МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

# Аналітична геометрія в просторі

Методичні вказівки, самостійні та
контрольні роботи з вищої математики
для студентів 1-го курсу
всіх напрямів підготовки

Київ – 2013

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

# Аналітична геометрія в просторі

Методичні вказівки, самостійні та
контрольні роботи з вищої математики
для студентів І-го курсу
всіх напрямів підготовки

Київ 2013

УДК 514.123
ББК 22.15
А 84

Укладачі: Н.В. Бондаренко, канд. фіз.-мат. наук, доцент
О.О. Килимник, канд. фіз.-мат. наук, доцент
В.В. Отрашевська, канд. фіз.-мат. наук, доцент
М.С. Пастухова, старший викладач

Рецензент: Я.М. Якимів, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Відповідальний за випуск В.К. Чибіряков, доктор техн. наук, професор

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики, протокол № 8 від 23 травня 2013 року.

Видається в авторській редакції

**Аналітична** геометрія в просторі: Методичні вказівки, самостійні та контрольні роботи з вищої математики для студентів I-го курсу всіх напрямів підготовки / Уклад.: Н.В. Бондаренко, О.О. Килимник, В.В. Отрашевська, М.С. Пастухова. – К.: КНУБА, 2013. – 40 ст.

Методична розробка містить методичні вказівки та тридцять варіантів контрольних робіт за темою «Аналітична геометрія в просторі».

Призначено для студентів всіх напрямів підготовки

## Загальні положення

Методична розробка містить необхідний матеріал для практичних занять з аналітичної геометрії в просторі. Вона включає короткі теоретичні відомості, приклади розв’язання основних задач, вправи для аудиторних та самостійних робіт, а також тридцять варіантів контрольних завдань з аналітичної геометрії в просторі. Навчальні завдання охоплюють основні теми з цього розділу курсу вищої математики: векторна алгебра, пряма та площина в просторі.

Навчальні завдання можна використати як основу аудиторних занять та контрольних робіт з вищої математики для студентів І курсу всіх напрямів підготовки. Завдання для конкретних груп студентів викладач підбирає індивідуально з урахуванням програми, часу, який виділяється для відповідного виду робіт, можливостей аудиторії. Наведений теоретичний матеріал та приклади розв’язання типових задач можна також використовувати як довідковий матеріал, для самостійного закріплення студентами практичних навичок та теоретичних знань з аналітичної геометії.

## 1. Вектори. Операції над векторами

*Вектором* називається напрямлений відрізок. Якщо початок вектора знаходиться в точці $A$, а кінець – в точці $B$, то вектор позначається $\vec{AB}$. Якщо ж початок і кінець вектора не вказуються, то його позначають рядковою буквою латинського алфавіту: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Через $\vec{BA}$ позначають вектор, напрямлений протилежно вектору $\vec{AB}$. Вектор, у якого початок і кінець збігаються, називається *нульовим* і позначається **0**. Його напрямок вважається невизначеним. Іншими словами, такому вектору можна приписати довільний напрямок.

В прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$ вектор $\vec{a}$ представляється у вигляді

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \tag{1}$$

де $a_x, a_y, a_z$ – проекції вектора $\vec{a}$ на осі координат $Ox, Oy, Oz$ відповідно (координати вектора), вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – це *орти* (одиничні вектори) координатних осей (Рис. 1).

Векторне подання (1) можна записати у координатному вигляді: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, де $a_x$, $a_y$, $a_z$ – координати векторів.

Зокрема, орти $\vec{i}, \ \vec{j}, \ \vec{k}$ мають вигляд $\vec{i} = (1;0;0), \ \vec{j} = (0;1;0), \vec{k} = (0;0;1)$.

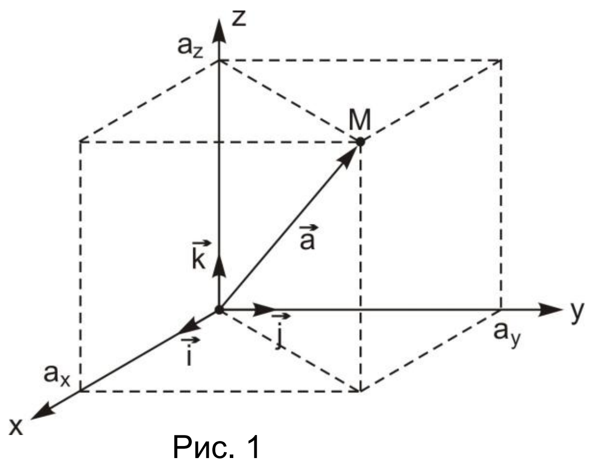


Рис. 1

*Модуль* (довжина) вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ визначається за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{2}$$

Координатами точки $M$ називають проекції її радіус-вектора $\vec{OM} = (x, y, z)$. Використовують позначення $M(x; y; z)$ або $M(x_M, y_M, z_M)$.

*Відстань* між точками $A(x_A, y_A, z_A)$ і $B(x_B, y_B, z_B)$ визначається за формулою

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \; . \qquad (3)$$

Якщо відомі координати початку і кінця вектора $\vec{AB}$: $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, то координати вектора $\vec{AB}$ можна знайти за формулою

$$\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \, . \qquad (4)$$

З векторами $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ можна виконувати такі дії.

1) *Множення вектора на число.* Якщо $\lambda$ – число, то

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z) \, . \qquad (5)$$

2) *Додавання (віднімання) векторів.* Сума (різниця) векторів визначається формулою

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z) \, . \qquad (6)$$

*Ділення відрізка в даному відношенні.* Точка $M$ ділить відрізок $M_1M_2$ у відношенні $\lambda$, якщо $\vec{M_1M} = \lambda \cdot \vec{MM_2}$. Координати точки $M(x, y, z)$ за відомими координатами точок $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і числом $\lambda$ визначаються за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \; z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \, .$$

Якщо $\lambda > 0$, то точка $M$ лежить всередині відрізка $M_1M_2$, якщо ж $\lambda < 0$, то точка $M$ лежить поза відрізком $M_1M_2$ на прямій, що містить відрізок.

*Скалярним добутком двох ненульових векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається <u>число</u>, яке визначається формулою

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi, \qquad (7)$$

де $\varphi$ – позначає кут між напрямками векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ($0 \le \varphi \le \pi$). Скалярний добуток нуль-вектора і довільного вектора вважається рівним нулю. Інші позначення скалярного добутку $\vec{a}\,\vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

*Основні властивості скалярного добутку векторів*.

1) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$;

2) $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda\vec{b})$;

3) $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c})$, $(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c})$;

4) $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2$, звідки $|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$;

5) $(\vec{a},\vec{b})=0$ тоді і лише тоді, коли $\vec{a}\perp\vec{b}$ або один з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ нульовий.

Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані своїми координатами $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, то скалярний добуток

$$(\vec{a},\vec{b})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{8}$$

За допомогою скалярного добутку знаходиться *кут між векторами*:

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}, \tag{9}$$

а також *проекція одного вектора на вісь іншого вектора*:

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|}. \tag{10}$$

Позначимо через $\alpha,\beta,\gamma$ кути, які утворює вектор $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ з осями координат $Ox, Oy, Oz$ відповідно (або, що теж саме, з векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$). Тоді справедливі такі формули:

$$\cos\alpha=\frac{(\vec{a},\vec{i})}{|\vec{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\ \cos\beta=\frac{(\vec{a},\vec{j})}{|\vec{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{(\vec{a},\vec{k})}{|\vec{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Величини $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ називають *напрямними косинусами вектора* $\vec{a}$.

*Ортом* вектора $\vec{a}$ називається вектор $\vec{a}_0$, який напрямлений так само, як і вектор $\vec{a}$, і довжина його рівна 1. Координатами орта вектора є його напрямні косинуси.

*Механічний зміст скалярного добутку. Робота* $A$ *сили* $\vec{F}$, виконана цією силою при переміщенні матеріальної точки з початку в кінець вектора $\vec{s}$, обчислюється за формулою

$$A = (\vec{F}, \vec{s}) = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{s}}). \qquad (11)$$

Приклад. Обчислити роботу сили $\vec{F} = (2;3;-5)$ при переміщенні матеріальної точки з точки $P(1;-2;2)$ в точку $Q(1;4;0)$.

