

Обернена матриця. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

Дорозв'язання прикладу щодо знаходження рангу матриці з попередньої лекції

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Дорозв'язання прикладу щодо знаходження рангу матриці з попередньої лекції

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Дорозв'язання прикладу щодо знаходження рангу матриці з попередньої лекції

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{R_2 + R_1} \\ \\ \xrightarrow{R_4 - R_1} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Дорозв'язання прикладу щодо знаходження рангу матриці з попередньої лекції

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{R_2 + R_1} \\ \\ \xrightarrow{R_4 - R_1} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Дорозв'язання прикладу щодо знаходження рангу матриці з попередньої лекції

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{R_2 + R_1} \\ \\ \xrightarrow{R_4 - R_1} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \\ \xrightarrow{R_4 - R_2} \end{array}$$

Дорозв'язання прикладу щодо знаходження рангу матриці з попередньої лекції

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -9 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -7 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

Дорозв'язання прикладу щодо знаходження рангу матриці з попередньої лекції

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -9 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -7 & -9 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_3}$$

Дорозв'язання прикладу щодо знаходження рангу матриці з попередньої лекції

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -9 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -7 & -9 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -9 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Дорозв'язання прикладу щодо знаходження рангу матриці з попередньої лекції

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -9 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -7 & -9 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -9 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank} A = 4.$$

Означення. Якщо існують квадратні матриці X і A одного порядку, що задовольняють умові:

$$XA = AX = I,$$

де I – одинична матриця того ж самого порядку, що і матриця A , то матриця X називається **оберненою** до матриці A і позначається A^{-1} .

Обернена матриця

$$AX = I \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot x_{kj} = e_{ij}, i = (1, n), j = (1, n),$$

$$e_{ij} = 0, i \neq j,$$

$$e_{ij} = 1, i = j.$$

Дано матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, знайти A^{-1} .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = e_{11} = 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = e_{12} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = e_{21} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = e_{22} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 3x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ 3x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases} \begin{cases} x_{11} = -2 \\ x_{12} = 1 \\ x_{21} = 3/2 \\ x_{22} = -1/2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = e_{11} = 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = e_{12} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = e_{21} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = e_{22} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 3x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ 3x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11} = -2 \\ x_{12} = 1 \\ x_{21} = 3/2 \\ x_{22} = -1/2 \end{cases}$$

Таким чином, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

$$x_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A},$$

де A_{ji} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ji} матриці A .

$$x_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A},$$

де A_{ji} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ji} матриці A .

Цей метод знаходження оберненої матриці називається **методом спряженої матриці**, а матриця з алгебраїчних доповнень — **спряженою матрицею** (позначають \tilde{A}).

$$x_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A},$$

де A_{ji} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ji} матриці A .

Цей метод знаходження оберненої матриці називається **методом спряженої матриці**, а матриця з алгебраїчних доповнень — **спряженою матрицею** (позначають \tilde{A}).

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T$$

Дано матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, знайти A^{-1} .

$$\det A = 4 - 6 = -2.$$

$$\det A = 4 - 6 = -2.$$

$$M_{11} = 4; M_{12} = 3; M_{21} = 2; M_{22} = 1.$$

$$\det A = 4 - 6 = -2.$$

$$M_{11} = 4; M_{12} = 3; M_{21} = 2; M_{22} = 1.$$

$$x_{11} = -2; x_{12} = 1; x_{21} = 3/2; x_{22} = -1/2.$$

$$\det A = 4 - 6 = -2.$$

$$M_{11} = 4; M_{12} = 3; M_{21} = 2; M_{22} = 1.$$

$$x_{11} = -2; x_{12} = 1; x_{21} = 3/2; x_{22} = -1/2.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

1. $(A^{-1})^{-1} = A;$

Властивості обернених матриць

1. $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Властивості обернених матриць

1. $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Матрична форма запису системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$A \cdot x = b$$

