Визначник матриці

Визначники (детермінанти)

<u>Означення.</u> Визначником (детермінантом) квадратної матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

називається число, яке може бути обчислене за елементами матриці за формулою:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} \det M_{1k},$$

де $\det M_{1k}$ – визначник матриці, отриманої з вихідної викреслюванням першого рядка і k-го стовбчика.

Інші розклади визначника

За першим стовпцем:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det M_{k1}$$

Інші розклади визначника

За першим стовпцем:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det M_{k1}$$

За будь-яким рядком або стовпцем матриці

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} \det M_{ik}, i = 1, 2, \ldots, n...$$

Інші розклади визначника

За першим стовпцем:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det M_{k1}$$

За будь-яким рядком або стовпцем матриці

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} \det M_{ik}, i = 1, 2, \ldots, n...$$

Очевидно, що різні матриці можуть мати однакові визначники.

Одинична матриця

Означення. Матриця вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = I$$

називається **одиничною матрицею**.

Одинична матриця

Означення. Матриця вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = I$$

називається **одиничною матрицею**.
Визначник одиничної матриці дорівнює 1.

Додатковий мінор

Для зазначеної матриці A матриця M_{1k} називається **додатковим мінором** елемента матриці a_{1k}. Таким чином, можна помітити, що кожний елемент матриці має свій додатковий мінор. Додаткові мінори існують тільки у квадратних матрицях.

Додатковий мінор

Для зазначеної матриці A матриця M_{1k} називається **додатковим мінором** елемента матриці a_{1k}. Таким чином, можна помітити, що кожний елемент матриці має свій додатковий мінор. Додаткові мінори існують тільки у квадратних матрицях.

Означення. **Додатковий мінор** довільного елемента квадратної матриці a_{ij} дорівнює матриці, отриманій з вихідної викреслюванням i-го рядка та j-го стовбчика.

Класичне визначення визначника

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}\sigma} \left(a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n} \right),$$

де σ_i є елементами перестановки σ чисел від 1 до n; $\mathrm{inv}\sigma$ – інверсія перестановки σ, яка дорівнює кількості інверсних пар у перестановці. Інверсними називаються такі пари елементів перестановки, для яких $\sigma_k > \sigma_l$ при $k < l$. Наведене тут означення використано лише для спрощення викладу.

Транспонована матриця

Матрицю $B = A^T$ називають **транспонованою** матрицею A, а перехід від A до B **транспонуванням**, якщо елементи кожного рядка матриці A записати у тім же порядку в стовпці матриці B.

Властивості визначника

Властивість 1. Важливою властивістю визначників є наступне співвідношення:

$$\det A = \det A^T;$$

Властивості визначника

Властивість 1. Важливою властивістю визначників є наступне співвідношення:

$$\det A = \det A^T;$$

Властивість 2. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Властивості визначника

Властивість 1. Важливою властивістю визначників є наступне співвідношення:

$$\det A = \det A^T;$$

Властивість 2. $\det(AB) = \det A \cdot \det B.$
Властивість 3. Якщо у квадратній матриці поміняти місцями які-небудь два рядки (або стовпці), то визначник матриці змінить знак, не змінившись за абсолютною величиною.

Властивості визначника

Властивість 1. Важливою властивістю визначників є наступне співвідношення:

$$\det A = \det A^T;$$

Властивість 2. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.
Властивість 3. Якщо у квадратній матриці поміняти місцями які-небудь два рядки (або стовпці), то визначник матриці змінить знак, не змінившись за абсолютною величиною.
Властивість 4. При множенні стовпця (або рядка) матриці на число її визначник множиться на це число.

Лінійна залежність рядків

<u>Означення:</u> Стовпці (рядки) матриці називаються **лінійно залежними**, якщо існує їхня лінійна комбінація, рівна нулю, що має нетривіальні (не рівні нулю) розв'язки.

Властивість 5. Якщо в матриці A рядки або стовпці лінійно залежні, то її визначник дорівнює нулю.

