Приклад

Знайти характеристичні числа і власні вектори лінійного перетворення A, матриця лінійного перетворення $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Складемо характеристичне рівняння:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Розв'язання

Складемо характеристичне рівняння:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\left((5-\lambda)(1-\lambda) - 1\right) - (1-\lambda-3) + 3(1-15+3\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)\left(5-5\lambda-\lambda+\lambda^2-1\right) + 2 + \lambda - 42 + 9\lambda = 0$$

Розв'язання

Складемо характеристичне рівняння:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\left((5-\lambda)(1-\lambda)-1\right) - (1-\lambda-3) + 3(1-15+3\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)\left(5-5\lambda-\lambda+\lambda^2-1\right) + 2 + \lambda - 42 + 9\lambda = 0$$

$$(1-\lambda)\left(4-6\lambda+\lambda^2\right) + 10\lambda - 40 = 0$$

$$4 - 6\lambda + \lambda^2 - 4\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 + 10\lambda - 40 = 0$$

Розв'язання

Складемо характеристичне рівняння:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\left((5-\lambda)(1-\lambda)-1\right)-(1-\lambda-3)+3\left(1-15+3\lambda\right)=0$$

$$(1-\lambda)\left(5-5\lambda-\lambda+\lambda^2-1\right)+2+\lambda-42+9\lambda=0$$

$$(1-\lambda)\left(4-6\lambda+\lambda^2\right)+10\lambda-40=0$$

$$4-6\lambda+\lambda^2-4\lambda+6\lambda^2-\lambda^3+10\lambda-40=0$$

$$-\lambda^3+7\lambda^2-36=0$$

Розв'язання

Складемо характеристичне рівняння:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\left((5-\lambda)(1-\lambda)-1\right)-(1-\lambda-3)+3(1-15+3\lambda)=0$$

$$(1-\lambda)\left(5-5\lambda-\lambda+\lambda^2-1\right)+2+\lambda-42+9\lambda=0$$

$$(1-\lambda)\left(4-6\lambda+\lambda^2\right)+10\lambda-40=0$$

$$4-6\lambda+\lambda^2-4\lambda+6\lambda^2-\lambda^3+10\lambda-40=0$$

$$-\lambda^3+7\lambda^2-36=0$$

Власні значення: $\lambda_1=-2$; $\lambda_2=3$; $\lambda_3=6$;

Розв'язання

1) Для $\lambda_1 = -2$: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

Розв'язання

1) Для $\lambda_1 = -2$: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

Маємо систему лінійних однорідних рівнянь, у якій дві базисні невідомі і одна вільна.

Розв'язання

1) Для $\lambda_1 = -2$: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

Маємо систему лінійних однорідних рівнянь, у якій дві базисні невідомі і одна вільна.

Якщо прийняти $x_1 = C$, то $\begin{cases} 7x_2 + x_3 = -C \\ x_2 + 3x_3 = -3C \end{cases}$ $\Rightarrow x_2 = 0;\ x_3 = -C;$

Розв'язання

1) Для $\lambda_1 = -2$: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

Маємо систему лінійних однорідних рівнянь, у якій дві базисні невідомі і одна вільна.

Якщо прийняти $x_1 = C$, то $\begin{cases} 7x_2 + x_3 = -C \\ x_2 + 3x_3 = -3C \end{cases}$ $\Rightarrow x_2 = 0;\ x_3 = -C;$

Власні вектори: $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} C.$

Розв'язання

2) Для $\lambda_2 = 3$: $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

Розв'язання

2) Для $\lambda_2 = 3$: $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

Якщо прийняти $x_1 = C$, то $\begin{cases} 2x_2 + x_3 = -C \\ x_2 - 2x_3 = -3C \end{cases}$ $\quad \Rightarrow x_2 = -C;\ x_3 = C.$

Розв'язання

2) Для $\lambda_2 = 3$: $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

Якщо прийняти $x_1 = C$, то $\begin{cases} 2x_2 + x_3 = -C \\ x_2 - 2x_3 = -3C \end{cases}$ $\Rightarrow x_2 = -C;\ x_3 = C.$

Власні вектори: $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} C.$

Розв'язання

3) Для $\lambda_3 = 6$: $\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

Розв'язання

3) Для $\lambda_3 = 6$: $\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

Якщо прийняти $x_1 = C$, то $\begin{cases} -x_2 + x_3 = -C \\ x_2 - 5x_3 = -3C \end{cases}$ $\Rightarrow x_2 = 2C;\ x_3 = C.$

Розв'язання

3) Для $\lambda_3 = 6$: $\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

Якщо прийняти $x_1 = C$, то $\begin{cases} -x_2 + x_3 = -C \\ x_2 - 5x_3 = -3C \end{cases}$ $\Rightarrow x_2 = 2C;\ x_3 = C.$

Власні вектори: $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} C.$

Власні вектори операторів, заданих симетричними матрицями

Якщо матриця симетрична, власні вектори є перпендикулярними. Зокрема, перпендикулярними є власні вектори для матриць, які складено із нормальних і дотичних напружень або моментів інерції.

