МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

Лінійна алгебра

Методичні вказівки та
самостійні завдання
з вищої математики
для студентів 1-го курсу
всіх напрямків підготовки

Київ – 2015

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

Лінійна алгебра

Методичні вказівки
та самостійні завдання
з вищої математики
для студентів 1-го курсу
всіх напрямків підготовки

Київ – 2015

УДК 511.14+512.643
ББК 22.13+22.14
Л

Укладачі: Н.В. Бондаренко, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Є.В. Бондаренко, канд. фіз.-мат. наук, доцент
М.С. Пастухова, старший викладач

Рецензент: Я.М. Якимів, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Відповідальний за випуск В.К. Чибіряков, доктор техн. наук, професор

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики, протокол № 5 від 6 березня 2015 року.

Видається в авторській редакції

Лінійна алгебра: Методичні вказівки та самостійні завдання з вищої математики для студентів 1-го курсу всіх напрямків підготовки / Уклад.: Бондаренко Н.В., Бондаренко Є.В., Пастухова М.С.– К.: КНУБА, 2015. – 90 ст.

Містить методичні вказівки та самостійні завдання з вищої математики за темою «Лінійна алгебра».

Призначено для студентів 1-го курсу всіх напрямків підготовки.

Загальні положення

Алгебра матриць і систем лінійних рівнянь є одним з основних інструментів математики, що застосовується в багатьох прикладних задачах, де діють лінійні закономірності.

Методична розробка містить основні теоретичні відомості, приклади розв’язання основних задач та 30 варіантів вправ з лінійної алгебри, що охоплюють такі розділи: комплексні числа, визначники, дії з матрицями, ранг матриці, системи лінійних рівнянь, лінійні простори.

Навчальні завдання можуть бути використані як основа типового розрахунку з вищої математики для студентів всіх напрямків підготовки, для самостійної роботи студентів, а також як задачі для контролю рівня засвоєння знань студентами з лінійної алгебри.

Розділ 1. Комплексні числа.

1. Алгебраїчна форма комплексного числа. Дії з комплексними числами в алгебраїчній формі.

Комплексним числом називається вираз вигляду $z = x + iy$, де x і y − довільні дійсні числа, а i − уявна одиниця, така що $i^2 = -1$. Числа x та y називаються відповідно ***дійсною*** і ***уявною*** частинами комплексного числа $z = x + iy$ і позначаються, $x = \operatorname{Re} z \in \mathbf{R}$, $y = \operatorname{Im} z \in \mathbf{R}$.

Вираз $z = x + iy$ називають ***алгебраїчною формою*** комплексного числа. Комплексне число $x + 0i$ ототожнюють з дійсним числом x.

Комплексні числа $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$ ***рівні*** між собою тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Поняття «більше» та «менше» для комплексних чисел не існує, тобто множина комплексних чисел **C**, на відміну від множини дійсних чисел **R**, не впорядкована.

Комплексне число $\overline{z} = x - iy$ називається ***спряженим*** до комплексного числа $z = x + iy$.

Операції над комплексними числами:

1) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$;

2) $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$;

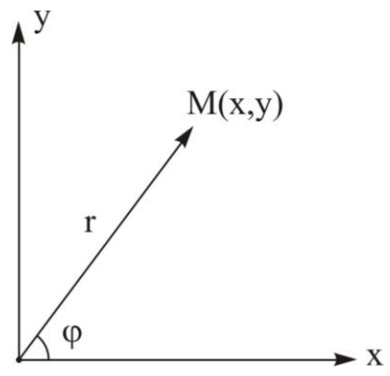
3) $(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$;

4) $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$, якщо $c+di \neq 0$.

2. Геометричне зображення комплексних чисел.

Комплексне число $z = x + iy$ зображують на площині Oxy точкою $M(x;y)$ або радіус-вектором $\overrightarrow{OM}$. Існує взаємно однозначна відповідність між комплексними числами $z = x + iy, x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, та точками площини Oxy. При цьому площину, точки якої ототожнюють з комплексними числами, називають ***комплексною площиною***. Вісь абсцис називається ***дійсною віссю***, вісь ординат ***уявною віссю***.

Положення довільної точки M на площині також можна визначати за допомогою її полярних координат: відстані r (полярний радіус) від початку координат до точки і кута φ між додатнім напрямком осі абсцис та радіус вектором $\overrightarrow{OM}$.



Полярні та декартові координати точки пов'язані співвідношенням: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Полярний радіус r називають ***модулем комплексного числа*** z і позначають $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \geq 0$, а полярний кут φ називають ***аргументом*** комплексного числа z. Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ визначається однозначно з точністю до доданку $2\pi k$, $k \in Z$:

$Arg\, z = \arg z + 2\pi k$, $k \in Z$, де $\arg z$ − ***головне значення*** аргументу, що належить проміжку завдовжки 2π (зазвичай $(-\pi;\pi]$, $[0;2\pi)$ або $[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2})$). Аргумент комплексного числа $z = 0$ невизначений, а модуль дорівнює нулю.

Аргумент та його головне значення можна знайти із системи

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

Зокрема, якщо $\arg z \in (-\pi;\pi]$, то

$$\arg z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, & \text{якщо } x > 0, \\ arctg\,\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{якщо } x < 0,\ y \geq 0, \\ arctg\,\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{якщо } x < 0,\ y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо } x = 0,\ y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо } x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Комплексне число можна записати у вигляді

$$z = r\cos\varphi + r\sin\varphi = r(\cos\varphi + \sin\varphi).$$

Такий запис називається ***тригонометричною формою*** комплексного числа z.

3. Дії з комплексними числами у тригонометричній формі.

