Границя функції у точці

Означення границі

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки $x = a$ (тобто в самій точці $x = a$ функція може бути і невизначена).

Означення границі

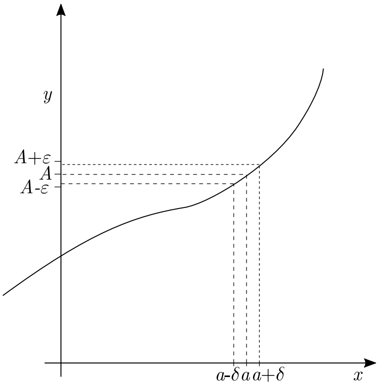
Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки $x = a$ (тобто в самій точці $x = a$ функція може бути і невизначена).

Означення. Число A називається **границею** функції $f(x)$ при $x \to a$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для всіх x таких, що

$$0 < |x - a| < \delta$$

виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Означення границі



Означення границі

Інша форма:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x : |x - a| < \delta : |f(x) - A| < \varepsilon$$

Означення границі

Інша форма:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x : |x - a| < \delta : |f\left(x\right) - A| < \varepsilon$$

Або
Якщо $a - \delta < x < a + \delta$, $x \neq a$, то виконується нерівність $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Запис границі функції у точці

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

Запис границі функції у точці

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

або

$$f(x) \to A \text{ при } x \to a$$

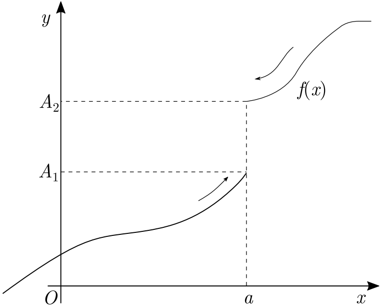
Зв'язок із границею послідовності (означення Гейне (Heine))

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \{x_n\} : \lim_{n \to \infty} x_n = a : \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

Границі ліворуч і праворуч

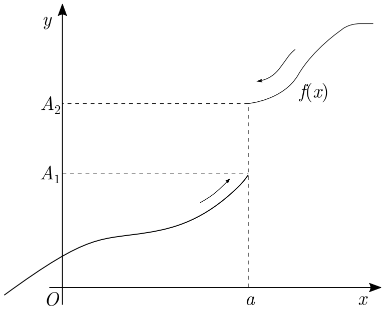
Означення. Якщо $f(x) \to A_1$ при $x \to a$ тільки при $x < a$, то $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$ - називається **границею** функції $f(x)$ у точці $x = a$ **ліворуч**, а якщо $f(x) \to A_2$ при $x \to a$ тільки при $x > a$, то $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$ називається **границею** функції $f(x)$ у точці $x = a$ **праворуч**.

Границі ліворуч і праворуч



Наведене вище визначення відповідає випадку, коли функція $f(x)$ не визначена у самій точці $x = a$, але визначена у деякому як завгодно малому околі цієї точки.

Границі ліворуч і праворуч



Наведене вище визначення відповідає випадку, коли функція $f(x)$ не визначена у самій точці $x = a$, але визначена у деякому як завгодно малому околі цієї точки.
Межі A_1 і A_2 називаються також **однобічними границями** функції $f(x)$ у точці $x = a$. Також кажуть, що A – **скінченна границя** функції $f(x)$.

Границя функції при прямуванні аргументу до нескінченності

<u>**Означення.**</u> Число A називається **границею** функції $f(x)$ при $x \to \infty$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M > 0$, що для всіх x, $x > M$ виконується нерівність

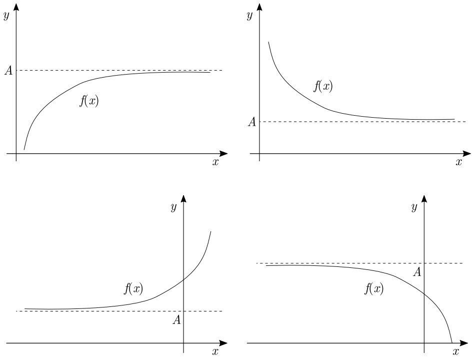
$$|A - f(x)| < \varepsilon$$

При цьому вважається, що функція $f(x)$ визначена в околі нескінченності.

Границя на нескінченності

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

Графічно можливі випадки представлено на наведеному нижче рисунку.



Границя на нескінченності

Аналогічно можна визначити границі $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$ для будь-якого $x > M$ і $\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$ для будь-якого $x < M$.

Основні теореми про границі

Теорема 1. $\lim\limits_{x \to a} C = C$, де $C = \text{const}$.