Аналітична геометрія. Вектори. Системи координат.

Означення. **Вектором** називається прямолінійний відрізок (упорядкована пара точок).

Вектор в аналітичній геометрії

Означення. **Вектором** називається прямолінійний відрізок (упорядкована пара точок).
До векторів належить також і **нульовий** вектор, початок і кінець якого збігаються.

Довжина вектора

Означення. Довжиною (модулем) вектора називається відстань між початком і кінцем вектора.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = |\overrightarrow{a}|$$

Колінеарні вектори

<u>Означення.</u> Вектори називаються колінеарними, якщо вони розташовані на одній або паралельних прямих. Нульовий вектор колінеарний до будь-якого вектора.

Компланарні вектори

Означення. Вектори називаються **компланарними**, якщо існує площина, якій вони паралельні.

Компланарні вектори

<u>Означення.</u> Вектори називаються **компланарними**, якщо існує площина, якій вони паралельні.
Колінеарні вектори завжди компланарні, але не всі компланарні вектори колінеарні.

Рівні вектори

Означення. Вектори називаються **рівними**, якщо вони колінеарні, однаково спрямовані і мають однакові модулі.

Лінійні операції над векторами

<u>Означення.</u> Лінійними операціями над векторами називається додавання і множення на число.

Лінійні операції над векторами

Означення. **Лінійними операціями** над векторами називається додавання і множення на число.
Сумою векторів є вектор – $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Лінійні операції над векторами

Означення. **Лінійними операціями** над векторами називається додавання і множення на число.
Сумою векторів є вектор – $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
Добуток – $\vec{b} = \alpha\, \vec{a}$; $\quad \left|\overrightarrow{b}\right| = \alpha \left|\overrightarrow{a}\right|$, при цьому $\vec{a}$ колінеарний до $\vec{b}$.

Лінійні операції над векторами

<u>Означення.</u> Лінійними операціями над векторами називається додавання і множення на число.
Сумою векторів є вектор – $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
Добуток – $\vec{b} = \alpha\,\vec{a}$; $\quad \left|\overrightarrow{b}\right| = \alpha\,|\overrightarrow{a}|$, при цьому $\vec{a}$ колінеарний до $\vec{b}$.
Вектор $\vec{a}$ співнаправлений з вектором $\vec{b}$ ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$), якщо $\alpha > 0$.

Лінійні операції над векторами

Означення. **Лінійними операціями** над векторами називається додавання і множення на число.
Сумою векторів є вектор – $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
Добуток – $\vec{b} = \alpha\,\vec{a}$; $\quad \left|\overrightarrow{b}\right| = \alpha\,|\overrightarrow{a}|$, при цьому $\vec{a}$ колінеарний до $\vec{b}$.
Вектор $\vec{a}$ співнаправлений з вектором $\vec{b}$ ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$), якщо $\alpha > 0$.
Вектор $\vec{a}$ протилежно спрямований до вектора $\vec{b}$ ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$), якщо $\alpha < 0$.

Властивості векторів

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – комутативність.

Властивості векторів

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – комутативність.
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{A}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{A}$

Властивості векторів

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – комутативність.
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{A}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{A}$
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

Властивості векторів

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – комутативність.
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{A}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{A}$
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4. $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$

Властивості векторів

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – комутативність.
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{A}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{A}$
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4. $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$
5. $(\alpha \cdot \beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ – асоціативність

Властивості векторів

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – комутативність.
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{A}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{A}$
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4. $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$
5. $(\alpha \cdot \beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ – асоціативність
6. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ – дистрибутивність

Властивості векторів

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – комутативність.
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{A}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{A}$
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4. $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$
5. $(\alpha \cdot \beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ – асоціативність
6. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ – дистрибутивність
7. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

Властивості векторів

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – комутативність.
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{A}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{A}$
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4. $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$
5. $(\alpha \cdot \beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ – асоціативність
6. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ – дистрибутивність
7. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
8. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Базиси у просторі та на площині

<u>**Означення.**</u>
1) **Базисом** у просторі називаються будь-які 3 некомпланарні вектори, узяті в певному порядку.
2) **Базисом** на площині називаються будь-які 2 неколінеарні вектори, узяті в певному порядку.
3) **Базисом** на прямій називається будь-який ненульовий вектор.