Розв'язання. Оскільки $\overrightarrow{PQ} = (0;6;-2)$, то за формулою (11) робота сили $\vec{F}$

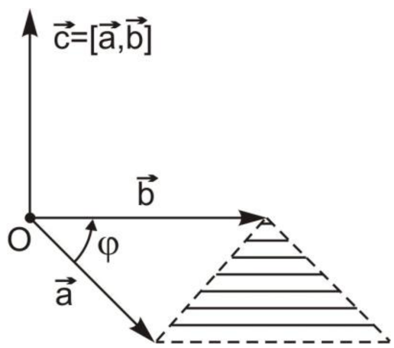
$$A = (\vec{F}, \overrightarrow{PQ}) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 6 + (-5) \cdot (-2) = 28.$$

*Векторним добутком* неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, взятих у заданому порядку, називається вектор $\vec{c}$ (Рис. 2), який визначається такими умовами:

1) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$;

2) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку;

3) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$,




Позначення векторного добутку: $[\vec{a}, \vec{b}]$, $\vec{a} \times \vec{b}$.

Якщо $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то векторний добуток $[\vec{a}, \vec{b}]$ можна обчислити, користуючись записом символічного визначника третього порядку

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

Отже, $[\vec{a}, \vec{b}] = \left( \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right)$.

*Основні властивості векторного добутку векторів:*

1) $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$;

2) $[\lambda\vec{a},\vec{b}]=\lambda[\vec{a},\vec{b}]=[\vec{a},\lambda\vec{b}]$;

3) $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}]$, $[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}]=[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{a},\vec{c}]$;

4) $[\vec{a},\vec{b}]=0$ тоді і лише тоді, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні ($\vec{a}\parallel\vec{b}$) або один з них нульовий.

Векторний добуток можна використовувати при знаходженні вектора $\vec{c}$, перпендикулярного до двох даних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$.

*Геометричний зміст векторного добутку.* Модуль векторного добутку дорівнює *площі паралелограма*, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (Рис. 2). Площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнює половині модуля векторного добутку.

$$S_{\text{пар.}}=\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|, \quad S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|. \tag{13}$$

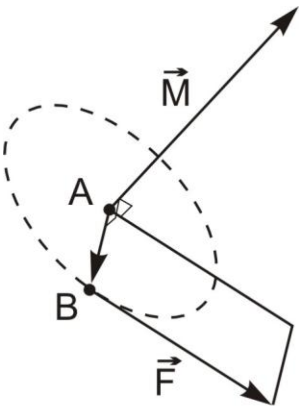


Рис. 3

*Механічний зміст векторного добутку. Обертаючий момент* $\vec{M}$ сили $\vec{F}$, прикладеної до точки $B$ тіла, яке закріплене в точці $A$: $\vec{M}=[\overrightarrow{AB},\vec{F}]$ (Рис. 3).

Приклад. Обчислити координати момента обертання $\vec{M}$ сили $\vec{F}=(2;1;3)$, прикладеної до точки $A(4;-2;1)$, відносно початку координат $O$.

Розв'язання. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{OA}=(4;-2;1)$. Маємо

$$\vec{M}=[\overrightarrow{OA},\vec{F}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=(-7;-10;8).$$

*Мішаним добутком* трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, взятих у заданому порядку, називають число, рівне скалярному добутку векторів $[\vec{a},\vec{b}]$ і $\vec{c}$. Позначення мішаного добутку: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ або $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Якщо $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ і $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$, то мішаний добуток визначається за допомогою визначника:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (14)$$

*Основні властивості мішаного добутку векторів*.

1) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$;

2) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$ тоді і тільки тоді вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні (паралельні одній і тій же площині), або хоча б один з них нульовий;

3) якщо $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})>0$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку, а якщо $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})<0$, то ліву трійку;

4) $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})=(\vec{a},[\vec{b},\vec{c}])$.

*Геометричний зміст мішаного добутку.* Модуль мішаного добутку $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ дорівнює *об'єму паралелепіпеда*, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто

$$V=|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|. \qquad (15)$$

Об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$:

$$V_{\text{тетраедра}}=\frac{1}{6}|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|.$$

## Завдання для аудиторної роботи

1. Довжина вектора $\vec{a}$ дорівнює 1, довжина вектора $\vec{b}$ дорівнює 2, а скалярний добуток $(2\vec{a}+\vec{b},-2a+3b)=12$. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. (*Відповідь*: 1).

2. Знайти $|\vec{a}|$, якщо $\vec{a}=4\vec{p}+\vec{r}$, де $|\vec{p}|=1, |r|=\sqrt{2}$, $(\widehat{\vec{p},\vec{r}})=45°$. (*Відповідь*: $|\vec{a}|=\sqrt{26}$).

3. Знайти кути паралелограма $ABCD$, якщо відомо, що $A(-4;-2;0)$, $B(-1;-2;4)$, $D(3;-2;1)$. (*Відповідь*: $45°, 135°$).

4. Дано три вектори: $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{i}-\vec{k}$. Знайти вектор $\vec{x}$, що задовольняє умови: $(\vec{x},\vec{a})=9$, $(\vec{x},\vec{b})=-2$, $(\vec{x},\vec{c})=1$. (*Відповідь:* $\vec{x}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$).

5. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a}=(2;2;3)$ і $\vec{b}=(2;-1;-6)$, утворює тупий кут з віссю $Oy$. Знаючи, що $|\vec{x}|=7$, знайти координати $\vec{x}$. (*Відповідь*: $\vec{x}=(3;-6;2)$).

6. Нехай вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ мають одиничну довжину, а попарні кути між ними рівні по $60°$. Знайти кут між векторами $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ і $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$. (*Відповідь*: $\varphi=\pi-\arccos(1/\sqrt{3})$).

7. Дано координати вершин трикутника $A(1;-4;5)$, $B(3;5;7)$, $C(-1;5;-3)$. Знайти координати точки $D$ перетину його медіан. (*Відповідь*: $D(1;2;3)$).

8. Дано три вектори $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}$. Знайти $\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})$. (*Відповідь*: -4).

9. Дано вектори $\vec{a}=7\vec{p}-\vec{q}$ і $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, де $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=1$, $(\widehat{\vec{p},\vec{q}})=3\pi/4$. Знайти: а) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$; б) площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.
(*Відповідь*: а) $33(2+\sqrt{2})$; б) $30\sqrt{2}$).

10. Площа паралелограма, натягнутого на вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнює 2. Знайти площу паралелограма, натягнутого на вектори $\vec{a}-2\vec{b}$ і $3\vec{a}+\vec{b}$. (*Відповідь*: 14).

11. Знайти нормаль до площини, що проходить через точки $A(4;3;1)$, $B(5;5;1)$, $C(4;4;0)$. (*Відповідь*: $\vec{n}=(-2;1;1)$.)

12. Сила $\vec{F}=(4;7;-3)$ прикладена в точці $A(2;-7;2)$. Знайти роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки з точки $A(2;-7;2)$ в точку $B(5;-4;1)$. (*Відповідь*: 36).

13. Сила $\vec{F}=(2;2;9)$ прикладена в точці $A(4;2;-3)$. Знайти величину і напрямні косинуси моменту $\vec{M}$ цієї сили відносно точки $B(2;4;0)$. (*Відповідь*: $|\vec{M}|=28$, $\cos\alpha=-3/7$, $\cos\beta=-6/7$, $\cos\gamma=2/7$).

14. Дано вектори $\vec{a}=(8;4;1)$ і $\vec{b}=(2;2;-1)$. Знайти об'єм паралелепіпеда, натягнутого на вектори $\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]$. (*Відповідь*: 200).

15. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $45°$. Знаючи, що $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{c}|=3$, обчислити $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$. (*Відповідь*: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=30$, якщо трійка векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ права, $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=-30$, якщо трійка векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ліва).

16. Дано вершини тетраедра $A(2;0;4)$, $B(0;3;7)$, $C(0;0;6)$, $D(4;3;5)$. Обчислити його об'єм і висоту $H$, опущену на грань $ACD$. (*Відповідь*: $V=2$, $H=2/\sqrt{3}$).

17. Чи лежать точки $A(1;2;-1)$, $B(4;1;5)$, $C(-1;2;-3)$, $D(2;1;3)$ в одній площині? (*Відповідь*: лежать).

18. Чи компланарні вектори: а) $\vec{a}=(-4;3;-1)$, $\vec{b}=(1;-2;3)$, $\vec{c}=(-2;-1;5)$; б) $\vec{a}=(3;-2;1)$, $\vec{b}=(2;1;2)$, $\vec{c}=(3;-1;-2)$. (*Відповідь*: а) компланарні; б) не компланарні).