Для комплексних чисел у тригонометричній формі:
$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ маємо

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2,\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k,\ k \in Z;$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big).$$

Показниковою формою комплексного числа $z = x + iy$ називається запис: $z = r \cdot e^{i\varphi}$, де $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, φ − аргумент z. $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ − формула Ейлера, що встановлює зв’язок між показниковою та тригонометричними функціями.

Якщо $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то для $n \in N$ степінь комплексного числа обчислюється за ***формулою Муавра***

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Якщо $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то ***корінь*** з комплексного числа $\sqrt[n]{z}$ має n значень, які обчислюються за формулою

$$\varepsilon_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \ k = 0,1,\ldots,n-1.$$

Приклад 1. Знайти алгебраїчну форму комплексного числа

$$\frac{(3-4i)(2+i)}{3-2i} - i^3(4-3i).$$

Розв'язок.

$$\frac{(3-4i)(2+i)}{3-i} - i^3(4-3i) = \frac{6+3i-8i+4}{3-i} - (-i)(4-3i) =$$

$$= \frac{10-5i}{3-i} + i(4-3i) = \frac{(10-5i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} + 4i + 3 =$$

$$= \frac{30+10i-15i+5}{10} + 4i + 3 = \frac{35-5i}{10} + 3 + 4i = 3{,}5 - 0{,}5i + 3 + 4i =$$

$$= 6{,}5 + 3{,}5i$$

Приклад 2. Знайти алгебраїчну форму комплексного числа

$$(\sqrt{6}i - \sqrt{2})^{18}.$$

Розв'язок. Знайдемо тригонометричну форму комплексного числа $z = \sqrt{6}i - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i$. Дійсна частина комплексного числа $x = -\sqrt{2}$, уявна частина $y = \sqrt{6}$. Модуль комплексного числа $|z| = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Комплексне число z лежить в II четверті координатної площини. Тому

$$\varphi = arctg \frac{y}{x} + \pi = arctg(-\sqrt{3}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

Звідси тригонометрична форма комплексного числа має вигляд $z = 2\sqrt{2}(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$. За формулою Муавра отримаємо

$$z^{18} = (2\sqrt{2})^{18}(\cos \frac{2\pi}{3} \cdot 18 + i \sin \frac{2\pi}{3} \cdot 18) = 2^{27}(\cos 12\pi + i \sin 12\pi) = 2^{27}.$$

Приклад 3. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(5+2i)x - (3-i)y = 3+4i.$$

Розв'язок. Виконаємо наступні дії

$$(5+2i)x-(3-i)y=3+4i,$$

$$5x+2xi-3y+3yi=3+4i,$$

$$(5x-3y)+(2x+3y)i=3+4i,$$

З означення рівності комплексних чисел маємо

$$\begin{cases}5x-3y=3,\\2x+3y=4,\end{cases}\quad\begin{cases}5x-3y=3,\\7x=7,\end{cases}\quad\begin{cases}x=1,\\3y=2,\end{cases}\quad\begin{cases}x=1,\\y=2/3.\end{cases}$$

Отже, дійсні розв'язки рівняння $x=1,\ y=2/3$.

Приклад 4. Знайти корені рівняння $5\sqrt{3}-5i-z^3=0$.

Розв'язок. Перетворимо рівняння $z^3=5\sqrt{3}-5i$. Щоб знайти значення z, потрібно знайти корені 3-го степеня з комплексного числа $w=5\sqrt{3}-5i$. Для цього знайдемо тригонометричну форму числа w.

Дійсна та уявна частини рівні $x=5\sqrt{3}$, $y=-5$, тому $|w|=\sqrt{25\cdot 3+25}=5\sqrt{4}=10$. Крім того, комплексне число w знаходиться в IV четверті, тому $\varphi=arctg\,\dfrac{y}{x}=arctg(-\dfrac{1}{\sqrt{3}})=-\dfrac{\pi}{6}$.

За формулою коренів з комплексних чисел маємо

$$\varepsilon_k=\sqrt[3]{10}\cdot\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi k}{3}\right),\ k=0,1,2.$$

Звідси,

$$\varepsilon_0=\sqrt[3]{10}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{18}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)\right)=\sqrt[3]{10}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\right),$$

$$\varepsilon_1=\sqrt[3]{10}\cdot\left(\cos\left(\frac{11\pi}{18}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{18}\right)\right),$$

$$\varepsilon_2=\sqrt[3]{10}\cdot\left(\cos\left(\frac{23\pi}{18}\right)+i\sin\left(\frac{23\pi}{18}\right)\right)=\sqrt[3]{10}\cdot\left(-\cos\left(\frac{5\pi}{18}\right)-i\sin\left(\frac{5\pi}{18}\right)\right).$$

4. Многочлени та їх корені.

Многочленом або ***поліномом*** n-го степеня над полем K називається вираз виду

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ − довільні числа з K, $a_n \neq 0$. Під полем K будемо розуміти одне з числових полів: **Q** − поле раціональних чисел, **R** − поле дійсних чисел, **C** − поле комплексних чисел. Множина всіх многочленів над полем *K* позначається *K*[x].

Натуральне число n називається ***степенем*** многочлена, позначають $\deg f(x) = n$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ − ***коефіцієнтами*** многочлена, причому a_0 − ***вільний*** коефіцієнт, a_n − ***старший*** коефіцієнт.

Довільне число є многочленом нульового степеня, їх називають ***константними***. Многочлен 1-го степеня $a_1 x + a_0$ називається ***лінійним***.

На множині всіх многочленів $\mathbf{C}[x]$ визначені операції додавання та множення многочленів.