Властивості визначника

Властивість 5. Якщо в матриці A рядки або стовпці лінійно залежні, то її визначник дорівнює нулю.
Властивість 6. Якщо матриця містить нульовий стовпець або нульовий рядок, то її визначник дорівнює нулю. (Дане твердження очевидне, оскільки рахувати визначник можна саме за нульовим рядком або стовпцем.)

Властивості визначника

Властивість 5. Якщо в матриці A рядки або стовпці лінійно залежні, то її визначник дорівнює нулю.
Властивість 6. Якщо матриця містить нульовий стовпець або нульовий рядок, то її визначник дорівнює нулю. (Дане твердження очевидне, оскільки рахувати визначник можна саме за нульовим рядком або стовпцем.)
Властивість 7. Визначник матриці не зміниться, якщо до елементів однієї з його рядків (стовпця) додати (відняти) елементи іншого рядка (стовпця), помножені на якесь число, не рівне нулю.

Властивості визначника

Властивість 5. Якщо в матриці A рядки або стовпці лінійно залежні, то її визначник дорівнює нулю.
Властивість 6. Якщо матриця містить нульовий стовпець або нульовий рядок, то її визначник дорівнює нулю. (Дане твердження очевидне, оскільки рахувати визначник можна саме за нульовим рядком або стовпцем.)
Властивість 7. Визначник матриці не зміниться, якщо до елементів однієї з його рядків (стовпця) додати (відняти) елементи іншого рядка (стовпця), помножені на якесь число, не рівне нулю.
Властивість 8. Якщо для елементів якогось рядка або стовбчика матриці виконується співвідношення: $d = d_1 \pm d_2$, $e = e_1 \pm e_2$, $f_1 = \pm f_2$, то виконується:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ k & l & m \end{vmatrix}$$

Приклад.

Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Приклад.

Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Приклад.

Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Приклад.

Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2)$$

Приклад.

Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) = -5 + 18 + 6 = 19.$$

Обчислення визначників другого порядку

$$\det A = \begin{vmatrix} \overset{+}{a_{11}} & a_{12} \\ \underset{-}{a_{21}} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

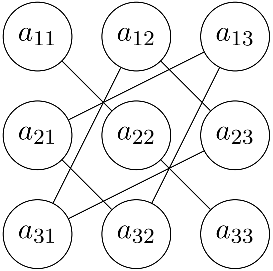
Правило Саррюса (Sarrus)

.

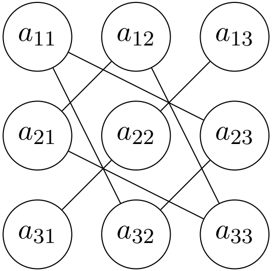
$$\det A = \left| \begin{array}{ccc:cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array} \right|$$

Правило трикутника

$\det A =$



$-$



Приклад

Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Приклад

Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти $\det AB$.

Приклад

Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти $\det AB$.

1-й спосіб: $\det A = 4 - 6 = -2$; $\det B = 15 - 2 = 13$;

Приклад

Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти $\det AB$.

1-й спосіб: $\det A = 4 - 6 = -2$; $\det B = 15 - 2 = 13$;

Приклад

Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти $\det AB$.

1-й спосіб: $\det A = 4 - 6 = -2$; $\det B = 15 - 2 = 13$;

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B = -26.$$

Приклад

Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти $\det AB$.

1-й спосіб: $\det A = 4 - 6 = -2$; $\det B = 15 - 2 = 13$;

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B = -26.$$

2-й спосіб: $AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$,

$$\det(AB) = 7 \cdot 18 - 8 \cdot 19 = 126 - 152 = -26.$$

Приклад

Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

Приклад

Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1(6-4) - 1(9-1) + 2(12-2) = -2 - 8 + 20 = 10.$$

Приклад

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2.$$

Приклад

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 10.$$

Приклад

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 10.$$

Значення визначника: $-10 + 6 - 40 = -44$.