19. Перевірити, правою чи лівою буде трійка векторів $\vec{a}=(3;4;0)$, $\vec{b}=(0;-4;1)$, $\vec{c}=(0;2;5)$. (*Відповідь*: лівою.).

**Завдання для самостійної роботи**

1. Дано координати вершин трикутника $A(4;3;5), B(2;7;9), C(6;1;1)$. Знайти координати та довжину вектора $\overrightarrow{CM}$, напрямленого по медіані трикутника. (*Відповідь*: $(-3;4;6)$, $\sqrt{61}$).

2. При якому значенні $\alpha$ вектори $\vec{p}=\vec{c}+\alpha\vec{d}$ і $\vec{r}=2\vec{c}+3\vec{d}$ перпендикулярні, якщо $|\vec{c}|=|\vec{d}|=4$, $(\widehat{\vec{c},\vec{d}})=120°$? (*Відповідь*: $\alpha=-1/4$).

3. Знайти $|\vec{a}|$, якщо $\vec{a}=2\vec{p}-\vec{r}$, $|\vec{p}|=1$, $|\vec{r}|=2$, $(\widehat{\vec{p},\vec{r}})=60°$. (*Відповідь*: 2.).

4. Дано три вектори $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-4\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{c}=-3\vec{i}+4\vec{j}+12\vec{k}$. Знайти $\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a}-2\vec{b})$. (*Відповідь*: 5).

5. Дано $A(0;-3;-2), B(0;-2;-3), C(-2;-5;-1), D(-2;1;2)$. Знайти:

а) площу $S$ паралелограма, побудованого на векторах $\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$, $\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$;

б) об'єм $V$ піраміди, побудованої на векторах $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}$ і $\overrightarrow{DC}$;
в) довжину висоти $AH$ піраміди $ABCD$.
(*Відповідь*: $S=3$, $V=6$, $h=12/\sqrt{69}$).

## 2. Рівняння площини в просторі

*Загальне рівняння площини*

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

де $A, B, C$ – координати вектора нормалі $\vec{n}$ (вектора, перпендикулярного даній площині), $D$ – вільний член рівняння.

*Рівняння площини, що проходить через точку* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\vec{n}=(A;B;C)$*:*

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{16}$$

*Рівняння площини у "відрізках".* Якщо $a, b, c$ – відрізки, які площина відтинає на координатних осях $Ox, Oy, Oz$ відповідно, тобто площина перетинає осі в точках $M_1(a;0;0)$, $M_2(0;b;0)$, $M_3(0;0;c)$, то її рівняння записується у вигляді

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Вважається $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$.

*Рівняння площини, що проходить через три задані точки* $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{17}$$

*Кут* $\alpha$ *між двома площинами*, заданими рівняннями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ визначається як кут між векторами їх нормалей $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$ і $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$ або суміжний до нього (зазвичай беруть гострий кут), тобто

$$\cos\alpha=\frac{|(\vec{n}_1,\vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{18}$$

*Відстань* $d$ *від точки* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *до площини*, заданої рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$, обчислюється за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (19)$$

Приклад. Записати рівняння площини $\pi$, що проходить через вісь $Ox$ та точку $M(6;-5;4)$.

Розв'язання. Розглянемо вектори $\vec{i} = (1;0;0)$ (орт осі $Ox$) та $\overrightarrow{OM} = (6;-5;4)$, які лежать на площині $\pi$ і, отже, паралельні їй. Тоді вектор $\vec{n} = [\vec{i}, \overrightarrow{OM}]$ буде вектором нормалі до площини $\pi$. Знайдемо його:

$$\vec{n} = [\vec{i}, \overrightarrow{OM}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}.$$

За формулою (16) рівняння площини $\pi$ має вигляд: $0(x-6) - 4(y+5) - 5(z-4) = 0$ або $-4y - 5z = 0$. Тоді $\pi : 4y + 5z = 0$.

Приклад. Записати рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1;4;-5)$ перпендикулярно площинам $3x + 4y - 5z - 2 = 0$ і $2x + 2y - z + 6 = 0$. Знайти відстань від точки $P(2;-3;4)$ до шуканої площини.

Розв'язання. Оскільки шукана площина перпендикулярна площинам $3x + 4y - 5z - 2 = 0$ і $2x + 2y - z + 6 = 0$, то вона паралельна їх нормальним векторам $\vec{N}_1 = (3;4;-5)$ та $\vec{N}_2 = (2;2;-1)$. Тобто нормальний вектор $\vec{N}$ шуканої площини перпендикулярний до векторів $\vec{N}_1$ та $\vec{N}_2$. Вектор $\vec{N}$ можна знайти як векторний добуток векторів $\vec{N}_1$ та $\vec{N}_2$:

$$\vec{N} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & -5 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 7\vec{j} - 2\vec{k}.$$

За формулою (16) запишемо рівняння площини $6(x-1)-7(y-4)-2(z+5)=0$ або $6x-7y-2z+12=0$.

Використовуючи формулу (19), знайдемо відстань від точки $P(2;-3;4)$ до знайденої площини

$$d=\frac{|\,6\cdot 2+(-7)\cdot(-3)+(-2)\cdot 4+12\,|}{\sqrt{36+49+4}}=\frac{37}{\sqrt{89}}\approx 3{,}92.$$

**Завдання для аудиторної роботи**

1. Записати рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1;-2;3)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}=(4;-3;2)$. (*Відповідь*: $4x-3y+2z-16=0$).

2. Дано точки $A(3;2;1)$ і $B(1;4;-5)$. Записати рівняння площини, що проходить через середину відрізка $AB$ перпендикулярно цьому відрізку. (*Відповідь*: $x-y+3z+7=0$).

3. Знайти загальне рівняння площини, що проходить через три точки $A(2;4;3)$, $B(3;6;4)$, $C(1;1;2)$. (*Відповідь*: $x-z+1=0$).

4. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(1;-3;1)$ паралельно двом векторам $\vec{a}=(5;-1;3)$ і $\vec{b}=(4;1;2)$. (Відповідь: $5x-2y-9z-2=0$).

5. Знайти висоту паралелепіпеда $ABCDA'B'C'D'$, опущену на грань $BCB'C'$, якщо точка $A$ має координати $A(4;1;2)$, а грань $BCB'C'$ міститься в площині $3x-6y-2z+4=0$. (*Відповідь*: 2).

6. Записати рівняння площин, паралельних площині $2x+6y+3z-6=0$ і віддалених від неї на відстань $d=5$. (*Відповідь*: $2x+6y+3z+29=0$ і $2x+6y+3z-41=0$).

7. Знайти об'єм піраміди, утвореної площиною $2x-3y+6z-12=0$ і координатними площинами. (*Відповідь*: 8).

8. Записати рівняння площини, що перпендикулярна площині $x-y+z+1=0$ та проходить через точки $M_1(1;1;0)$ і $M_2(0;1;2)$. (*Відповідь*: $2x+3y+z-5=0$).

9. Знайти двогранні кути, утворені перетином таких пар площин:

а) $x+y+\sqrt{2}z-3=0$, $x-y+\sqrt{2}z+4=0$;

б) $6x+3y-2z+5=0$, $x+2y+6z-8=0$;

в) $2x-3y+4z=0$, $6x-9y+12z-3=0$.

(*Відповідь*: а) $\pi/3$ і $2\pi/3$; б) $\pi/2$; в) площини паралельні).

10. Знайти відстань між паралельними площинами

а) $x-2y-2z-12=0$ і $x-2y-2z+3=0$

б) $2x-3y+6z-14=0$ і $4x-6y+12z+21=0$.

(*Відповідь*: а) 5; б)3,5).

11. Дві грані куба лежать на площинах $2x-2y+z+3=0$, $2x-2y+z+9=0$. Знайти об'єм цього куба. (*Відповідь*: 8).

12. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $P(1;0;2)$ перпендикулярно до двох площин $2x-y+3z-5=0$ і $3x+6y+3z-5=0$. (Відповідь: $7x-y-5z+3=0$.)

13. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(5;-4;2)$ і паралельна площині $Oxz$. (*Відповідь*: $y+4=0$).

14. Площина паралельна вектору $\vec{s}=(3;-6;4)$ і відтинає на координатних осях $Oy$ і $Oz$ відрізки $b=-3$, $c=4$. Знайти рівняння цієї площини. (*Відповідь*: $12x+4y-3z+12=0$).

15. Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь $Oy$ і точку $M(-8;6;7)$ (*Відповідь*: $7x+8z=0$).