Кажуть, що многочлен $f(x)$ ***ділить*** многочлен $g(x)$, якщо існує такий многочлен $h(x) \in \mathbf{C}[x]$, що виконується рівність $g(x) = f(x) \cdot h(x)$. В цьому випадку ще говорять, що многочлен $g(x)$ ділиться на многочлен $f(x)$.

Теорема (Про ділення з остачею). Нехай $f(x)$ і $g(x)$ − довільні многочлени і $g(x) \neq 0$. Тоді існують, причому єдині многочлени $q(x), r(x)$ такі, що

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) \text{ і } \deg r(x) < \deg g(x) \text{ або } r(x) \equiv 0.$$

Многочлен $r(x)$ називається ***остачею*** від ділення $f(x)$ на $g(x)$.

Наслідок (Теорема Безу). Остача від ділення многочлена $f(x)$ на многочлен $(x - c)$ рівна $f(c)$.

Одним з практичних методів знаходження частки $q(x)$ та остачі $r(x)$ є ділення многочленів в «стовпчик».

Для ділення многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ на лінійний двочлен $x - c$ можна користуватися «**схемою Горнера**».

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	$\ldots$	a_1	a_0
c	$b_n = a_n$	$b_{n-1} =$ $= b_n \cdot c + a_{n-1}$	$b_{n-2} =$ $= b_{n-1} \cdot c + a_{n-2}$	b_{n-3}		b_1	r

Тоді $q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + b_1$ і $f(x) = (x - c)\cdot q(x) + r$.

Число c називається ***коренем*** многочлена $f(x)$, якщо $f(c) = 0$. Якщо число c є коренем многочлена $f(x)$, то $f(x)$ ділиться на $(x - c)$.

Основна теорема алгебри. Довільний многочлен з комплексними коефіцієнтами, степінь якого більша або рівна одиниці, має хоча б один корінь, дійсний або комплексний.

Єдиними незвідними многочленами над полем **C** є лінійні двочлени $a_1 x + a_0$, $a_1, a_0 \in$ **C**.

Довільний многочлен $f(x)$, степеня n, над **C** можна розкласти в добуток n лінійних множників

$$f(x) = a_n (x - c_1)(x - c_2)\cdot\ldots\cdot(x - c_n),$$

де $c_1,\ldots,c_n$ – корені многочлена, a_n – старший коефіцієнт. Отже, кожен многочлен $f(x) \in \mathbf{C}[x]$ степеня n має рівно n коренів з урахуванням їх кратності.

Якщо комплексне число $a + ib$ є коренем многочлена $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами, то комплексно спряжене число $a - ib$ також є коренем цього многочлена.

Довільний многочлен степеня $n > 0$ з дійсними коефіцієнтами розкладається в добуток лінійних $(x - c_i)$ і квадратичних $(x^2 + p_i x + q_i)$ множників з дійсними коефіцієнтами, тобто

$$f(x) = a_n (x - c_1)^{k_1} \ldots (x - c_t)^{k_t} (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \ldots (x^2 + p_m x + q_m)^{s_m},$$

причому $k_1 + k_2 + \ldots + k_r + 2(s_1 + \ldots + s_m) = n$, а квадратичні многочлени $(x^2+p_i x+q_i)$ – не мають дійсних коренів.

Розглянемо многочлен з цілими коефіцієнтами $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1 x+a_0$. Якщо раціональне число і нескоротний дріб $\frac{p}{q}$ є коренем многочлена $f(x)$, то p є дільником вільного коефіцієнта a_0, а q – дільником старшого коефіцієнта a_n.

Якщо $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1 x+a_0$ – зведений многочлен, тобто $a_n=1$, то всі раціональні корені многочлена є цілими числами і знаходяться серед дільників вільного коефіцієнта a_0.

Приклад 5. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4+x^3+2x^2+4x-8$.

Розв'язок. Многочлен $f(x)=x^4+x^3+2x^2+4x-8$ – зведений. Тому його раціональні корені знаходяться серед дільників вільного коефіцієнта $\pm1; \pm2; \pm4; \pm8$. Простим перебором дільників, знаходимо, що $f(1)=0$. Поділимо многочлен $f(x)$ на двочлен $x-1$ за схемою Горнера

	1	1	2	4	-8
1	1	2	4	8	0

Звідси, $f(x)=(x-1)g_1(x)$, де $g_1(x)=x^3+2x^2+4x+8$. Простим перебором дільників вільного коефіцієнта многочлена $g_1(x)$ знаходимо, що $g_1(-2)=0$.

Поділимо многочлен $g_1(x)$ на двочлен $x+2$ за схемою Горнера.

	1	2	4	8
-2	1	0	4	0

Звідси, $g_1(x)=(x+2)(x^2+4)$. Многочлен x^2+4 дійсних розв'язків не має. Його комплексні розв'язки мають вигляд

$x_1 = 2i,\ x_2 = -2i$.

Над полем дійсних чисел розклад многочлена має вигляд

$$f(x) = (x-1)(x+2)(x^2+4).$$

Над полем комплексних чисел розклад многочлена має вигляд

$$f(x) = (x-1)(x+2)(x-2i)(x+2i).$$

Розділ 2. Матриці, визначники і системи лінійних рівнянь.

1. Матриці

Матрицею A називається прямокутна таблиця, елементами якої можуть бути дійсні або комплексні числа. Якщо A складається з m рядків і n стовпчиків, то кажуть про матрицю порядку $m \times n$, елементи якої позначаються a_{ij}, де $i = 1,\ldots,m$ і $j = 1,\ldots,n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матриці з однаковою кількістю рядків і стовпчиків $m = n$ називаються ***квадратними матрицями порядку*** n.