Елементарні перетворення матриці

Елементарними перетвореннями матриці назвемо наступні перетворення:
1) множення рядка на число, відмінне від нуля;

Елементарні перетворення матриці

Елементарними перетвореннями матриці назвемо наступні перетворення:
1) множення рядка на число, відмінне від нуля;
2) додавання до елементів одного рядка елементів іншого рядка;

Елементарні перетворення матриці

Елементарними перетвореннями матриці назвемо наступні перетворення:
1) множення рядка на число, відмінне від нуля;
2) додавання до елементів одного рядка елементів іншого рядка;
3) переставляння рядків;

Елементарні перетворення матриці

Елементарними перетвореннями матриці назвемо наступні перетворення:
1) множення рядка на число, відмінне від нуля;
2) додавання до елементів одного рядка елементів іншого рядка;
3) переставляння рядків;
4) викреслювання (видалення) одного з однакових рядків (стовпців);

Елементарні перетворення матриці

Елементарними перетвореннями матриці назвемо наступні перетворення:
1) множення рядка на число, відмінне від нуля;
2) додавання до елементів одного рядка елементів іншого рядка;
3) переставляння рядків;
4) викреслювання (видалення) одного з однакових рядків (стовпців);
5) транспонування.

Елементарні перетворення матриці

Елементарними перетвореннями матриці назвемо наступні перетворення:
1) множення рядка на число, відмінне від нуля;
2) додавання до елементів одного рядка елементів іншого рядка;
3) переставляння рядків;
4) викреслювання (видалення) одного з однакових рядків (стовпців);
5) транспонування.
Ті ж операції, застосовані до стовпців, також називаються елементарними перетвореннями.

Елементарні перетворення матриці

Елементарними перетвореннями матриці назвемо наступні перетворення:
1) множення рядка на число, відмінне від нуля;
2) додавання до елементів одного рядка елементів іншого рядка;
3) переставляння рядків;
4) викреслювання (видалення) одного з однакових рядків (стовпців);
5) транспонування.
Ті ж операції, застосовані до стовпців, також називаються елементарними перетвореннями.
За допомогою елементарних перетворень можна до якого-небудь рядка або стовпця додати лінійну комбінацію інших рядків (стовпців).

Мінори

Означення. Якщо у матриці A вилучити кілька довільних рядків і стільки ж довільних стовпців, то визначник матриці, складеної з елементів, розташованих на перетині цих рядків і стовпців називається **мінором** матриці A. Якщо вилучено s рядків і стовпців, то отриманий мінор називається мінором порядку s.

Мінори

<u>**Означення.**</u> Якщо у матриці A вилучити кілька довільних рядків і стільки ж довільних стовпців, то визначник матриці, складеної з елементів, розташованих на перетині цих рядків і стовпців називається **мінором** матриці A. Якщо вилучено s рядків і стовпців, то отриманий мінор називається мінором порядку s.
Зазначимо, що вищесказане застосовне не тільки до квадратних матриць, але і до прямокутних.

Мінори

Означення. Якщо у матриці A вилучити кілька довільних рядків і стільки ж довільних стовпців, то визначник матриці, складеної з елементів, розташованих на перетині цих рядків і стовпців називається **мінором** матриці A. Якщо вилучено s рядків і стовпців, то отриманий мінор називається мінором порядку s.

Зазначимо, що вищесказане застосовне не тільки до квадратних матриць, але і до прямокутних.

Якщо викреслити з вихідної квадратної матриці A виділені рядки і стовпці, то отримана матриця буде додатковим мінором.

Класичне визначення мінора

У переважній частині класичної літератури мінором називається визначник матриці, яку ми тут назвали мінором, знову ж таки для спрощення викладу.

Алгебраїчні доповнення

Означення. Алгебраїчним доповненням мінора матриці називається визначник його додаткового мінора, помноженого на (-1) у степені, рівному сумі номера рядка і номера стовпця мінора матриці.

Ранг матриці

Порядок базисного мінору матриці називається **рангом** матриці і позначається $\mathrm{rank} A$.

Властивості рангу

Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.

Властивості рангу

Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.

Означення. Матриці, отримані в результаті елементарного перетворення, називаються **еквівалентними.**

Властивості рангу

Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.

