Визначні границі. Неперервність функцій

Перша визначна границя

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)},$$

де $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, $Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$ – многочлени.

Перша визначна границя

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)},$$

де $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, $Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$ – многочлени.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + ... + \frac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + ... + \frac{b_m}{x^m}\right)} = x^{n-m}\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + ... + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + ... + \frac{b_m}{x^m}}$$

Перша визначна границя

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)},$$

де $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, $Q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$ – многочлени.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^n\left(a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0+\frac{b_1}{x}+....+\frac{b_m}{x^m}\right)}=x^{n-m}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_m}{x^m}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_m}{x^m}}=\frac{a_0}{b_0}$$

Перша визначна границя

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)},$$

де $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, $Q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$ – многочлени.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^n\left(a_0+\dfrac{a_1}{x}+...+\dfrac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0+\dfrac{b_1}{x}+....+\dfrac{b_m}{x^m}\right)}=x^{n-m}\frac{a_0+\dfrac{a_1}{x}+...+\dfrac{a_n}{x^n}}{b_0+\dfrac{b_1}{x}+...+\dfrac{b_m}{x^m}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+\dfrac{a_1}{x}+...+\dfrac{a_n}{x^n}}{b_0+\dfrac{b_1}{x}+...+\dfrac{b_m}{x^m}}=\frac{a_0}{b_0}$$

Перша визначна границя

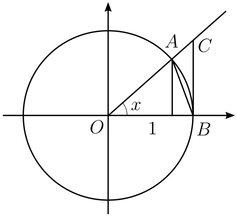
Разом: $$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}0, \quad \text{при} \quad n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0}, \quad \text{при} \quad n=m\\ \infty, \quad \text{при} \quad n>m\end{cases}$$

Друга визначна границя

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Друга визначна границя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

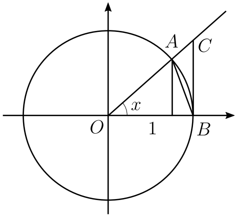


$$S_{\triangle OAB} < S_{OAB} < S_{\triangle OCB}$$

Друга визначна границя

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$S_{\triangle OAB} < S_{OAB} < S_{\triangle OCB}$$

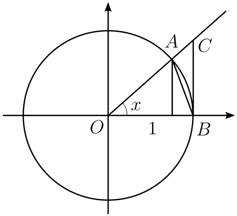


$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x \Rightarrow$$

Друга визначна границя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$S_{\triangle OAB} < S_{OAB} < S_{\triangle OCB}$$

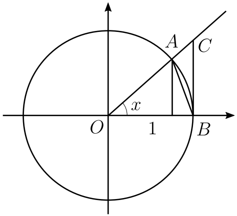


$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow$$

Друга визначна границя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

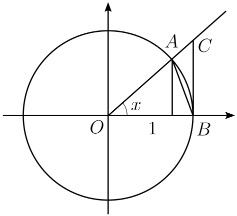
$$S_{\triangle OAB} < S_{OAB} < S_{\triangle OCB}$$



$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

Друга визначна границя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$



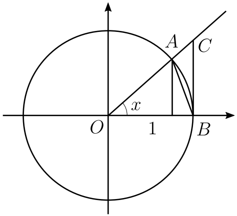
$$S_{\triangle OAB}<S_{OAB}<S_{\triangle OCB}$$

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg}x\Rightarrow 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\Rightarrow 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$$

$$1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<\frac{x^2}{2}$$

Друга визначна границя

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



$$S_{\triangle OAB} < S_{OAB} < S_{\triangle OCB}$$

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}$$

Звідси, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \varepsilon : |x| < \delta = \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < x < \varepsilon.$

Третя визначна границя

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Корисні границі

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Корисні границі

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

Корисні границі

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \left| \begin{array}{c} y = \frac{1}{x} \\ y \to \infty \end{array} \right|$$

Корисні границі

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left| \begin{array}{c} y = \frac{1}{x} \\ y \to \infty \end{array} \right| = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}$$

Корисні границі

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left| \begin{array}{c} y = \frac{1}{x} \\ y \to \infty \end{array} \right| = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e$$

Корисні границі

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x}$$

Корисні границі

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log_a (1+x)$$

Корисні границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+x)=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Корисні границі