Операції над матрицями визначаються через операції з їхніми елементами. ***Транспонування*** матриці, або заміна місцями рядків і стовпчиків: $(A^T)_{ij} = a_{ji}$. ***Множення матриці на число*** α визначає нову матрицю αA з елементами $(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}$. ***Додавання*** двох матриць можливе лише для матриць однакового порядку $(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. *Добуток* матриць визначається для двох матриць з порядками $m \times n$ і $n \times p$, тобто число стовпчиків першого множника рівне числу рядків другого множника, а елемент добутку $(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. Для квадратних матриць A і B одного порядку в загальному випадку $AB \neq BA$.

Деякі види матриць мають своє власне позначення через особливість розміщення елементів. ***Діагональна*** матриця може мати ненульові елементи лише на головній діагоналі, тому $a_{ii} = \lambda_i$, а всі інші елементи рівні нулю. Якщо всі $\lambda_i = 1$, то A називається ***одиничною*** матрицею E порядку n. ***Симетрична*** матриця має властивість $a_{ij} = a_{ji}$, а для антисиметричної матриці $a_{ij} = -a_{ji}$. У випадку комплексних елементів вводиться операція ермітового спряження A^{+}, що поєднує транспонування і комплексне спряження: $(a^{+})_{ij} = \bar{a}_{ji}$, де риска зверху позначає комплексне спряження. Матриці, що мають властивість $A^{+} = A$, називаються ***ермітовими***. Помітимо, що діагональні елементи ермітової матриці завжди дійсні, а клас симетричних матриць є підмножиною ермітових матриць з дійсними елементами.

Елементарними перетвореннями 1-го, 2-го, 3-го типу над рядками (стовпчиками) матриці називаються:

1. Перестановка двох рядків (стовпчиків).
2. Множення деякого рядка (стовпчика) матриці на ненульове число.
3. Додавання до деякого рядка (стовпчика) матриці іншого рядка (стовпчика) помноженого на ненульове число.

Дві матриці називаються ***рядково еквівалентними***, якщо одна матриця отримана з іншої за допомогою елементарних перетворень над рядками. Еквівалентність матриць A і B позначають $A \sim B$.

Приклад 6. Обчислити добуток матриць $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язок.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 3\cdot 0 & 1\cdot 1 + 3\cdot 1 & 1\cdot 0 + 3\cdot 3 \\ 2\cdot 2 + 0\cdot 0 & 2\cdot 1 + 0\cdot 1 & 2\cdot 0 + 0\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Приклад 7. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-2x^2+3$ від матриці $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ -2 & 5 & 3\\ 2 & -4 & -2\end{pmatrix}$.

Розв'язок. Запишемо многочлен від матриці $f(A)=A^3-2A^2+3E$, де E − одинична матриця порядку такого ж, як і матриця A.

Знайдемо матриці $A^2=A\cdot A$ та $A^3=A^2\cdot A$.

$$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ -2 & 5 & 3\\ 2 & -4 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ -2 & 5 & 3\\ 2 & -4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -4 & -3\\ -2 & 9 & 3\\ 2 & -8 & -2\end{pmatrix},$$

$$A^3=\begin{pmatrix}3 & -4 & -3\\ -2 & 9 & 3\\ 2 & -8 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ -2 & 5 & 3\\ 2 & -4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 3\\ -10 & 29 & 15\\ 10 & -28 & -14\end{pmatrix}$$

$$f(A)=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 3\\ -10 & 29 & 15\\ 10 & -28 & -14\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}3 & -4 & -3\\ -2 & 9 & 3\\ 2 & -8 & -2\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-4 & 6 & 9\\ -6 & 14 & 9\\ 6 & -12 & -7\end{pmatrix}.$$

2. Визначники.

Визначником **або** ***детермінантом*** $\det A$ квадратної матриці A порядку n називається наступна числова функція від її елементів: для матриці першого порядку $\det A=a_{11}$, для матриці другого порядку

$$\det(A)=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21},$$

для матриць третього порядку

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - (a_3b_2c_1 + a_2b_1c_3 + a_1b_3c_2).$$

Для матриць 4-го порядку і вище визначник можна визначити по індукції за допомогою формули розкладу, або ***розкриття по і-му рядку*** $-$ $\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij}A_{ij}$. Тут A_{ij} $-$ ***алгебраїчне доповнення до елемента*** a_{ij} матриці A, що визначається як $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, де M_{ij} $-$ ***доповнюючий мінор*** до елемента a_{ij}, тобто визначник порядку $n-1$, складений з елементів вихідної матриці A, з якого викреслений i-тий рядок та j-тий стовпчик. Матриці, визначник яких не дорівнює нулю, називаються ***невиродженими***, а при $\det A = 0$ $-$ ***виродженими***. Визначник матриці дорівнює нулю тільки тоді, коли рядки (стовпчики) матриці є лінійно залежними.

Властивості визначників:

1. При транспонуванні матриці її визначник не змінюється.
2. Якщо в квадратній матриці A поміняти місцями два рядки (стовпчики), залишивши інші на своїх місцях, то $\det A$ поміняє знак на протилежний.
3. Якщо квадратна матриця має два однакові рядки (стовпчики), то її визначник дорівнює нулю.
4. Якщо всі елементи якого-небудь рядка (стовпчика) квадратної матриці A помножити на число λ, то $\det A$ також помножиться на λ.
5. Визначник матриці не зміниться, якщо до елементів одного з її рядків (стовпчиків) додати відповідні елементи другого рядка (стовпчика) помножені на деяке число.
6. При обчисленні визначників справедливі також рівності $\det(A^n) = (\det A)^n$, $\det(\alpha A) = \alpha^n \cdot \det A$ і $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Розглянемо два основних методи обчислення визначників.