16. Записати рівняння площини, що проходить через точки $M_1(2;-3;5)$ і $M_2(4;1;-1)$ паралельно осі $Ox$. (*Відповідь*: $3y+2z-1=0$).

**Завдання для самостійної роботи**

1. Записати рівняння площини, що проходить через точку $M_0(3;0;-4)$ паралельно площині $x-4y+2z+6=0$. (*Відповідь*. $x-4y+2z+5=0$).

2. Записати рівняння площини, яка паралельна осі $Oz$ та проходить через дві точки $M_1(3;0;-1)$ і $M_2(4;1;5)$. (*Відповідь*: $x-y-3=0$).

3. Записати рівняння площини, що проходить через точки $M_1(-2;1;4)$ та $M_2(0;3;1)$ перпендикулярно площині $4x+3y-5z+4=0$. (*Відповідь*: $x+2y+2z-8=0$).

4. На осі $Oy$ знайти точку, яка знаходиться на відстані $d=3$ від площини $x+2y-2z-3=0$. (*Відповідь*: умову задачі задовольняють дві точки $(0;6;0)$, $(0;-3;0)$).

5. Обчислити площу трикутника, який площина $3x - 4y + 2z + 48 = 0$ відтинає від координатного кута $Oxy$. (*Відповідь*: 96 кв.од.).

## 3. Рівняння прямої в просторі

*Канонічні рівняння прямої* $L$*:*

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{20}$$

*Параметричні рівняння прямої* $L$ в просторі:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \tag{21}$$

У рівняннях (20) і (21) $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – фіксована точка прямої; $\vec{u} = (l; m; n)$ – напрямний вектор прямої $L$, тобто довільний вектор, паралельний $L$; $t$ – числовий параметр. Кожному значенню параметра $t \in (-\infty; +\infty)$ відповідає єдина точка прямої $L$.

*Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки* $M_1(x_1; y_1; z_1)$ *і* $M_2(x_2; y_2; z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{22}$$

*Кутом* $\beta$ *між прямими* називають кут між їх напрямними векторами $\vec{u}_1 = (l_1; m_1; n_1)$ і $\vec{u}_2 = (l_2; m_2; n_2)$, або суміжний з ним (зазвичай беруть гострий кут), тобто

$$\cos\beta = \frac{|(\vec{u}_1, \vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \tag{23}$$

Дві площини, що перетинаються, задають пряму в просторі. *Загальні рівняння прямої в просторі*:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Якщо вектори $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ не паралельні ($\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$), то рівняння (24) визначають пряму, яка є лінією перетину площин $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Напрямний вектор $\vec{u}$ прямої, заданої рівнянням (24), визначається як векторний добуток векторів $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$:

$$\vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Координати точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що лежить на цій прямій, можна знайти як розв'язок системи (24), обираючи одну з координат довільно. Знаючи напрямний вектор і точку, що лежить на прямій можна записати її канонічні рівняння (20).

<u>Приклад 1.</u> Пряма задана загальними рівняннями

$$\begin{cases} x - y + 2z + 4 = 0, \\ 3x + y - 5z - 8 = 0. \end{cases}$$

Записати її канонічні рівняння.

<u>Розв'язання.</u> Знаходимо

$$\vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = (3;11;4).$$

Вважаючи у вихідній системі $z = 0$ і розв'язавши цю систему, дістанемо $x = 1,\ \ y = 5$. Точка $M_0(1;5;0)$ лежить на даній прямій. Канонічні рівняння прямої мають вигляд

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{11} = \frac{z}{4}.$$

Розглянемо випадки *взаємного розміщення двох прямих в просторі*. Дві прямі в просторі або мимобіжні, або перетинаються, або паралельні, або збігаються. В будь-якому випадку вони утворюють деякий кут (між їх напрямними векторами $\vec{u}_1$ та $\vec{u}_2$). Якщо прямі задані канонічними рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{і} \quad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}, \qquad (25)$$

то величина кута $\varphi$ між ними визначається з формули

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\bar{u}_1, \bar{u}_2}) = \frac{(\bar{u}_1, \bar{u}_2)}{|\bar{u}_1| \cdot |\bar{u}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \quad (26)$$

*Умова перпендикулярності прямих* (25):

$$(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = 0 \text{ або } l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

*Умова паралельності прямих* (25) має вигляд $\bar{u}_1 \parallel \bar{u}_2 \nparallel \overrightarrow{M_1 M_2}$, а умова того що дані *прямі збігаються* $\bar{u}_1 \parallel \bar{u}_2 \parallel \overrightarrow{M_1 M_2}$, де точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ належать прямим (25).

Н*еобхідною і достатньою умовами перетину непаралельних прямих*, заданих рівняннями (25), є компланарність векторів $\overrightarrow{M_1 M_2}, \bar{u}_1, \bar{u}_2$ : $(\overrightarrow{M_1 M_2}, \bar{u}_1, \bar{u}_2) = 0$. Або

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (27)$$

Якщо умова (27) не виконується, то прямі (25) мимобіжні.

*Відстань* $h$ *від точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *до прямої,* що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в напрямку вектора $\bar{u} = (l; m; n)$ (20), обчислюється за формулою

$$h = \frac{|[\bar{u}, \overrightarrow{M_0 M_1}]|}{|\bar{u}|}. \quad (28)$$

Розглянемо випадки *взаємного розміщення прямої і площини*. Пряма (20) і площина $Ax + By + Cz + D = 0$ можуть перетинатися, бути паралельними або пряма може лежати в площині.

Перейдемо від канонічних рівнянь (20) до параметричних (21) і підставимо вирази для $x, y, z$ з рівнянь (21) в рівняння площини. Дістанемо рівняння відносно невідомого параметра $t$:

$$(Am + Bn + Cl)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0. \quad (29)$$

Можливі три випадки.

1. При $Am + Bn + Cl \neq 0$ рівняння (39) має єдиний розв'язок: $t = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)/(Am + Bn + Cl)$. Підставивши це значення

$t$ в параметричні рівняння прямої (20), знайдемо координати точки перетину прямої і площини.

2. При $Am + Bn + Cl = 0$, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ (30)

рівняння (29) не має розв'язку, а пряма не має спільних точок з площиною. Формули (30) є *умовами паралельності прямої і площини*.

3. При

$$Am + Bn + Cl = 0,\; Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \qquad (31)$$

довільне значення $t$ є розв'язком рівняння (29), тобто довільна точка прямої належить площині. Рівності (31) називаються *умовами належності прямої площині*.

*Кутом між прямою і площиною* називається кут між прямою і її ортогональною проекцією на площину. Кут $\varphi$ між прямою і площиною знаходиться з формул

$$\sin\varphi = |\cos(\vec{n}, \vec{u})| = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \qquad (32)$$

Приклад. Знайти координати точки $M_2$, яка симетрична точці $M_1(3;-2;4)$ відносно площини $x + y + z - 8 = 0$.

Розв'язання. Запишемо параметричні рівняння прямої $M_1M_2$, яка перпендикулярна до даної площини. Вектор $\vec{n} = (1;1;1)$ буде напрямним вектором для прямої $M_1M_2$. Тому $M_1M_2 : x = t + 3,\; y = t - 2,\; z = t + 4$.

Знайдемо точку $P$ перетину прямої $M_1M_2$ з площиною.

$$t + 3 + t - 2 + t + 4 - 8 = 0,\; 3t - 3 = 0,\; t = 1.$$

Звідси $P(4;-1;5)$. Оскільки точка $P$ є серединою відрізка $M_1M_2$, то справедливі рівності:

$$4 = \frac{3 + x_2}{2}, \quad -1 = \frac{-2 + y_2}{2}, \quad 5 = \frac{4 + z_2}{2},$$

з яких знаходимо координати точки $M_2(5;0;6)$.

Приклад. Доведіть, що прямі $L_1 : \begin{cases} x = 3t - 4, \\ y = -2t + 1, \\ z = t + 3 \end{cases}$ і $L_2 : \begin{cases} x = 2t - 5, \\ y = -3t + 5, \\ z = 4t - 4 \end{cases}$ перетинаються. Знайти рівняння площини, в якій вони розміщені.

