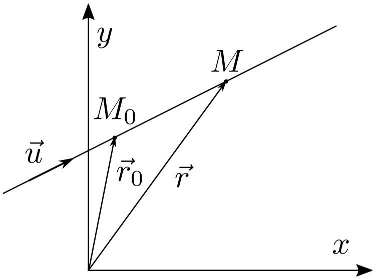
$\vec{u} = (m, n)$ – **напрямний вектор** прямої.
$M_0(x_0, y_0)$ і $M(x, y)$ – довільні точки прямої.

Параметричне рівняння прямої



$\vec{u} = (m, n)$ – **напрямний вектор** прямої.
$M_0(x_0, y_0)$ і $M(x, y)$ – довільні точки прямої.
Позначимо $\overrightarrow{OM_0} = \vec{r_0}$ і $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, тоді $\vec{r} = \vec{r_0} + \overrightarrow{M_0M}$.

Параметричне рівняння прямої



$\vec{u} = (m, n)$ – **напрямний вектор** прямої.
$M_0(x_0, y_0)$ і $M(x, y)$ – довільні точки прямої.
Позначимо $\overrightarrow{OM_0} = \vec{r_0}$ і $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, тоді $\vec{r} = \vec{r_0} + \overrightarrow{M_0M}$.

$$\overrightarrow{M_0M} = \vec{u}t,$$

де t – деякий параметр.

Параметричне рівняння прямої

Разом, можна записати: $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{u}t$.
Оскільки цьому рівнянню задовольняють координати будь-якої точки прямої, то отримане рівняння – **параметричне рівняння прямої на площині**.

Параметричне рівняння прямої

Разом, можна записати: $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{u}t$.
Оскільки цьому рівнянню задовольняють координати будь-якої точки прямої, то отримане рівняння – **параметричне рівняння прямої на площині**.
Це векторне рівняння може бути представлене в координатній формі:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}$$

Виключаючи t з рівнянь системи, маємо:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \Rightarrow nx - my - mx_0 + ny_0 = 0.$$

Останнє рівняння, із врахуванням перепозначення $A = n$, $B = -m$, $C = ny_0 - mx_0$, збігається із загальним рівнянням прямої.

Рівняння прямої за точкою і вектором нормалі

<u>Твердження.</u> У декартовій прямокутній системі координат вектор з компонентами (A, B) перпендикулярний прямій, заданій рівнянням $Ax + By + C = 0$.
<u>Приклад.</u> Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $A(1, 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (3, -1)$.
Складемо при $A = 3$ і $B = -1$ рівняння прямої: $3x - y + C = 0$. Для знаходження коефіцієнта C підставимо в отриманий вираз координати заданої точки A.
Одержуємо: $3 - 2 + C = 0$, отже $C = -1$.
Разом: шукане рівняння: $3x - y - 1 = 0$.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Нехай у просторі задані дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, тоді рівняння прямої, що проходить через ці точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Якщо якийсь зі знаменників дорівнює нулю, варто прирівняти нулю відповідний чисельник.
На площині записане вище рівняння прямій спрощується:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

якщо $x_1 \neq x_2$ і $x = x_1$, якщо $x_1 = x_2$.
Дріб $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$ називається **кутовим коефіцієнтом** прямої.