1. ***Метод ефективного зниження порядку.*** Згідно формулі

розкладу визначника, визначник n-го порядку зводиться до обчислення визначника $(n-1)$-го порядку. Цей метод зниження порядку не ефективний. Тому, використовуючи елементарні перетворення рядків (стовпчиків) матриці та основні властивості визначників, обчислення визначника завжди можна звести до обчислення одного визначника $(n-1)$-го порядку, зробивши в якому-небудь рядку всі елементи нульові, крім одного.

2. ***Зведення визначників до трикутного виду.*** Визначник, у якого всі елементи, що знаходяться вище чи нижче головної діагоналі, рівні нулю, називається ***визначником трикутного виду***. В цьому випадку визначник рівний добутку елементів його головної діагоналі. Зведення визначників n-го порядку до трикутного виду завжди можливе.

Приклад 8. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Розв'язок. 1 спосіб. Другий рядок визначника помножимо на 2 і додамо послідовно до 1-го та 3-го рядка, а також другий рядок додамо до 4-го рядка. Після цього отримаємо в 1-му стовпчику один не нульовий елемент. Отриманий визначник розкладемо по першому стовпчику.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 7 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 9 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 224+120+108-112-144-180=16$$

2 спосіб. Виконаємо наступні дії. Перший рядок переставимо місцями з другим. Після цього 1-й рядок помножимо на 2 і додамо до 2-го та 3-го рядка. Далі 1-й рядок додамо до 4-го рядка.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 5 & 4 \\ 0 & 9 & 7 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

Третій рядок помножимо на (-1) і додамо до 2-го рядка. Другий рядок, помножений на 9, додамо до 3-го рядка, 2-ий рядок, помножений на 4, додамо до 4-го рядка. Після цього 4-й рядок помножимо на (-2) і додамо до 3-го рядка.

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 9 & 7 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -11 & -12 \\ 0 & 0 & -5 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -4 \end{vmatrix} =$$

3-й рядок помножимо на (-5) і додамо до 4-го рядка.

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{vmatrix} = -((-1)\cdot(-1)(-1)\cdot 16) = 16.$$

3. Обернена матриця. Матричні рівняння.

Для невиродженої квадратної матриці A можна ввести поняття оберненої матриці A^{-1}, що задовольняє рівності $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E$. Елементи оберненої матриці a_{ij}^{-1} знаходяться за формулою $a_{ij}^{-1} = (-1)^{i+j} A_{ji} / \det A$. З означення оберненої матриці випливає, що $\det(A^{-1}) = 1/\det A$.

При розв’язанні матричних рівнянь виду $A\cdot X = B$, розв’язок знаходиться у вигляді $X = A^{-1}\cdot B$, де A^{-1} − обернена матриця до матриці A. Якщо рівняння має вигляд $X\cdot A = B$, то розв’язок знаходимо у вигляді $X = B\cdot A^{-1}$. Для матричного рівняння $A\cdot X\cdot C = B$ розв’язок має вигляд $X = A^{-1}\cdot B\cdot C^{-1}$.

Приклад 9. Розв'язати матричне рівняння.

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Спочатку знайдемо обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Обчислимо визначник $\det A = -8 \neq 0$. Далі знаходимо алгебраїчні доповнення

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -7, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -6.$$

Звідси, $A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$, $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Знайдемо невідому матрицю X:

$$X = A^{-1} \cdot B =$$

$$= -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 32 & -40 \\ 24 & -32 \\ 24 & -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обернену матрицю до A можна знайти й іншим способом. Для цього поряд з матрицею A потрібно записати одиничну матрицю такого ж розміру, як і A, тобто $(A|E)$. Матрицю A елементарними перетвореннями над рядками звести до одиничної матриці. При цьому, якщо робити послідовність тих же самих елементарних перетворень над одиничною матрицею E, то отримаємо обернену матрицю. Будемо мати $(E \mid A^{-1})$.

4. Лінійні простори.

Лінійним (або векторним) простором над полем K називається не порожня множина V із заданими на ній операціями додавання «+» двох елементів множини V, $+: V\times V\to V$, $(u,v)\mapsto u+v$ і множення «·» елементів множини V на елементи поля K, $\cdot: K\times V\to V$, $(\lambda,v)\mapsto\lambda\cdot v$, що задовольняють наступним умовам:

1) $u+v=v+u$ для довільних $u,v\in V$;
2) $(u+v)+w=u+(v+w)$ для довільних $u,v,w\in V$;
3) існує такий елемент $0\in V$, що $v+0=v$ для довільного $v\in V$;
4) для довільного $v\in V$ існує такий елемент $-v\in V$, що $v+(-v)=0$;
5) $\lambda\cdot(u+v)=\lambda\cdot u+\lambda\cdot v$ для довільних $u,v\in V$ і $\lambda\in K$;
6) $(\lambda+\mu)\cdot v=\lambda\cdot v+\mu\cdot v$ для довільного $v\in V$ і $\lambda,\mu\in K$;
7) $\lambda\cdot(\mu\cdot v)=(\lambda\mu)\cdot v$ для довільних $v\in V$ і $\lambda,\mu\in K$;
8) $1\cdot v=v$ для довільного $v\in V$.

Елементи лінійного простору називаються ***векторами***. Властивості 1)−4) означають, що V є абелевою (комутативною) групою відносно операції додавання. Елементи поля K іноді називають ***скалярами***. Властивості 5)−8) означають, що поле K лінійно діє на V. Зазвичай ми будемо опускати знак «·». В якості поля K ми будемо розглядати поле дійсних чисел ***R*** або поле комплексних чисел ***C***.