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \log_a (1+x) = \lim_{x \to 0} \log_a (1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e$$

Корисні границі

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log_a (1+x) = \lim_{x\to 0} \log_a (1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln (1+x)}{x} = 1$$

Корисні границі

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a;$$

Корисні границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$$

Корисні границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\left|\begin{array}{c} y=a^x-1\Rightarrow x=\log_a(1+y) \\ x\to 0\Rightarrow y\to 0 \end{array}\right|$$

Корисні границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\left|\begin{array}{c} y=a^x-1\Rightarrow x=\log_a(1+y)\\ x\to 0\Rightarrow y\to 0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}$$

Корисні границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\left|\begin{array}{c} y=a^x-1\Rightarrow x=\log_a(1+y) \\ x\to 0\Rightarrow y\to 0 \end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\frac{1}{\log_a e}$$

Корисні границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\left|\begin{array}{c} y=a^x-1\Rightarrow x=\log_a(1+y) \\ x\to 0\Rightarrow y\to 0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a;$$

Корисні границі

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m$$

Корисні границі

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x}$$

Корисні границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{m\ln(1+x)}-1}{x}$$

Корисні границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{m\ln(1+x)}-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{m\ln(1+x)}-1}{m\ln(1+x)}\cdot\frac{m\ln(1+x)}{x}$$

Корисні границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{m\ln(1+x)}-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{m\ln(1+x)}-1}{m\ln(1+x)}\cdot\frac{m\ln(1+x)}{x}=m\lim_{x\to 0}\frac{e^{m\ln(1+x)}-1}{m\ln(1+x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$$

Корисні границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{m\ln(1+x)}-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{m\ln(1+x)}-1}{m\ln(1+x)}\cdot\frac{m\ln(1+x)}{x}=m\lim_{x\to 0}\frac{e^{m\ln(1+x)}-1}{m\ln(1+x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=m$$

Таблиця еквівалентних нескінченно малих величин

Якщо $\alpha(x) \to 0$ при $x \to b$, тоді

$\sin\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$	$\arcsin\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$\mathrm{tg}\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$	$\mathrm{arctg}\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$1 - \cos\, \alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}$	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha\,(x) \ln\, a$
$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$	$\log_a(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x) \log_a\, e$
$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$	$(1 + \alpha(x))^a - 1 \sim a\alpha\,(x)$

Приклад

Знайти границю $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x}$

Приклад

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x}$

Розв'язання. Оскільки $\operatorname{tg} 5x \sim 5x$ і $\sin 7x \sim 7x$ при $x \to 0$, то, замінивши функції еквівалентними нескінченно малими, одержимо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x}$$

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x}$

Розв'язання. Оскільки $\operatorname{tg} 5x \sim 5x$ і $\sin 7x \sim 7x$ при $x \to 0$, то, замінивши функції еквівалентними нескінченно малими, одержимо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{7x}$$

Приклад

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x}$

Розв'язання. Оскільки $\operatorname{tg} 5x \sim 5x$ і $\sin 7x \sim 7x$ при $x \to 0$, то, замінивши функції еквівалентними нескінченно малими, одержимо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$$

Приклад

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{1-\cos x}$.

Приклад

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{1-\cos x}$.

Розв'язання. Оскільки $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2} \sim 2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ при $x \to 0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{1-\cos x}$$

Приклад

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{1-\cos x}$.

Розв'язання. Оскільки $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2} \sim 2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ при $x \to 0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\frac{x^2}{2}}$$

Приклад

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{1-\cos x}$.

Розв'язання. Оскільки $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2} \sim 2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ при $x \to 0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} 2x = 0.$$

Неперервність функції у точці

<u>**Означення.**</u> Функція $f(x)$, визначена в околі деякої точки x_0, називається **неперервною у точці** x_0, якщо границя функції і її значення у цій точці рівні, тобто

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Неперервність функції у точці

Означення. Функція $f(x)$, визначена в околі деякої точки x_0, називається **неперервною у точці** x_0, якщо границя функції і її значення у цій точці рівні, тобто