Розв'язування СЛАР матричним способом

$$A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b$$

Розв'язування СЛАР матричним способом

$$A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b$$

$$A^{-1} \cdot A = I$$

Розв'язування СЛАР матричним способом

$$A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b$$

$$A^{-1} \cdot A = I$$

$$I \cdot x = A^{-1} \cdot b,$$

$$x = A^{-1} \cdot b.$$

Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Обернена матриця A^{-1} : $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Обернена матриця A^{-1} : $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$

$$5 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot (-1) - (-1) \cdot 3 \cdot 4 - ((-1) \cdot 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 2) = 5 - 35 = -30.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$
$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -16;$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; & A_{21} &= - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1; & A_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1; \\ A_{12} &= - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10; & A_{22} &= \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; & A_{32} &= - \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -16; \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5; & A_{23} &= - \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -19; & A_{33} &= \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; & A_{21} &= - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1; & A_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1; \\ A_{12} &= - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10; & A_{22} &= \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; & A_{32} &= - \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -16; \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5; & A_{23} &= - \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -19; & A_{33} &= \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11; \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^T = -\frac{1}{30} \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Отже розв'язок системи: $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$$x_1 = \Delta_1 / \det A; x_2 = \Delta_2 / \det A; x_3 = \Delta_3 / \det A$$

Знайти розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30; \quad x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30; \quad x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = -60;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30; \quad x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = -60; \quad x_2 = \Delta_2/\Delta = 2;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30; \quad x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = -60; \quad x_2 = \Delta_2/\Delta = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = -90;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30; \quad x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = -60; \quad x_2 = \Delta_2/\Delta = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = -90; \quad x_3 = \Delta_3/\Delta = 3.$$

Означення. Якщо система має хоча б один розв'язок, то вона називається **сумісною** (compatible). Якщо система не має жодного розв'язку, то вона називається **несумісною** (incompatible).

Означення. Система називається **визначеною** (determined), якщо вона має тільки один розв'язок і **невизначеною** (undetermined), якщо більше одного.

Матриця системи і розширена матриця системи

Означення. Для системи лінійних рівнянь матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ називається матрицею системи, а матриця}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \text{ називається розширеною матрицею системи}$$

Означення. Якщо $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, то система називається однорідною.

Означення. Якщо $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, то система називається **однорідною**. Однорідна система завжди сумісна, оскільки завжди має нульовий розв'язок.

Теорема Кронекера-Капеллі (умова сумісності системи)

Теорема Кронекера-Капеллі (Kronecker-Capelli): Система сумісна (має хоча б один розв'язок) тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці.

Теорема Кронекера-Капеллі (умова сумісності системи)

Теорема Кронекера-Капеллі (Kronecker-Capelli): Система сумісна (має хоча б один розв'язок) тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці.

$$\text{rank}A = \text{rank}A^*.$$

Теорема Кронекера-Капеллі (умова сумісності системи)

Теорема Кронекера-Капеллі (Kronecker-Capelli): Система сумісна (має хоча б один розв'язок) тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці.

$$\text{rank}A = \text{rank}A^*.$$

Причому система має єдиний розв'язок, якщо ранг дорівнює кількості невідомих, і нескінченно багато розв'язків, якщо ранг менше кількості невідомих.

1) Якщо розв'язок існує, то стовпець вільних членів є лінійною комбінацією стовпців матриці A , а значить додавання цього стовпця у матрицю, тобто перехід $A \rightarrow A^*$ не змінює рангу.

- 1) Якщо розв'язок існує, то стовпець вільних членів є лінійною комбінацією стовпців матриці A , а значить додавання цього стовпця у матрицю, тобто перехід $A \rightarrow A^*$ не змінює рангу.
- 2) Якщо $\text{rank}A = \text{rank}A^*$, то це означає, що вони мають той самий базисний мінор. Стовпець вільних членів – лінійна комбінація стовпців базисного мінора, тоді виконується рівність, наведена вище.

Перевірити сумісність лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{rank} A = 2.$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array} \right)$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 4 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - 2R_1}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 4 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 4 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

$$\text{rank } A^* = 3.$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 4 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

$$\text{rank} A^* = 3.$$

Система несумісна.