Розв'язання. Розглянемо напрямні вектори $\vec{u}_1=(3;-2;1)$, $\vec{u}_2=(2;-3;4)$ та точки $M_1(-4;1;3)$, $M_2(-5;5;-4)$ прямих $L_1$ та $L_2$. За формулою (27) умовою перетину двох прямих є виконання рівності $(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{u}_1,\vec{u}_2)=0$. Знаходимо

$$(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{u}_1,\vec{u}_2)=\begin{vmatrix}-1 & 4 & -7\\ 3 & -2 & 1\\ 2 & -3 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 4 & -7\\ 0 & 10 & -20\\ 0 & 5 & -10\end{vmatrix}=0.$$

Отже, прямі перетинаються.

Площина, в якій розміщені прямі $L_1$ та $L_2$, паралельна векторам $\vec{u}_1$ та $\vec{u}_2$ і проходить через точку $M_1(-4;1;3)$. За вектор нормалі можна взяти

$$\vec{N}=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 1\\ 2 & -3 & 4\end{vmatrix}=-5\vec{i}-10\vec{j}-5\vec{k}.$$

За формулою (16) запишемо рівняння шуканої площини $-5(x+4)-10(y-1)-5(z-3)=0$. Після спрощень отримаємо рівняння $x+2y+z-1=0$.

Приклад. Записати параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(0;-4;-2)$ та перетинає дві прямі

$$L_1:\begin{cases}x=5t+5,\\ y=t-2,\\ z=-t+1\end{cases} \text{ і } L_2:\begin{cases}x=-4t+17,\\ y=3t-10,\\ z=t+2.\end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $L$ шукана пряма. Позначимо через $P_1$ і $P_2$ точки перетину прямої $L$ з прямими $L_1$ і $L_2$. Вважатимемо, що координати точок $P_1(x_1,y_1,z_1)$ і $P_2(x_2,y_2,z_2)$ отримані з параметричних рівнянь прямих при $t=t_1$ та $t=t_2$ відповідно. Тобто

$$\begin{cases}x_1=5t_1+5,\\ y_1=t_1-2,\\ z_1=-t+1\end{cases} \text{ і } \begin{cases}x_2=-4t_2+17,\\ y_2=3t_2-10,\\ z_2=t_2+2.\end{cases}$$

Далі запишемо вектори $\overrightarrow{M_0P_1} = (5t_1 + 5; t_1 + 2; t_1 + 3)$ і $\overrightarrow{M_0P_2} = (-4t_2 + 17; 3t_2 - 6; t_2 + 4)$. Прямі $L_1$ та $L$ перетинаються, а, отже, належать одній площині. Тому вектори $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\vec{u}_1$ та $\overrightarrow{M_0P_2}$ компланарні, а тому їх мішаний добуток $(\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{u}_1, \overrightarrow{M_0P_2}) = 0$, $M_1(5;-2;1) \in L_1$, вектор $\vec{u}_1 = (5;1;-1)$ напрямний вектор прямої $L_1$. Оскільки вектор $\overrightarrow{M_0M_1} = (5;2;3)$, то умова $(\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{u}_1, \overrightarrow{M_0P_2}) = 0$ в координатній формі набирає вигляду:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \\ -4t_2 + 17 & 3t_2 - 6 & t_2 + 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язком даного рівняння є $t_2 = 3$. Тоді вектор $\overrightarrow{M_0P_2} = (5;4;7)$. Його візьмемо за напрямний вектор прямої $L$. Параметричні рівняння прямої $L$: $x = 5t,\ y = 3t - 4,\ z = 7t - 2$.

## Завдання для аудиторної роботи

1. Записати канонічні та параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3;0;-2)$ паралельно: а) вектору $\vec{a} = (4;-3;5)$; б) прямій $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+4}{-1}$; в) осі $Ox$, г) осі $Oy$; д) осі $Oz$.

2. Записати канонічні та параметричні рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(1;-2;3)$ і $M_2(-3;1;4)$. Знайти точку $A$ її перетину з площиною $Oxy$. (*Відповідь*: $\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-3}{1}$, $x = -4t + 1,\ y = 3t - 2,\ z = t + 3$, $A(13;-11;0)$).

3. Записати параметричні рівняння прямої, яка перпендикулярна площині $x + 2y - 1 = 0$ та проходить через точку $M_0(2;-1;3)$. (*Відповідь*: $x = t + 2,\ y = 2t - 1,\ z = 3$).

4. Записати параметричні рівняння прямої $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0. \end{cases}$

(*Відповідь*: $x=2t+2,\ y=7t-1,\ z=4t$).

5. Знайти координати точки $Q$, що є проекцією точки $P(2;-5;7)$ на пряму $L$, яка проходить через точки $M_1(5;4;6)$ та $M_2(-2;-17;-8)$. Знайти точку $S$, симетричну точці $P$ відносно цієї прямої. (*Відповідь*: $Q(3;-2;2)$, $S(4;1;-3)$).

6. Знайти координати точки $S$, що симетрична точці $P(-3;1;-9)$ відносно площини $4x-3y-z-7=0$. (*Відповідь*: $S(1;-2;-10)$).

7. Знайти відстань між паралельними прямими $x=2+4t$, $y=-6t$, $z=-1-8t$ і $x=7-6t$, $y=2+9t$, $z=12t$. (*Відповідь*: $\sqrt{30}$).

8. Знайти відстань між мимобіжними прямими $x=2t-4$, $y=-t+4$, $z=-2t-1$ та $x=4t-5$, $y=-3t+5$, $z=-5t+5$. (*Відповідь*: 3).

9. Знайти кут між прямою $\begin{cases} x-2y+3=0, \\ 3y+z-1=0 \end{cases}$ і площиною $2x+3y-z+1=0$. (*Відповідь*: $\sin\varphi=5/7$, $\varphi\approx 45°36'$).

10. Обчислити відстань від точки $P(2;3;-1)$ до прямої $\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2}$. (*Відповідь*: 21).

11. Довести, що прямі, задані параметричними рівняннями $\begin{cases} x=2t-3, \\ y=3t-2, \\ z=-4t+6 \end{cases}$ і $\begin{cases} x=t+5, \\ y=-4t-1, \\ z=t-4 \end{cases}$ перетинаються, і знайти точку їх перетину. (*Відповідь*: $(3;7;-6)$).

12. При якому значенні $A$ площина $Ax+3y-6z+1=0$ паралельна прямій $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{1}$. (*Відповідь*: $A=-2$).

13. При яких значеннях $m$ і $C$ пряма $\frac{x+5}{m}=\frac{y-1}{6}=\frac{z+2}{-1}$ перпендикулярна до площини $2x-3y+Cz+7=0$. (*Відповідь*: $m=-4$, $C=0{,}5$).

14. Показати, що пряма $\frac{x}{-6}=\frac{y-3}{8}=\frac{z-1}{9}$ паралельна площині $x+3y-2z+1=0$, а пряма $x=t+7,\ y=t-2,\ z=2t+1$ лежить в цій площині.

15. Записати рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$ перпендикулярно до площини $x+4y-3z+7=0$. (*Відповідь*: $11x-17y-19z+10=0$).

16. Записати канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(-4;-5;3)$ та перетинає дві прямі: $\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$, $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$. (*Відповідь*: $\frac{x+4}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-3}{-1}$).

17. Записати рівняння площини, що проходить через прямі $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$, $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$. (*Відповідь*: $6x-20y-11z+1=0$).

18. Знайти проекцію прямої $L:\begin{cases}x+y-z+1=0,\\ x-y+z-1=0\end{cases}$ на площину $\pi: 2x-y+3z-1=0$. (*Відповідь*: $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z}{-2}$).

19. Дано вершини трикутника $A(3;6;-7)$, $B(4;1;-2)$ і $C(-5;2;3)$. Записати параметричні рівняння його медіани, проведеної з вершини $B$. (*Відповідь*: $x=5t-1,\ y=-3t+4,\ z=-2$).

20. Дано вершини трикутника $A(-2;-1;-1)$, $B(-2;3;-2)$, $C(4;1;7)$. Знайти параметричні рівняння висоти, опущеної з вершини $C$. (*Відповідь*: $x=3t-2,\ y=t-1,\ z=4t-1$).

21. Дано вершини трикутника $A(-1;0;-4), B(1;-2;3), C(-1;0;2)$. Записати рівняння бісектриси, що виходить з вершини $C$. (*Відповідь*: $x = t - 1,\ y = -t,\ z = -t + 2$).

22. Записати рівняння площини, що проходить через пряму $\begin{cases} 2x - y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0 \end{cases}$ перпендикулярно площині $2x - 3y + z - 11 = 0$. Знайти відстань від точки $M(1;2;1)$ до отриманої площини. (*Відповідь*: $y + 3z = 0$, $d = 5/\sqrt{10}$).