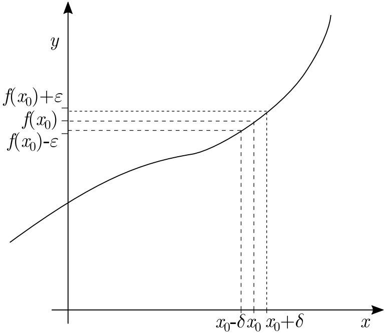
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Той же факт можна записати інакше: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} x\right)$

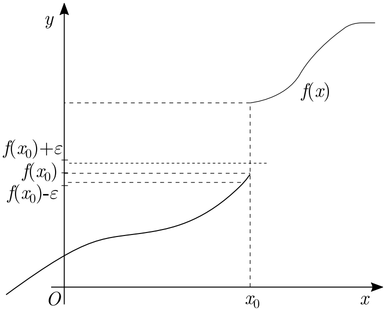
Розривна функція

<u>Означення.</u> Якщо функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, але не є неперервною в самій точці x_0, то вона називається **розривною** функцією, а точка x_0 – точкою розриву.

Приклад неперервної функції



Приклад розривної функції



Інші формальні означення

<u>Означення.</u> Функція $f(x)$ називається неперервною у точці x_0, якщо для будь-якого додатного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\Delta > 0$, що для будь-яких x, що задовольняють умові

$$|x - x_0| < \Delta$$

виконується нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Інші формальні означення

<u>Означення.</u> Функція $f(x)$ називається **неперервною** у точці $x = x_0$, якщо приріст функції у точці x_0 є нескінченно малою величиною.

$$f\left(x\right) = f\left(x_0\right) + \alpha\left(x\right)$$

де $\alpha(x)$ – нескінченно мала при $x \to x_0$.

Властивості неперервних функцій

1) Сума, різниця і добуток неперервних у точці x_0 функцій – є функція, неперервна у точці x_0.
2) Частка двох неперервних функцій $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ є неперервна функція за умови, що $g(x)$ не дорівнює нулю у точці x_0.
3) Суперпозиція неперервних функцій є неперервною функцією. Ця властивість може бути записана у такий спосіб:
Якщо $u = f(x)$ – неперервна функція у точці $x = x_0$, а $v = g(y)$ – неперервна функція у точці $y = f(x_0)$, то функція $v = g\left(f(x)\right)$ – неперервна функція у точці $x = x_0$.
Справедливість наведених вище властивостей можна легко довести, використовуючи теореми про границі.

Неперервність деяких елементарних функцій

1) Функція $f(x) = C$, $C = \mathrm{const}$ – неперервна функція на всій області визначення.

Неперервність деяких елементарних функцій

2) Раціональна функція $f(x) = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$ неперервна для всіх значень x, крім тих, при яких знаменник обертається в нуль. Таким чином, функція цього виду неперервна на всій області визначення.

Неперервність деяких елементарних функцій

3) Тригонометричні функції неперервні на своїй області визначення.

Неперервність деяких елементарних функцій

3) Тригонометричні функції неперервні на своїй області визначення.

Доведемо властивість 3 для функції $y = \sin x$.

Неперервність деяких елементарних функцій

3) Тригонометричні функції неперервні на своїй області визначення.
Доведемо властивість 3 для функції $y = \sin x$.
Запишемо приріст функції $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$, або після перетворення:

$$\Delta y = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 2\lim_{\Delta x \to 0}\left(\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\right) = 0$$

Дійсно, є границя добутку двох функцій $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ і $\sin\frac{\Delta x}{2}$. При цьому функція косинус обмежена функція при $\Delta x \to 0$; $\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant 1$, а оскільки границя функції синус $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin\frac{\Delta x}{2} = 0$, то вона є нескінченно малою при $\Delta x \to 0$.

Неперервність деяких елементарних функцій

Таким чином, є добуток обмеженої функції на нескінченно малу, отже цей добуток, тобто функція Δy – нескінченно мала. Відповідно до розглянутого вище визначеннями, функція $y = \sin x$ – неперервна функція для будь-якого значення $x = x_0$ з області визначення, оскільки її приріст у цій точці – нескінченно мала величина.
Аналогічно можна довести неперервність інших тригонометричних функцій на всій області визначення.

Неперервність деяких елементарних функцій

Взагалі варто відзначити, що **всі основні елементарні функції неперервні на всій своїй області визначення**.