Означення. Матриці, отримані в результаті елементарного перетворення, називаються **еквівалентними.**

Слід відзначити, що **рівні** матриці і **еквівалентні** матриці – поняття зовсім різні.

Властивості рангу

Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.
Означення. Матриці, отримані в результаті елементарного перетворення, називаються **еквівалентними.**
Слід відзначити, що **рівні** матриці і **еквівалентні** матриці – поняття зовсім різні.
Теорема. *Найбільша кількість лінійно незалежних стовпців у матриці дорівнює кількості лінійно незалежних рядків і дорівнює рангу матриці.*

Приклад

Визначити ранг матриці.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

Приклад

Визначити ранг матриці.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

Приклад

Визначити ранг матриці.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix},$$

Приклад

Визначити ранг матриці.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix}$$

Приклад

Визначити ранг матриці.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10$$

Приклад

Визначити ранг матриці.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rank} A = 2.$$

Приклад

Визначити ранг матриці.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Приклад

Визначити ранг матриці.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Приклад

Визначити ранг матриці.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Приклад

Визначити ранг матриці.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rank} A = 2.$$

Приклад

Визначити ранг матриці.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Приклад

Визначити ранг матриці.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Приклад

Визначити ранг матриці.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6$$

Приклад

Визначити ранг матриці.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

Приклад

Визначити ранг матриці.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

Приклад

Визначити ранг матриці.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{rank} A = 2.$$

Зауваження

Якщо за допомогою елементарних перетворень не вдається знайти матрицю, еквівалентну вихідній, але меншого розміру, то знаходження рангу матриці варто починати з обчислення мінорів найвищого можливого порядку. У вищенаведеному прикладі – це мінори порядку 3. Якщо визначник хоча б один з них не дорівнює нулю, то ранг матриці дорівнює порядку цього мінору.

Теорема про базисний мінор

Теорема. *У довільній матриці A кожний стовпець (рядок) є лінійною комбінацією стовпців (рядків), у яких розташований базисний мінор.*

Теорема про базисний мінор

Теорема. *У довільній матриці* A *кожний стовпець (рядок) є лінійною комбінацією стовпців (рядків), у яких розташований базисний мінор. Таким чином, ранг довільної матриці* A *дорівнює максимальному числу лінійно незалежних рядків (стовпців) у матриці.*

Теорема про базисний мінор

Теорема. *У довільній матриці A кожний стовпець (рядок) є лінійною комбінацією стовпців (рядків), у яких розташований базисний мінор. Таким чином, ранг довільної матриці A дорівнює максимальному числу лінійно незалежних рядків (стовпців) у матриці.* Якщо A – квадратна матриця і $\det A = 0$, то принаймні один зі стовпців – лінійна комбінація інших стовпців. Те ж саме справедливе і для рядків. Дане твердження є наслідком властивості лінійної залежності рядків або стовпчиків при визначнику рівному нулю.

Приклад

Визначити ранг матриці.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Приклад

Визначити ранг матриці.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Приклад

Визначити ранг матриці.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{R_2 + R_1} \\ \\ \xrightarrow{R_4 - R_1} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Приклад

Визначити ранг матриці.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{R_2+R_1} \\ \\ \xrightarrow{R_4-R_1} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Приклад

Визначити ранг матриці.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{R_2 + R_1} \\ \\ \xrightarrow{R_4 - R_1} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \\ \xrightarrow{R_4 - R_2} \end{matrix}$$

Дорозв'язання прикладу щодо знаходження рангу матриці з попередньої лекції

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -9 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -7 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

Дорозв'язання прикладу щодо знаходження рангу матриці з попередньої лекції

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -9 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -7 & -9 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_3}$$

Дорозв'язання прикладу щодо знаходження рангу матриці з попередньої лекції

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -9 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -7 & -9 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -9 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Дорозв'язання прикладу щодо знаходження рангу матриці з попередньої лекції

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -9 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -7 & -9 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -9 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rank} A = 4.$$