Лінійною комбінацією системи векторів $v_1,v_2,\dots,v_k$ простору V називається сума виду $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\dots+\lambda_kv_k$, де $\lambda_i\in K$.

Система векторів $v_1,v_2,\dots,v_k$ називається ***лінійно незалежною,*** якщо їх лінійна комбінація $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\dots+\lambda_kv_k=0$ лише при умові, що всі $\lambda_i=0$. В протилежному випадку система називається ***лінійно залежною***.

Якщо система векторів $v_1,v_2,\dots,v_k$ лінійно залежна, то один з векторів системи є лінійною комбінацією інших ($k\ge 2$).

Підсистема $v_1, v_2, ..., v_m$ $(m < k)$ системи векторів $v_1, v_2, ..., v_k$ називається ***максимальною лінійно незалежною***, якщо приєднуючи до цієї підсистеми довільний вектор системи, отримаємо лінійно залежну систему векторів.

Рангом системи векторів $v_1, v_2, ..., v_k$ називається кількість векторів в максимальній лінійно незалежній підсистемі даної системи векторів. Позначається $rank(v_1, v_2, ..., v_k)$. Вектори $v_1, v_2, ..., v_m$ лінійно незалежні тоді і тільки тоді $rank(v_1, v_2, ..., v_m) = m$.

Лінійно незалежна система векторів $v_1, v_2, ..., v_k$ називається ***базисом простору*** V, якщо кожний вектор $v \in V$ зображується у вигляді лінійної комбінації $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k$. Іншими словами, базисом називається максимальна (за включенням) лінійно незалежна система векторів в просторі V. Набір чисел $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$, $\lambda_i \in \mathbf{R}$ називається ***координатами вектора*** v в базисі $v_1, v_2, ..., v_k$.

Простір V називається ***скінченновимірним***, якщо в ньому існує базис, що складається з скінченного числа векторів. В противному випадку простір називається ***нескінченновимірним***.

Якщо $v_1, v_2, ..., v_k$ − базис простору V, то зображення довільного вектора $v \in V$ у вигляді лінійної комбінації $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k$ єдине. В скінченновимірному просторі всі базиси складаються з одного і того ж числа елементів. ***Розмірністю*** скінченновимірного лінійного простору V (позначення: $\dim V$) називається число елементів в довільному базисі V. Якщо ж V нескінченновимірним, то ми пишемо $\dim V = \infty$.

Основним прикладом лінійного простору є арифметичний простір $\mathbf{R}^n$, елементами якого є вектори, що мають n координат.

Підмножина $W \subset V$ лінійного простору V називається ***підпростором***, якщо для довільних векторів $u, v \in W$ і скаляра $\lambda \in K$ ми маємо $u + v \in W$ і $\lambda u \in W$. Іншими словами, W буде підпростором, якщо W саме є лінійним простором відносно операцій, заданих в просторі V.

Приклад 10. Перевірити, чи є множина U векторів простору $\mathbf{R}^n$, всі координати яких рівні між собою, підпростором лінійного простору $\mathbf{R}^n$, і якщо є, то знайти його розмірність.

Розв'язок. Розглянемо два вектори U: $a = (x, x, \ldots, x)$ і $b = (y, y, \ldots, y)$. Їх лінійна комбінація

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b = (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y, \ldots, \alpha x + \beta y)$$

має однакові координати і належить U. Отже, U − підпростір $\mathbf{R}^n$. Базисом простору U є вектор $(1,1,\ldots,1)$, тому $\dim U = 1$.

5. Ранг матриці.

Рядковим (стовпчиковим) рангом матриці A (позначається $rankA$) називається ранг вектор-рядків (вектор-стовпчиків) матриці A. Відомо, що рядковий ранг матриці A дорівнює стовпчиковому рангу матриці і називається ***рангом матриці*** A.

Ранг матриці не змінюється, якщо над рядками (стовпчиками) матриці виконувати елементарні перетворення 1-го, 2-го та 3-го типу.

Для того, щоб знайти ранг матриці потрібно визначити, наприклад, максимальну кількість лінійно незалежних стовпчиків матриці. Для цього зводять матрицю до «трапецевидного виду» за допомогою елементарних перетворень над рядками матриці.

Приклад 11. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -4 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 4 & 20 & 12 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -4 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 10 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -4 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -4 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4/3 & 10/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Максимальна кількість лінійно-незалежних вектор-стовпчиків рівна 3. Отже, $rankA = 3$.

6. Системи лінійних рівнянь.

Системою m лінійних рівнянь з n невідомими називається система m рівностей

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ − невідомі або змінні, $a_{ij} \in \mathbf{R}$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$ − коефіцієнти системи лінійних рівнянь. $b_i \in \mathbf{R}$ − вільні члени.

Якщо в системі лінійних рівнянь $m = n$, то система називається ***квадратною***. Якщо всі $b_i = 0$, то система лінійних рівнянь називається ***однорідною,*** в іншому випадку ***неоднорідною***.

Система лінійних рівнянь називається:

1) ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв’язок;

2) ***несумісною***, якщо вона не має жодного розв’язку;

3) ***визначеною***, якщо вона має точно один розв'язок;

4) ***невизначеною***, якщо вона має безліч розв'язків.

Основною матрицею системи лінійних рівнянь називається матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Числа, що стоять в правих частинах системи (1) утворюють матрицю стовпчик $\mathrm{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Матриця системи, доповнена справа стовпчиком вільних членів називається ***розширеною матрицею системи***:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Теорема Кронекера-Капеллі. Система лінійних рівнянь (1) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці A рівний рангу розширеної матриці A^*.