23. Знайти кут між прямою $x = -t - 2$, $y = t + 1$, $z = -t - 3$ і прямою, що проходить через точку $M(1;-1;-3)$ паралельно площині $3x - y + 2z - 10 = 0$ та перетинає пряму $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-8}{-2} = \dfrac{z+4}{1}$. (*Відповідь*: $\varphi = \arccos(1/3)$, $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z+3}{1}$).

24. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $M(9;-2;0)$ паралельно площинам $x + y - z + 3 = 0$ і $7x + 5y + 2z - 1 = 0$. Знайти відстань від шуканої прямої до прямої $x = -2t,\ y = 9t - 7,\ z = 2t + 2$. (*Відповідь*: $\dfrac{x-9}{7} = \dfrac{y+2}{-9} = \dfrac{z}{-2}$, $d = 28/\sqrt{85}$).

**Завдання для самостійної роботи**

1. При яких значеннях $\alpha$ пряма $\dfrac{x-2}{\alpha} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{2}$ паралельна площині $2x - 4y + 2z - 7 = 0$? (*Відповідь*: $\alpha = 4$).

2. Записати рівняння площини, що проходить через точку $M_0(2;-1;3)$ перпендикулярно прямій $x = 2t - 3,\ y = 4t + 1,\ z = 5t - 1$. (*Відповідь*. $2x + 4y + 5z - 15 = 0$).

3. Чи перетинаються прямі $\dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-4}{3}$ та $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-3}{5}$? (*Відповідь*: ні).

4. Дано точку $A(1;1;-3)$ і площину $\pi: x-3y+4z-12=0$. Знайти: а) проекцію $P$ точки $A$ на площину $\pi$; б) точку $S$, симетричну точці $A$ відносно площини $\pi$; в) відстань від точки $A$ до площини $\pi$. (*Відповідь*: а) $P(2;-2;1)$; б) $S(3;-5;5)$, в) $\sqrt{26}$).

## Варіанти контрольної роботи

### Варіант 1

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a}=(6;3;-2)$, $\vec{b}=(3;-2;6)$, $\vec{c}=(0;1;-2)$ і вектор $\vec{d}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$;

   *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Визначити при яких значеннях $\alpha$ і $\beta$ вектори $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k}$ і $\vec{b}=\alpha\vec{i}-6\vec{j}+4\vec{k}$ колінеарні.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(-2;0;1)$ паралельно площині $2x+y-2z+1=0$. Знайти кут між цією площиною та площиною $3x-y+5z+10=0$.

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(4;3;-1)$ паралельно прямим $L_1: x=6t,\ y=2t,\ z=-3t$, $L_2: x=5t-1,\ y=4t+3,\ z=-2t+4$.

### Варіант 2

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a}=(2;-1;1)$, $\vec{b}=(0;-3;4)$, $\vec{c}=(3;3;4)$ і вектор $\vec{d}=-\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$; *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=\vec{p}-4\vec{q}$ і $\vec{b}=3\vec{p}+\vec{q}$, якщо $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=2$, а кут $\varphi$ між векторами $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $30°$.

3. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1;-2;4)$ перпендикулярно площині $2x-y+3z-4=0$.

4. Знайти точку $Q$, симетричну точці $P(2;-5;-7)$ відносно прямої, яка проходить через точки $M_1(5;4;-6)$, $M_2(-2;-17;8)$.

**Варіант 3**

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a}=(2;1;0)$, $\vec{b}=(-1;2;2)$, $\vec{c}=(3;7;-1)$ і вектор $\vec{d}=3\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$;

   *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

2. Вектор $\vec{x}$ колінеарний вектору $\vec{a}=(-4;-5;3)$, утворює гострий кут з віссю $Oz$. Знаючи, що $|\vec{x}|=20\sqrt{2}$, знайти його координати.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2;-1;-1)$ перпендикулярно до прямої $x=2t-3$, $y=-3t+1$, $z=4t-2$.

4. Дано три вершини трикутника $A(-2;-2;-1)$, $B(-4;2;-1)$, $C(-2;3;4)$. Знайти параметричні рівняння висоти, опущеної з вершини $C$.

**Варіант 4**

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a}=(4;3;0)$, $\vec{b}=(3;-2;6)$, $\vec{c}=(0;1;-2)$ і вектор $\vec{d}=2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$;

   *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

2. Показати, що чотири точки $A(3;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(-1;1;-3)$, $D(3;-5;3)$ є вершинами трапеції.

3. При яких значеннях $\alpha$ і $C$ пряма $\frac{x+1}{-6}=\frac{y-2}{\alpha}=\frac{z-1}{2}$ перпендикулярна площині $2x+3y-Cz+2=0$?

4. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;2;1)$ паралельно прямій $\begin{cases}2x+y-z+1=0,\\ x+y+2z+1=0.\end{cases}$

**Варіант 5**

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a} = (2;1;-3)$, $\vec{b} = (1;2;1)$, $\vec{c} = (1;-3;1)$ і вектор $\vec{d} = -2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$. Знайти:

*а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

*в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$;

*д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

*е)* об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Знайти $|\vec{a}|^2$, якщо $\vec{a} = \vec{p} + \vec{r}$, $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{r}| = 2$, $(\widehat{\vec{p},\vec{r}}) = 60^\circ$.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через три дані точки $M_1(3;-1;2)$, $M_2(4;-1;-1)$ і $M_3(2;0;2)$.

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(4;2;3)$ паралельно двом векторам $\vec{a} = (3;-1;2)$ і $\vec{b} = (1;0;-1)$.

**Варіант 6**

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a} = (1;2;-2)$, $\vec{b} = (2;2;-1)$, $\vec{c} = (0;-1;-2)$ і вектор $\vec{d} = 4\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$. Знайти:

*а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

*в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$;

*д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

*е)* об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Знайти вектор $\vec{x}$, знаючи, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (2;3;-2)$ і $\vec{b} = (1;-2;2)$ і задовольняє умову $(\vec{x}, 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = 6$.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(1;-1;4)$ паралельно площині $2x + y - 2z + 1 = 0$. Знайти кут, утворений цією площиною і площиною $4x + 2y - 9 = 0$.

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2;3;1)$ перпендикулярно прямій $\begin{cases} x - 4y + 4z + 6 = 0, \\ 2x - y + 2z + 10 = 0. \end{cases}$

## Варіант 7

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a}=(4;3;0)$, $\vec{b}=(2;1;2)$, $\vec{c}=(-3;-2;5)$ і вектор $\vec{d}=-3\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$;

   *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $2\vec{a}+7\vec{b}$ і $\vec{a}-4\vec{b}$, де $\vec{a}$ і $\vec{b}$ одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

3. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;1;-3)$ паралельно прямій $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-1}{2}$.

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M(2;3;-5)$ і $N(-1;1;-6)$ паралельно вектору $\vec{a}=(4;4;3)$.

## Варіант 8

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a}=(1;4;0)$, $\vec{b}=(-3;2;-6)$, $\vec{c}=(3;-5;-4)$ і вектор $\vec{d}=-\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$;

   *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Дано $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=16$ і $|[\vec{a},\vec{b}]|=24$. Обчислити $(\vec{a},\vec{b})$.

3. Визначити, при якому $\alpha$ площини $3x-5y+\alpha z+8=0$ і $x+3y+2z+1=0$ перпендикулярні. Скласти рівняння площини, яка паралельна площині $x+3y+2z+1=0$ та проходить через точку $M_0(1;-1;2)$.

4. Знайти відстань від точки $A(3;-4;-2)$ до площини, яка проходить через прямі $L_1: x=13t+5,\ y=t+6,\ z=-4t-3$ і $L_2: x=13t+2,\ y=t+3,\ z=-4t-3$.

## Варіант 9

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a}=(4;0;2)$, $\vec{b}=(-1;2;-2)$, $\vec{c}=(2;-2;-3)$ і вектор $\vec{d}=5\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$; *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Знайти $|\vec{a}|$, якщо $\vec{a}=6\vec{p}-\vec{r}$, $|\vec{p}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{r}|=3$, $(\widehat{\vec{p},\vec{r}})=45°$.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через середину відрізка $M_1M_2$ перпендикулярно до цього відрізка, якщо $M_1(1;5;6)$, $M_2(-1;7;10)$.

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $5x-y-2z-3=0,\ 13x-2y-5z-7=0$ перпендикулярно площині $2x-3y+z-11=0$.