<u>**Теорема 1.**</u> $\lim\limits_{x \to a} C = C$, де $C = \text{const}$.
Наступні теореми справедливі у припущенні, що функції $f(x)$ і $g(x)$ мають скінченні границі при $x \to a$.

Основні теореми про границі

Теорема 2. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$
Доведення цієї теореми буде наведено нижче.

Основні теореми про границі

<u>Теорема 3.</u> $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Основні теореми про границі

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}\left[f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)\right]=\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)\cdot\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)$

Наслідок. $\lim\limits_{x\to a}C\cdot f\left(x\right)=C\cdot\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)$

Основні теореми про границі

Теорема 4. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ за умови $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

Основні теореми про границі

Теорема 5. *Якщо* $f(x) > 0$ *поблизу точки* $x = a$ *і* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, *то* $A \geqslant 0$.
Аналогічно визначається знак границі при $f(x) < 0$, $f(x) \leqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$.

Основні теореми про границі

Теорема 6. *Якщо* $g(x) \leqslant f(x) \leqslant u(x)$ *поблизу точки* $x = a$ *і* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} u(x) = A$, *то і* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Обмежені функції

Означення. Функція $f(x)$ називається **обмеженою** поблизу точки $x = a$, якщо існує таке число $M > 0$, що $|f(x)| < M$ поблизу точки $x = a$.

Основні теореми про границі

Теорема 7. *Якщо функція $f(x)$ має скінченну границю при $x \to a$, то вона обмежена поблизу точки $x = a$.*

Доведення

Нехай $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, тобто $|f(x) - A| < \varepsilon$

Доведення

Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, тобто $|f(x) - A| < \varepsilon$, тоді

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leqslant |f(x) - A| + |A|$$

Доведення

Нехай $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, тобто $|f(x) - A| < \varepsilon$, тоді

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leqslant |f(x) - A| + |A|$$

або

$$|f(x)| < \varepsilon + |A|\,,$$

Доведення

Нехай $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, тобто $|f(x) - A| < \varepsilon$, тоді

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leqslant |f(x) - A| + |A|$$

або

$$|f(x)| < \varepsilon + |A|\,,$$

тобто

$$|f(x)| < M,$$

де

$$M = \varepsilon + A$$

Теорему доведено.

Нескінченно малі функції

Означення. Функція $f(x)$ називається **нескінченно малою** при $x \to a$, де a може бути числом або однією з величин ∞, $+\infty$ або $-\infty$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Нескінченно малі функції

Означення. Функція $f(x)$ називається **нескінченно малою** при $x \to a$, де a може бути числом або однією з величин ∞, $+\infty$ або $-\infty$, якщо $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.
Нескінченно малою функція може бути тільки якщо вказати, до якого числа прямує аргумент x. При різних значеннях a функція може бути нескінченно малою чи ні.

Приклад

Функція $f(x) = x^n$ є нескінченно малою при $x \to 0$ і не є нескінченно малою при $x \to 1$, оскільки $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$.

Приклад

Функція $f(x) = x^n$ є нескінченно малою при $x \to 0$ і не є нескінченно малою при $x \to 1$, оскільки $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$.

Теорема. *Для того, щоб функція $f(x)$ при $x \to a$ мала границю, рівну A, необхідно і достатньо, щоб поблизу точки $x = a$ виконувалася умова*

$$f\left(x\right) = A + \alpha\left(x\right),$$

де $\alpha\left(x\right)$ – нескінченно мала при $x \to a$ ($\alpha\left(x\right) \to 0$ при $x \to a$).

Властивості нескінченно малих функцій

1. Сума фіксованого числа нескінченно малих функцій при $x \to a$ теж нескінченно мала функція при $x \to a$.

Властивості нескінченно малих функцій

1. Сума фіксованого числа нескінченно малих функцій при $x \to a$ теж нескінченно мала функція при $x \to a$.
2. Добуток фіксованого числа нескінченно малих функцій при $x \to a$ теж нескінченно мала функція при $x \to a$.

Властивості нескінченно малих функцій

1. Сума фіксованого числа нескінченно малих функцій при $x \to a$ теж нескінченно мала функція при $x \to a$.
2. Добуток фіксованого числа нескінченно малих функцій при $x \to a$ теж нескінченно мала функція при $x \to a$.
3. Добуток нескінченно малої функції на функцію, обмежену поблизу точки $x = a$, є нескінченно малою функцією при $x \to a$.

Властивості нескінченно малих функцій

1. Сума фіксованого числа нескінченно малих функцій при $x \to a$ теж нескінченно мала функція при $x \to a$.
2. Добуток фіксованого числа нескінченно малих функцій при $x \to a$ теж нескінченно мала функція при $x \to a$.
3. Добуток нескінченно малої функції на функцію, обмежену поблизу точки $x = a$, є нескінченно малою функцією при $x \to a$.
4. Частка від ділення нескінченно малої функції на функцію, границя якої не дорівнює нулю, є величина нескінченно мала.