Компоненти (координати) вектора

<u>**Означення.**</u> Якщо $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ – базис у просторі і $\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\,\overrightarrow{e_2} + \gamma\,\overrightarrow{e_3}$, то числа α, β і γ – називаються **компонентами або координатами** вектора $\vec{a}$ у цьому базисі.

Властивості координат вектора

1. рівні вектори мають однакові координати,

Властивості координат вектора

1. рівні вектори мають однакові координати,
2. при множенні вектора на число його координати теж множаться на це число,

Властивості координат вектора

1. рівні вектори мають однакові координати,
2. при множенні вектора на число його координати теж множаться на це число,
3. $\lambda \overrightarrow{a} = \lambda(\alpha \overrightarrow{e_1} + \beta\,\overrightarrow{e_2} + \gamma\,\overrightarrow{e_3}) = (\lambda\alpha)\overrightarrow{e_1} + (\lambda\beta)\,\overrightarrow{e_2} + (\lambda\gamma)\,\overrightarrow{e_3}$.

Властивості координат вектора

1. рівні вектори мають однакові координати,
2. при множенні вектора на число його координати теж множаться на це число,
3. $\lambda\overrightarrow{a} = \lambda(\alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\,\overrightarrow{e_2} + \gamma\,\overrightarrow{e_3}) = (\lambda\alpha)\overrightarrow{e_1} + (\lambda\beta)\,\overrightarrow{e_2} + (\lambda\gamma)\,\overrightarrow{e_3}$.
4. при додаванні векторів складаються їхні відповідні компоненти.

$$\overrightarrow{a} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \alpha_3\overrightarrow{e_3};\ \overrightarrow{b} = \beta_1\overrightarrow{e_1} + \beta_2\overrightarrow{e_2} + \beta_3\overrightarrow{e_3};$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\overrightarrow{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\overrightarrow{e_2} + (\alpha_3 + \beta_3)\overrightarrow{e_3}.$$

Лінійна залежність векторів

Означення. Вектори $\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n}$ називаються **лінійно залежними**, якщо існує така лінійна комбінація $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = 0$, при не рівних нулю одночасно α_i , тобто $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0$.

Лінійна залежність векторів

<u>Означення.</u> Вектори $\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n}$ називаються **лінійно залежними**, якщо існує така лінійна комбінація $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = 0$, при не рівних нулю одночасно α_i , тобто $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0$.
Якщо ж тільки при $\alpha_i = 0$ виконується $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = 0$, то вектори називаються лінійно незалежними.

Властивості векторів

Властивість 1. Якщо серед векторів $\overrightarrow{a_i}$ є нульовий вектор, то ці вектори лінійно залежні.

Властивості векторів

Властивість 1. Якщо серед векторів $\overrightarrow{a_i}$ є нульовий вектор, то ці вектори лінійно залежні.
Властивість 2. Якщо до системи лінійно залежних векторів додати один або кілька векторів, то отримана система теж буде лінійно залежна.

Властивості векторів

Властивість 1. Якщо серед векторів $\overrightarrow{a_i}$ є нульовий вектор, то ці вектори лінійно залежні.
Властивість 2. Якщо до системи лінійно залежних векторів додати один або кілька векторів, то отримана система теж буде лінійно залежна.
Властивість 3. Система векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли один з векторів розкладається в лінійну комбінацію інших векторів.

Властивості векторів

Властивість 1. Якщо серед векторів $\overrightarrow{a_i}$ є нульовий вектор, то ці вектори лінійно залежні.
Властивість 2. Якщо до системи лінійно залежних векторів додати один або кілька векторів, то отримана система теж буде лінійно залежна.
Властивість 3. Система векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли один з векторів розкладається в лінійну комбінацію інших векторів.
Властивість 4. Будь-які 2 колінеарні вектори лінійно залежні й, навпаки, будь-які 2 лінійно залежні вектори колінеарні.