При цьому, якщо $rankA^* = rankA = r$, то можливі два випадки:

1) $r = n$, тобто число невідомих дорівнює числу рівнянь і $\det A \neq 0$, система має єдиний розв'язок, тобто вона сумісна і визначена;

2) $r < n$, система сумісна і невизначена.

Якщо $rankA^* > rankA$, то система (1) несумісна.

Систему лінійних рівнянь (1) можна записати в матричному вигляді $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$, де $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – набір невідомих.

Якщо система лінійних рівнянь $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ квадратна і $\det A \neq 0$, то єдиний розв'язок знаходимо з матричного рівняння $\mathrm{x} = A^{-1}\mathrm{b}$.

Розв’язок квадратної системи лінійних рівнянь можна знайти керуючись теоремою Крамера.

Теорема Крамера. Квадратна система лінійних рівнянь визначена тоді і тільки тоді, коли $\det A \neq 0$. Тоді єдиний розв’язок системи знаходиться за правилом Крамера: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, де $\Delta = \det A,\ \Delta_i$ – визначник, отриманий заміною i-того стовпчика матриці A на стовпчик вільних членів.

Системи лінійних рівнянь також можна розв’язувати методом послідовних виключень невідомих, або **методом Гауса**. Для цього розширену матрицю системи (1) за допомогою елементарних перетворень рядків потрібно звести так, щоб в кожному базисному стовпчику та рядку залишився один ненульовий елемент (його завжди можна зробити одиничним).

Приклад 12. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3; \\ x_1 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв’язок. а) Розв’язуючи систему лінійних рівнянь методом Гауса одночасно зробимо висновок про сумісність системи, використовуючи теорему Кронекера-Капеллі.

Запишемо розширену матрицю системи і спростимо її за допомогою елементарних перетворень рядків.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -3 & -4\\ 0 & 0 & -2 & -2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -3 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\sim$$

Оскільки ранг основної матриці дорівнює 3 і ранг розширеної матриці дорівнює 3, то за теоремою Кронекера-Капеллі система лінійних рівнянь сумісна, причому визначена. Залишилося над основною діагоналлю зробити нулі. Помножимо 4-й рядок на 3 і додамо до 2-го, після чого помножимо 4-й рядок на (-1) і додамо до 1-го рядка. Отримаємо

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right).$$

Отже, розв'язок системи $x_1 = 2,\ x_2 = -1, x_3 = 1.$

б) Розв'яжемо систему лінійних рівнянь методом Крамера. Спочатку обчислимо визначник $\Delta = \begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Знайдемо визначники

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 1 & -2\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix} = -4,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix}2 & 2 & -1\\ 3 & 3 & -2\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix} = 2,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 3\end{vmatrix} = -2$$

Далі за формулами Крамера знаходимо розв'язок системи:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$$

в) Розв'яжемо систему лінійних рівнянь матричним методом. Для цього знайдемо обернену матрицю до основної матриці системи A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&1&-5&0&1&-3\\0&1&-3&1&0&-2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&1&-5&0&1&-3\\0&0&2&1&-1&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&1&-5&0&1&-3\\0&0&1&0{,}5&-0{,}5&0{,}5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&1&-5&0&1&-3\\0&0&1&0{,}5&-0{,}5&0{,}5\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-0{,}5&0{,}5&0{,}5\\0&1&0&2{,}5&-1{,}5&-0{,}5\\0&0&1&0{,}5&-0{,}5&0{,}5\end{array}\right).\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-0{,}5&0{,}5&0{,}5\\2{,}5&-1{,}5&-0{,}5\\0{,}5&-0{,}5&0{,}5\end{pmatrix}$$

Звідси, $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot b=\begin{pmatrix}-0{,}5&0{,}5&0{,}5\\2{,}5&-1{,}5&-0{,}5\\0{,}5&-0{,}5&0{,}5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}.$

Або $x_1=2,\ x_2=-1,\ x_3=1$.

Приклад 13. Довести, що вектори $\vec{a}_1=(1;3;-1)$, $\vec{a}_2=(2;1;0)$, $\vec{a}_3=(-3;2;1)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b}=(10;3;-4)$ в цьому базисі.

Розв’язок. Вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ утворюють базис простору $\mathbf{R}^3$ тоді і тільки тоді, коли вони лінійно незалежні.

Знайдемо $rank(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$.

$$\begin{pmatrix}1&2&-3\\3&1&2\\-1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-5&11\\0&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-5&11\\0&1&-1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&-1\\0&-5&11\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&-1\\0&0&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Отже, $rank(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)=3$ і система векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ утворює базис простору $\mathbf{R}^3$.

Оскільки $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ базис простору $\mathbf{R}^3$, то існують єдині коефіцієнти $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$ такі, що $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = \vec{b}$. Запишемо цю рівність у векторному вигляді $x_1\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\3\\-4\end{pmatrix}$.

Або $\begin{pmatrix}x_1 + 2x_2 - 3x_3\\3x_1 + x_2 + 2x_3\\-x_1 + x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\3\\-4\end{pmatrix}$, $\begin{cases}x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 10,\\3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3,\\-x_1 + x_3 = -4.\end{cases}$

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь методом Гауса. Випишемо розширену матрицю системи лінійних неоднорідних рівнянь.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & 10\\3 & 1 & 2 & 3\\-1 & 0 & 1 & -4\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & 10\\0 & -5 & 11 & -27\\0 & 2 & -2 & 6\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & 10\\0 & -1 & 7 & -15\\0 & 1 & -1 & 3\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & 10\\0 & -1 & 7 & -15\\0 & 0 & 6 & -12\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & 10\\0 & -1 & 7 & -15\\0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 4\\0 & -1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right).$$

Отже, $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -2$.