Доведення теорем, наведених вище

Використовуючи поняття нескінченно малих функцій, наведемо доведення деяких теорем про границі, наведених вище.

<u>**Доведення теореми 2.**</u> Представимо $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$, де $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, $\quad B = \lim\limits_{x \to a} g(x)$, тоді

$$f(x) \pm g(x) = (A \pm B) + \alpha(x) \pm \beta(x)$$

$A + B = \mathrm{const}$, $\alpha(x) \pm \beta(x)$ – нескінченно мала, значить

$$\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

Теорему доведено.

Доведення теорем, наведених вище

Доведення теореми 3. Представимо $f\left(x\right)=A+\alpha\left(x\right)$, $g\left(x\right)=B+\beta\left(x\right)$, де $A=\lim\limits_{x\to a}f(x), \quad B=\lim\limits_{x\to a}g(x)$, тоді

$$f(x)\cdot g(x)=A\cdot B+A\beta(x)+\alpha(x)B+\alpha(x)\beta(x)$$

$A\cdot B=const$, $\alpha\left(x\right)$ і $\beta\left(x\right)$ – нескінченно малі, значить

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to a}A\cdot B+0=A\cdot B=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$

Теорему доведено.

Означення. Границя функції $f(x)$ при $x \to a$, де a – число, **дорівнює нескінченності**, якщо для будь-якого числа $M > 0$ існує таке число $\Delta > 0$, що нерівність

$$|f(x)| > M$$

виконується при всіх x, що задовольняють умові

$$0 < |x - a| < \Delta$$

Запис

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Від'ємна нескінченна границя

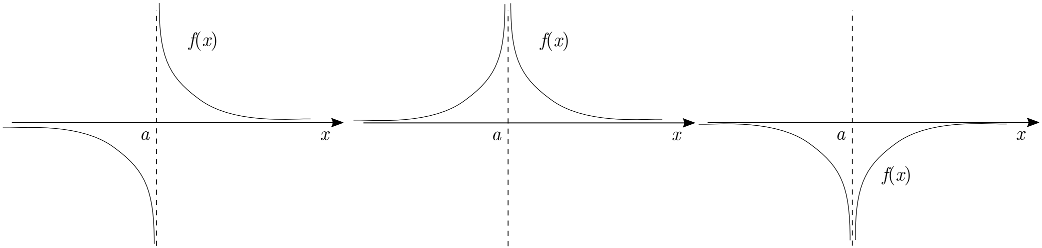
Якщо в наведеному вище визначенні замінити умову $|f\,(x)| > M$ на $f(x) > M$, то одержимо:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty,$$

а якщо замінити на $f(x) < -M$, то:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Графічні ілюстрації



Нескінченно велика функція

Означення. Функція називається **нескінченно великою** при $x \to a$, де a – число або одна з величин ∞, $+\infty$ або $-\infty$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, де A – число або одна з величин ∞, $+\infty$ або $-\infty$.

Зв'язок нескінченно великих і нескінченно малих функцій

Теорема. *Якщо* $f(x) \to 0$ *при* $x \to a$ *(якщо* $x \to \infty$*), і не обертається в нуль, то*

$$y = \frac{1}{f(x)} \to \infty$$

Порівняння нескінченно малих функцій

Нехай $\alpha(x)$, $\beta(x)$ і $\gamma(x)$ – нескінченно малі функції при $x \to a$. Будемо позначати ці функції α, β і γ відповідно. Ці нескінченно малі функції можна порівнювати за швидкістю їхнього спадання, тобто за швидкістю їхнього прямування до нуля.

Наприклад, функція $f(x) = x^{10}$ прямує до нуля швидше, ніж функція $f(x) = x$.

о маленьке

Означення. Якщо $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$, то функція α називається **нескінченно малою вищого порядку**, ніж функція β. Таке співвідношення між нескінченно малими позначається так: $\alpha = o(\beta)$ (читається «о маленьке»).

О велике

Означення. Якщо $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = A$, $A \neq 0$, $A = const$, то α і β називаються **нескінченно малими одного порядку**. Таке співвідношення між нескінченно малими позначається так: $\alpha = O(\beta)$ (читається «о велике»).

Еквівалентні нескінченно малі

Означення. Якщо $\lim_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta} = 1$, то функції α і β називаються **еквівалентними нескінченно малими**.

Еквівалентні нескінченно малі

Означення. Якщо $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$, то функції α і β називаються **еквівалентними нескінченно малими**. Записують $\alpha \sim \beta$ при $x \to a$.