## Варіант 10

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a}=(1;-1;1)$, $\vec{b}=(1;0;1)$, $\vec{c}=(0;1;-2)$ і вектор $\vec{d}=2\vec{a}-4\vec{b}-\vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$; *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Дано вектори $\vec{a}=(3;-1;4)$ і $\vec{b}=(1;2;-5)$. Знайти вектор $\vec{x}$, який перпендикулярний до осі $Oz$ і задовольняє умови $(\vec{x},\vec{a})=8$, $(\vec{x},\vec{b})=5$.

3. Скласти параметричні рівняння медіани трикутника з вершинами $A(3;6;-7)$, $B(-5;2;-3)$, $C(0;2;3)$, проведеної з вершини $C$.

4. Знайти проекцію точки $P(2;0;-9)$ на пряму, яка проходить через точки $M_1(1;1;-2)$ і $M_2(2;3;-3)$. Визначити відстань від точки $P$ до цієї прямої.

## Варіант 11

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a}=(5;-3;2)$, $\vec{b}=(1;-1;6)$, $\vec{c}=(1;0;-3)$ і вектор $\vec{d}=\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$;

   *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

2. Об'єм тетраедра $V=4$, три його вершини знаходяться в точках $A(3;1;-2)$, $B(2;2;-5)$, $C(3;-1;-3)$. Знайти координати четвертої вершини $D$, якщо відомо, що вона лежить на осі $Oy$.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2;-3;5)$ паралельно площині $Oxy$.

4. Скласти рівняння площини, яка відтинає на осі $Oz$ відрізок $c=-5$ та перпендикулярна прямій $x=-3t+8$, $y=2t+1$, $z=2t+2$.

## Варіант 12

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a}=(3;-4;2)$, $\vec{b}=(1;-2;3)$, $\vec{c}=(5;-3;-2)$ і вектор $\vec{d}=-\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$;

   *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

2. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $30°$. Знаючи, що $|\vec{a}|=8$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$, обчислити $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

3. Знайти кут між прямою $x=5t+5,\ y=-2t-5,\ z=t+1$ і площиною $x+y+2z+4=0$.

4. Площина паралельна вектору $\vec{L}=(-6;5;4)$ і відтинає на координатних осях $Oy$ і $Oz$ відрізки величиною $b=-5$, $c=-2$. Знайти рівняння цієї площини.

**Варіант 13**

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a}=(1;2;-2)$, $\vec{b}=(3;-3;1)$, $\vec{c}=(6;-1;2)$ і вектор $\vec{d}=3\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$;

   *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}+2\vec{b}$ і $\vec{a}-3\vec{b}$, де $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=6$ і вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=30°$.
3. Знайти відстань між паралельними площинами $\pi_1: 2x-y+z-1=0$, $\pi_2: -4x+2y-2z-7=0$.
4. Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь $Ox$ і точку $M(-8;-1;4)$.

**Варіант 14**

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a}=(2;3;-2)$, $\vec{b}=(1;-4;2)$, $\vec{c}=(1;0;-3)$ і вектор $\vec{d}=\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$;

   *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Дано $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$. Визначити, при якому значенні параметра $\alpha$ вектори $\vec{a}+\alpha\vec{b}$, $\vec{a}-\alpha\vec{b}$ взаємно перпендикулярні.
3. При якому значенні $A$ площина $Ax+3y-5z+1=0$ паралельна прямій $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{1}$.
4. Записати рівняння площини, що проходить через точки $M_1(3;0;4)$ і $M_2(5;2;6)$ та перпендикулярна до площини $2x+4y+6z-7=0$.

## Варіант 15

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a}=(3;6;-2)$, $\vec{b}=(1;-3;-2)$, $\vec{c}=(1;-2;0)$ і вектор $\vec{d}=\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$; *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Сила $\vec{F}=(2;2;9)$ прикладена в точці $A(4;2;-3)$. Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки з точки $A$ в точку $B(2;4;0)$.

3. В трикутнику $ABC$ з вершинами $A(4;0;2)$, $B(0;2;1)$ і $C(4;-1;3)$ через вершину $A$ провести пряму, паралельну протилежній стороні.

4. Знайти точку $M_C$ симетричну точці $M(1;-1;-3)$ відносно прямої $x=-t-8,\ y=-t-4,\ z=t+3.$

## Варіант 16

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a}=(1;6;-2)$, $\vec{b}=(-3;2;2)$, $\vec{c}=(4;-1;-3)$ і вектор $\vec{d}=3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$;

   *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Довжина вектора $\vec{b}$ дорівнює 1, скалярний добуток $(\vec{a}+\vec{b}, a-b)$ дорівнює 11, а скалярний добуток $(\vec{a},\vec{b})$ дорівнює 3. Знайти косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

3. Знайти величини відрізків, що відтинає на осях координат площина, яка проходить через точку $M(-9;7;3)$ і паралельна площині $x-3y+5z-1=0$.

4. Знайти відстань від точки $P(3;-2;-1)$ до площини, що проходить через точку $M_0(0;3;4)$ і пряму $\begin{cases} 6x-4y-5z+2=0, \\ -3x+y+2z+1=0. \end{cases}$

## Варіант 17

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a}=(3;-5;1)$, $\vec{b}=(2;-1;3)$, $\vec{c}=(0;1;-3)$ і вектор $\vec{d}=\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$;

   *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $45°$. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}-2\vec{b}$ і $3\vec{a}+2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$.
3. Дана пряма $x=5t-1,\ y=3t+2,\ z=t-3$. Записати параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(-2;3;-5)$ паралельно даній прямій.
4. Записати рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x+2}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z}{2}$ паралельно прямій $\frac{x+3}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{-2}$.

## Варіант 18

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a}=(5;-3;2)$, $\vec{b}=(2;3;6)$, $\vec{c}=(-1;1;2)$ і вектор $\vec{d}=-\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$;

   *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Показати, що вектори $\vec{a}=7\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k}$ і $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$ можна розглядати як ребра прямокутного паралелепіпеда. Знайти його третє ребро.
3. Знайти значення $\alpha$ і $\beta$, при яких пряма $x=\alpha t+2$, $y=\beta t+1$, $z=3t-8$ перпендикулярна площині $2x+y+z+11=0$.
4. Дано вершини трикутника $A(1;1;4)$, $B(-1;2;2)$, $C(3;2;-2)$. Знайти параметричні рівняння висоти, опущеної з вершини $C$.

## Варіант 19

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a} = (2;-3;-2)$, $\vec{b} = (1;-2;3)$, $\vec{c} = (-2;1;2)$ і вектор $\vec{d} = -2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$;

   *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. При якому значенні $\alpha$ вектор $\vec{p} = \vec{a} + \alpha\vec{b}$ перпендикулярний вектору $\vec{r} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 60°$.

3. Скласти параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $A(3;-4;5)$ перпендикулярно площині $3x - y + 5z + 2 = 0$.

4. Площина паралельна вектору $\vec{L} = (-3;-10;-10)$ і відтинає на координатних осях $Ox$ і $Oz$ відрізки $a = -1$, $c = -2$. Знайти рівняння цієї площини.

## Варіант 20

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a} = (1;-3;2)$, $\vec{b} = (6;1;-3)$, $\vec{c} = (-2;1;3)$ і вектор $\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$;

   *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Сила $\vec{F} = (-3;2;-3)$ прикладена до точки $A(3;-7;5)$. Обчислити модуль моменту сили $\vec{F}$ відносно точки $B(2;-4;1)$.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-2;1;-1)$ перпендикулярно прямій $x = t - 2,\ y = -2t + 3,\ z = 4t + 2$.

4. Знайти відстань від точки $P(1;-1;-2)$ до прямої $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-8}{-2}$.

## Варіант 21

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a}=(-2;1;4)$, $\vec{b}=(2;-3;6)$, $\vec{c}=(2;0;-1)$ і вектор $\vec{d}=-2\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$;

   *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

2. При якому значенні $\alpha$ вектори $\vec{p}=\vec{c}+\alpha\vec{d}$ і $\vec{r}=2\vec{c}+3\vec{d}$ перпендикулярні, якщо $|\vec{c}|=|\vec{d}|=4$, а кут $\varphi$ між векторами $\vec{c}$ і $\vec{d}$ дорівнює $120°$.

3. Дано вершини чотирикутника $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$ і $D(-5;-5;3)$. Скласти рівняння діагоналей $AC$ і $BD$. Показати, що вони перпендикулярні.