Властивості векторів

Властивість 1. Якщо серед векторів $\overrightarrow{a_i}$ є нульовий вектор, то ці вектори лінійно залежні.
Властивість 2. Якщо до системи лінійно залежних векторів додати один або кілька векторів, то отримана система теж буде лінійно залежна.
Властивість 3. Система векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли один з векторів розкладається в лінійну комбінацію інших векторів.
Властивість 4. Будь-які 2 колінеарні вектори лінійно залежні й, навпаки, будь-які 2 лінійно залежні вектори колінеарні.
Властивість 5. Будь-які 3 компланарних вектори лінійно залежні й, навпаки, будь-які 3 лінійно залежні вектори компланарні.

Властивості векторів

Властивість 1. Якщо серед векторів $\overrightarrow{a_i}$ є нульовий вектор, то ці вектори лінійно залежні.
Властивість 2. Якщо до системи лінійно залежних векторів додати один або кілька векторів, то отримана система теж буде лінійно залежна.
Властивість 3. Система векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли один з векторів розкладається в лінійну комбінацію інших векторів.
Властивість 4. Будь-які 2 колінеарні вектори лінійно залежні й, навпаки, будь-які 2 лінійно залежні вектори колінеарні.
Властивість 5. Будь-які 3 компланарних вектори лінійно залежні й, навпаки, будь-які 3 лінійно залежні вектори компланарні.
Властивість 6. Будь-які 4 вектори у просторі лінійно залежні.

Декартова система координат

Зафіксуємо у просторі точку O і розглянемо довільну точку M.
Вектор $\overrightarrow{OM}$ назвемо радіус-вектором точки M. Якщо у просторі задати деякий базис, то точці M можна зіставити деяку трійку чисел – компонента її радіус-вектора.

Означення декартової системи координат

<u>Означення.</u> Декартовою системою координат у просторі називається сукупність точки і базису. Точка називається **початком координат**. Прямі, що проходять через початок координат називаються **осями координат**.

Означення декартової системи координат

Означення. **Декартовою системою координат** у просторі називається сукупність точки і базису. Точка називається **початком координат**. Прямі, що проходять через початок координат називаються **осями координат**.
1-а вісь – вісь **абсцис**
2-а вісь – вісь **ординат**
3-я вісь – вісь **аплікат**

Координати вектора у декартовій системі координат

Щоб знайти компоненти вектора потрібно з координат його кінця відняти координати початку.

Координати вектора у декартовій системі координат

Щоб знайти компоненти вектора потрібно з координат його кінця відняти координати початку.
$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$

Координати вектора у декартовій системі координат

Щоб знайти компоненти вектора потрібно з координат його кінця відняти координати початку.

$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Базис у ДСК. Прямокутна ДСК

Означення. Базис називається **ортонормованим**, якщо його вектори попарно ортогональні і дорівнюють одиниці.

Базис у ДСК. Прямокутна ДСК

Означення. Базис називається **ортонормованим**, якщо його вектори попарно ортогональні і дорівнюють одиниці.

Означення. Декартова система координат, базис якої ортонормований називається **декартовою прямокутною системою координат**.

Базис у ДСК. Прямокутна ДСК

<u>Означення.</u> Базис називається **ортонормованим**, якщо його вектори попарно ортогональні і дорівнюють одиниці.
<u>Означення.</u> Декартова система координат, базис якої ортонормований називається **декартовою прямокутною системою координат**.
Будемо позначати елементи (**орти**) ортонормованого базису $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$.

Приклад

Дано вектори $\vec{a} = (1;2;3)$, $\vec{b} = (-1;0;3)$, $\vec{c} = (2;1;-1)$ і $\overrightarrow{d} = (3;2;2)$ у деякому базисі. Показати, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють базис і знайти координати вектора $\overrightarrow{d}$ у цьому базисі.

Розв'язання

Вектори утворять базис, якщо вони лінійно незалежні, інакше кажучи, якщо рівняння, що входять у систему:
$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 0 \cdot \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \end{cases}$ лінійно незалежні. Тоді $\overrightarrow{d} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c}$.

Розв'язання

Вектори утворять базис, якщо вони лінійно незалежні, інакше кажучи, якщо рівняння, що входять у систему:
$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 0\cdot\beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \end{cases}$ лінійно незалежні. Тоді $\overrightarrow{d} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 + (-2-3) + 12 = 4 \neq 0$$

Розв'язання

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-3) + (-2-2) + 12 = -1.$$

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{4};$$

Розв'язання

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2-2)-3(-2-3)+2(4-6) = -4+15-4 = 7;$$

$$\beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{7}{4};$$

Розв'язання

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 + (4 - 6) + 18 = 10;$$

$$\gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{2};$$

Разом, координати вектора $\overrightarrow{d}$ в базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\overrightarrow{d} = \left\{-\frac{1}{4}, \frac{7}{4}, \frac{5}{2}\right\}$.