Приклад

Порівняємо нескінченно малі при $x \to 0$ функції $f(x) = x^{10}$ і $f(x) = x$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^{10}}{x} = \lim_{x \to 0} x^9 = 0$$

тобто функція $f(x) = x^{10}$ – нескінченно мала вищого порядку, ніж $f(x) = x$.

Порядок нескінченно малої

Означення. Нескінченно мала функція α називається **нескінченно малою порядку** k відносно нескінченно малої функції β, якщо границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta^k}$ скінченна і відмінна від нуля.

Порядок нескінченно малої

<u>Означення.</u> Нескінченно мала функція α називається **нескінченно малою порядку** k відносно нескінченно малої функції β, якщо границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta^k}$ скінченна і відмінна від нуля.

Однак, слід зазначити, що не всі нескінченно малі функції можна порівнювати між собою. Наприклад, якщо відношення $\dfrac{\alpha}{\beta}$ не має границі, то функції непорівнянні.

Приклад

Якщо $\alpha = x^2$, $\beta = x$, то при $x \to 0$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha}{\beta^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x \cdot x} = 1$, тобто функція α – нескінченно мала порядку 2 щодо функції β.

Приклад

Якщо $\alpha = x \sin \dfrac{1}{x}, \quad \beta = x$, то при $x \to 0$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha}{\beta}$ не існує, тобто функція α і β непорівнянні.

Властивості еквівалентних нескінченно малих

1. $\alpha \sim \alpha$, $\left(\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\alpha} = 1\right)$

Властивості еквівалентних нескінченно малих

1. $\alpha \sim \alpha$, $\left(\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\alpha} = 1\right)$
2. Якщо $\alpha \sim \beta$ і $\beta \sim \gamma$, то $\alpha \sim \gamma$, $\left(\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\gamma} = \lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{\alpha}{\beta} \cdot \dfrac{\beta}{\gamma}\right) = 1 \cdot 1 = 1\right)$

Властивості еквівалентних нескінченно малих

1. $\alpha \sim \alpha$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\alpha} = 1\right)$
2. Якщо $\alpha \sim \beta$ і $\beta \sim \gamma$, то $\alpha \sim \gamma$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\gamma} = \lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{\beta}{\gamma}\right) = 1\cdot 1 = 1\right)$
3. Якщо $\alpha \sim \beta$, то $\beta \sim \alpha$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta}{\alpha} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\dfrac{\alpha}{\beta}} = 1\right)$

Властивості еквівалентних нескінченно малих

1. $\alpha \sim \alpha$, $\left(\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha}{\alpha} = 1\right)$
2. Якщо $\alpha \sim \beta$ і $\beta \sim \gamma$, то $\alpha \sim \gamma$, $\left(\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha}{\gamma} = \lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{\alpha}{\beta} \cdot \dfrac{\beta}{\gamma}\right) = 1 \cdot 1 = 1\right)$
3. Якщо $\alpha \sim \beta$, то $\beta \sim \alpha$, $\left(\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{\dfrac{\alpha}{\beta}} = 1\right)$
4. Якщо $\alpha \sim \alpha_1$ і $\beta \sim \beta_1$ і $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = k$, то і $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} = k$ або $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$.

Наслідки

а) якщо $\alpha \sim \alpha_1$ і $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = k$, то і $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha_1}{\beta}$

Наслідки

а) якщо $\alpha \sim \alpha_1$ і $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = k$, то і $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha_1}{\beta}$

б) якщо $\beta \sim \beta_1$ і $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = k$, то $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta_1}$

Знаходження границь за допомогою еквівалентних нескінченно малих

Властивість 4 особливо важлива на практиці, оскільки вона фактично означає, що границя відношення нескінченно малих не міняється при заміні їх на еквівалентні нескінченно малі. Цей факт дає можливість при знаходженні границь заміняти нескінченно малі на еквівалентні їм функції, що може значно спростити обчислення границь.

Головна частина

Якщо α і β – нескінченно малі при $x \to a$, причому β – нескінченно мала вищого порядку, чим α, то $\gamma = \alpha + \beta$ – нескінченно мала, еквівалентна α. Це можна довести наступною рівністю: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\gamma}{\alpha} = \lim\limits_{x\to a} \left(1 + \dfrac{\beta}{\alpha}\right) = 1.$

Тоді кажуть, що α – **головна частина** нескінченно малої функції γ.

Приклад

Функція $x^2 + x$ – нескінченно мала при $x \to 0$, x – головна частина цієї функції. Щоб показати це, запишемо $\alpha = x^2$, $\beta = x$, тоді

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0, \quad \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \to 0} (x + 1) = 1.$$