4. Скласти рівняння прямої в просторі, яка проходить через точку $A(3;-1;4)$ і паралельна прямій $\begin{cases}4x+3y-10z+3=0,\\ x+3y-z=0.\end{cases}$

## Варіант 22

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a}=(4;3;-2)$, $\vec{b}=(1;-3;2)$, $\vec{c}=(5;-2;3)$ і вектор $\vec{d}=\vec{a}-2\vec{b}-\vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$; *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

2. Дано вершини трикутника $A(1;2;2)$, $B(3;-2;2)$, $C(1;-4;-1)$. Знайти довжину його висоти $CH$.

3. Знайти відстань від точки $M_0(-2;3;5)$ до площини, яка проходить через точки $A(-1;2;4)$, $B(-1;-2;-4)$, $C(3;0;-1)$.

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\begin{cases}3x+2y+1=0,\\ 2y+3z-2=0\end{cases}$ перпендикулярно площині $3x-2y+z+1=0$.

**Варіант 23**

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a}=(4;-3;1)$, $\vec{b}=(-3;3;4)$, $\vec{c}=(-1;1;2)$ і вектор $\vec{d}=3\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$;

   *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Обчислити $|[\vec{a},\vec{b}]|$, якщо $\vec{a}=3\vec{p}-4\vec{r}$, $\vec{b}=\vec{p}+3\vec{r}$, $|\vec{p}|=\sqrt{2}$, $|\vec{r}|=3$, а кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{r}$ дорівнює $45^\circ$.

3. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $A(5;1;-2)$ перпендикулярно прямій $x=3t+4,\ y=-t+3,\ z=2t-1$.

4. Знайти проекцію точки $P(3;-2;5)$ на площину, яка проходить через точку $M_0(-3;2;3)$ і пряму $\begin{cases} x-3y+2z+5=0, \\ 2x+y-z+3=0. \end{cases}$

**Варіант 24**

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a}=(1;0;-2)$, $\vec{b}=(3;-2;4)$, $\vec{c}=(3;2;-1)$ і вектор $\vec{d}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$; *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Знайти вектор $\vec{x}$, який перпендикулярний до векторів $\vec{a}=(2;-3;1)$ і $\vec{b}=(1;-2;3)$ та задовольняє умову $(\vec{x},\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k})=10$.

3. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(-2;3;-4)$ і перпендикулярна площині $3x-5y+2z+1=0$.

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(6;-10;1)$ і відтинає від осі $Ox$ відрізок $a=-3$, а від осі $Oz$ – відрізок $c=2$.

## Варіант 25

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a} = (-4;3;-2)$, $\vec{b} = (3;-2;1)$, $\vec{c} = (1;0;-5)$ і вектор $\vec{d} = -\vec{a} + 2\vec{b} + 4\vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$;

   *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Сила $\vec{F} = (5;4;-11)$ прикладена до точки $A(6;1;-5)$. Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки з точки $A$ в точку $B = (4;2;-6)$.

3. Знайти координату $y$ точки $A(0;y;0)$, рівновіддаленої від точок $B(-2;4;-6)$, $C(8;5;1)$.

4. Площина паралельна вектору $\vec{s} = (3;-4;-14)$ і відтинає на координатних осях $Ox$ і $Oy$ відрізки величиною $a = 2$, $b = -2$. Знайти рівняння цієї площини.

## Варіант 26

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a} = (4;-3;2)$, $\vec{b} = (2;-3;1)$, $\vec{c} = (1;-1;-2)$ і вектор $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$; *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Вектор $\vec{m}$, перпендикулярний до осі $Oz$ і до вектора $\vec{a} = (8;-15;-4)$, утворює з віссю $Ox$ гострий кут. Знаючи, що $|\vec{m}| = 34$, знайти його координати.

3. Скласти параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M(5;3;-2)$ і паралельна осі $Ox$.

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1;2;-3)$ і $M_2(2;-1;3)$ паралельно вектору $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j}$.

## Варіант 27

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a}=(3;-4;2)$, $\vec{b}=(-1;1;6)$, $\vec{c}=(3;2;-1)$ і вектор $\vec{d}=2\vec{a}-\vec{b}-3\vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$;

   *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Який кут утворюють одиничні вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектори $\vec{a}=2\vec{p}-3\vec{q}$ і $\vec{b}=4\vec{p}+\vec{q}$ взаємно перпендикулярні?

3. Знайти значення $\alpha$ і $\beta$, при яких пряма $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+2}{8}=\dfrac{z}{-7,5}$ паралельна прямій $x=\alpha t+2$, $y=\beta t+1$, $z=30t-1$.

4. Знайти проекцію точки $A(-2;1;-1)$ на пряму $\begin{cases} x-3y-z+3=0, \\ x+3y-z-9=0. \end{cases}$

## Варіант 28

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a}=(2;3;-2)$, $\vec{b}=(-3;-2;4)$, $\vec{c}=(1;-1;2)$ і вектор $\vec{d}=2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$;

   *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. При якому значенні $\alpha$ вектори $\vec{p}=\alpha\vec{a}+5\vec{b}$ і $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ будуть колінеарними, якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні.

3. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(4;1;-5)$ паралельно площині $3y-2x+z-11=0$.

4. Знайти кут між прямою $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0 \end{cases}$ та прямою, яка проходить через точки $A(1;-7;2)$ і $B(2;-5;3)$.

## Варіант 29

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a}=(2;-3;2)$, $\vec{b}=(-3;2;-6)$, $\vec{c}=(-4;-2;1)$ і вектор $\vec{d}=2\vec{a}-2\vec{b}-\vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$;

   *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Показати, що точки $A(2;-1;-1)$, $B(1;2;1)$, $C(2;3;0)$, $D(1;6;2)$ лежать в одній площині.
3. Записати канонічні та параметричні рівняння прямої, що є перетином двох площин $x+5y+2z+11=0,\ x-y-z-1=0$.
4. Знайти проекцію точки $A(1;-3;2)$ на площину $6x+3y-z-41=0$.

## Варіант 30

1. Дано координати трьох векторів $\vec{a}=(2;-3;1)$, $\vec{b}=(1;3;-4)$, $\vec{c}=(3;1;2)$ і вектор $\vec{d}=\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$. Знайти:

   *а)* модуль вектора $\vec{a}$; *б)* координати вектора $\vec{d}$;

   *в)* кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; *г)* проекцію вектора $\vec{d}$ на напрямок вектора $\vec{b}$;

   *д)* площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

   *е)* об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=4\vec{p}-\vec{q}$ і $\vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}$, якщо $|\vec{p}|=5$, $|\vec{q}|=4$, а кут між векторами $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $45°$.
3. Знайти відстань між паралельними площинами $4x+3y-10z+3=0$, $8x+6y-20z-3=0$.
4. Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через точки перетину площини $2x+y-3z+1=0$ з прямими $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-5}{-5}=\dfrac{z-1}{2}$ і $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+4}{-6}$.

## Список літератури


1. *Бугров Я. С., Никольский С.М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.- М.: Наука, 1988. – 240 с.

2. *Дудовик В.П., Юрик І.І.* Вища математика. – К.: А.С.К. , 2001. – 648 с.

3. *Каплан И.А.* Практические занятия по высшей математике. Ч. 1 Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве. – Харьков.: ХГУ, 1973. – 204 с.

4. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1986. – 222 с.

5. *Кузнецов А.В.* Сборник задач по высшей математике (типовые расчеты). – М., Высшая школа, 1983.

6. *Овчинніков П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М.* Вища математика: Підручник: У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення. – К.: Техніка, 2000. – 592 с.

Навчально-методичне видання

# Аналітична геометрія в просторі

Методичні вказівки, самостійні та
контрольні роботи з вищої математики
для студентів 1-го курсу
всіх напрямів підготовки

Укладачі: Н.В. Бондаренко, канд. фіз.-мат. наук, доцент
О.О. Килимник, канд. фіз.-мат. наук, доцент
В.В. Отрашевська, канд. фіз.-мат. наук, доцент
М.С. Пастухова, старший викладач

Комп'ютерна верстка О.В. Яворської

Підписано до друку 2013. Формат $60 \times 80_{1/16}$
Папір офсетний. Гарнітура Таймс. Друк на різографі.
Ум. друк. арк. 2,09. Обл.-вид. акр. 2,25. Ум. фарбовідб. 19.
Тираж 100 прим. Вид. № . Зам. № .

КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31, Київ-680, 03680

Віддруковано в редакційно-видавничому відділі
Київського національного університету будівництва і архітектури

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.