Довжина вектора у координатах

Довжина вектора у координатах визначається як відстань між точками початку і кінця вектора. Якщо задані дві точки у просторі $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Ділення вектора у заданому співвідношенні

Якщо точка $M(x, y, z)$ **ділить відрізок** AB **у співвідношенні** λ/μ, то координати цієї точки визначаються як:

$$x = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\mu + \lambda}; \quad y = \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\mu + \lambda}; \quad z = \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\mu + \lambda}.$$

Координати середини вектора

В окремому випадку координати **середини відрізка** знаходяться як:

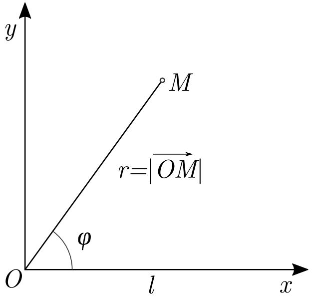
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Лінійні операції над векторами в координатах

Нехай задані вектори в прямокутній системі координат $\overrightarrow{a}(x_A, y_A, z_A)$; $\overrightarrow{b}(x_B, y_B, z_B)$, тоді

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c} = (x_A + x_B; y_A + y_B; z_A + z_B); \quad \alpha \cdot \overrightarrow{a} = (\alpha x_A; \alpha y_A; \alpha z_A)$$

Полярна система координат



Означення. Точка O називається **полюсом**, а промінь l – **полярною віссю.** Кут φ називається **полярним кутом**.

Зв'язок полярної системи координат із ПДСК

Кожна точка у полярній системі координат визначається двома координатами — полярним радіусом r та полярним кутом φ. Записують так: $M(r, \varphi)$.

Зв'язок полярної системи координат із ПДСК

Кожна точка у полярній системі координат визначається двома координатами — полярним радіусом r та полярним кутом φ. Записують так: $M(r, \varphi)$.

$$x = r\cos\varphi; y = r\sin\varphi;$$

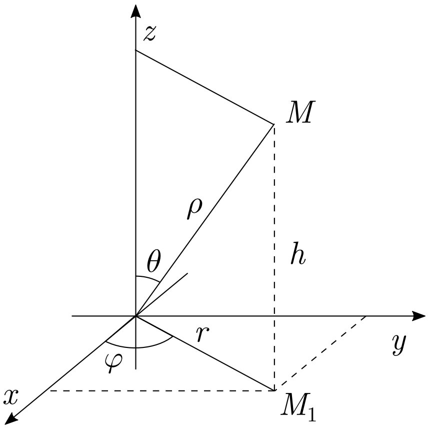
Зв'язок полярної системи координат із ПДСК

Кожна точка у полярній системі координат визначається двома координатами — полярним радіусом r та полярним кутом φ. Записують так: $M(r, \varphi)$.

$$x = r\cos\varphi; y = r\sin\varphi;$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Циліндрична і сферична системи координат



Циліндрична система координат

$$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \rho;\ OM_1 = r;\ MM_1 = h.$$

Циліндрична система координат

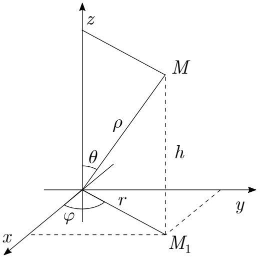
$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \rho$; $OM_1 = r$; $MM_1 = h$.

Означення. Циліндричними координатами точки M називаються числа (r, φ, h), які визначають положення точки M у просторі.

Сферична система координат

<u>**Означення.**</u> **Сферичними координатами** точки M називаються числа (ρ, φ, θ), де θ – кут між ρ і нормаллю.

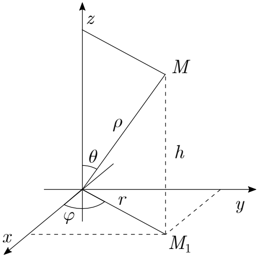
Зв'язок між циліндричною та декартовою прямокутною системами координат



$$h = z; x = r\cos\varphi; y = r\sin\varphi;$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Зв'язок сферичної системи координат з декартовою прямокутної



$$z = \rho\cos\theta; \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi; \quad x = \rho\sin\theta\cos\varphi; \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}; \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z};$$

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$