Координати вектора $\vec{b}$ в базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ мають вигляд $\vec{b} = (2; 1; -2)$

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь $A \cdot \mathrm{x} = O$. Однорідна система лінійних рівнянь завжди сумісна, оскільки вона завжди має тривіальний розв'язок $x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$.

Якщо матриця A однорідної системи лінійних рівнянь квадратна і $\det A \neq 0$, то по формулам Крамера для неї існує лише тривіальний розв'язок $\mathrm{x} = (0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$. Таким чином, умовою наявності нетривіального розв'язку однорідної системи з квадратною матрицею є рівність нулю її визначника. В загальному випадку, якщо для основної матриці A системи розміру $m\times n$, $rank\, A<n$, то система буде сумісною, але не визначеною, тобто буде мати нескінченно багато розв’язків.

Розв’язки системи лінійних однорідних рівнянь утворюють підпростір лінійного простору $\mathbf{R}^n$, розмірність якого дорівнює $n-r$, де n − кількість невідомих в системі, а r − ранг матриці. Базис простору розв’язків системи лінійних однорідних рівнянь називається ***фундаментальною системою розв’язків*** (ФСР).

Для знаходження ФСР в матриці A методом елементарних перетворень виділяють базисні рядки і розглядають лише рівняння, що містяться в цих рядках. Далі в них виділяють базисні стовпчики, а змінні, що не містяться в базисних стовпчиках, вважаються вільними і переносяться в праву частину. Таких вільних змінних є $n-r$ штук. Їх вибирають таким чином, щоб утворити з розв’язків системи $n-r$ лінійно незалежних розв’язків. Це і буде ФСР. Довільний розв’язок системи однорідних рівнянь буде лінійною комбінацією векторів з ФСР, що містить $n-r$ довільних сталих.

Приклад 14. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв’язок. Запишемо розширену матрицю системи і спростимо її за допомогою елементарних перетворень.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 13 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 0 & -13 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Пов'язані змінні будуть x_2 та x_3, а вільні x_1, x_4, x_5.

Запишемо систему лінійних рівнянь по спрощеній матриці, залишивши пов'язані змінні в лівій частині, а вільні змінні в правій.

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 + 13x_4 - x_5, \\ x_3 = 5x_4 - x_5, \\ x_1 = c_1, \\ x_4 = c_4, \\ x_5 = c_5. \end{cases}$$

Надамо по черзі вільним змінним значення $x_1 = 1,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0$; $x_1 = 0,\ x_4 = 1,\ x_5 = 0$; $x_1 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 1$. Отримаємо ФСР: $v_1 = (1;2;0;0;0)$, $v_2 = (0;13;5;1;0)$, $v_3 = (0;-1;-1;0;1)$.

Загальний розв'язок системи:

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = C_1 \cdot v_1 + C_2 \cdot v_2 + C_3 \cdot v_3$, де $C_1, C_2, C_3 \in \mathbf{R}$.

Варіант 1

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел

а) $\dfrac{(1+2i)(3-i)}{2-i} - i(4+3i)$; б) $(\sqrt{2}i - \sqrt{6})^{36}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(3-2i)x + (1+4i)y = 5+6i$.

3. Знайти корені рівняння $\sqrt{2}z^3 - 3i + 3 = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 13x + 10$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ від матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & -7 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 7 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -3; \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = 13; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 11. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 0; \\ -2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; 2; -1)$, $\vec{a}_2 = (2; 0; -3)$, $\vec{a}_3 = (-1; 3; 2)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (3,12,-2)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем $\mathbf{R}$ множина U всіх многочленів парного степеня.

Варіант 2

1. Знайти алгебраїчну форму комплексного числа

а) $\dfrac{2i^6+7i}{1-i}-(4+3i)(1-i)$; б) $(2\sqrt{3}-2i)^{30}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(2+3i)x+(1-i)y=1+9i$.

3. Знайти корені рівняння $z^4-3z^2-10=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-2x^3+x^2+2x-2$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-3x^2+2$ від матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -2\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}2 & -2 & 1 & -3\\ -1 & 4 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 2 & -2\\ 1 & 3 & 0 & 5\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}3 & -2 & 1 & -3 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1 & -2 & 3\\ 1 & -1 & 0 & -1 & -2\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ -1 & -2 & 1\\ 3 & 8 & -2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}5 & -4\\ 2 & 7\\ -3 & 1\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = -3; \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 10; \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = -7. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0; \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0; \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; 3; 1)$, $\vec{a}_2 = (-1; 2; -3)$, $\vec{a}_3 = (2; 0; -4)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (6; 1; -4)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}^n$ всіх векторів розмірності n множина U тих векторів, що є розв'язками однорідної системи лінійних рівнянь.

Варіант 3

1. Знайти алгебраїчну форму комплексного числа

а) $\dfrac{1+8i^3}{4-2i}+(4-i)^2$; б) $(2-2i)^{84}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(3-i)x+(2+2i)y=(1+2i)x-yi.$$

3. Знайти корені рівняння $8\sqrt{3}-8i-z^3=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-x^3-3x^2-7x-6$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3+2x^2+3x-1$ від матриці $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -2\\ 1 & 5 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}-2 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 3 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 6 & 0\\ 3 & 0 & 2 & 5\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}5 & -1 & 3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -1 & 7\\ 4 & -3 & 4 & 3 & -6\\ 3 & -5 & 1 & 4 & -13\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix}3 & -2\\ -6 & 5\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}7 & 5\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1; \\ x_1 - x_2 = 2; \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0; \\ -x_1 + 8x_2 + x_3 + 3x_4 = 0; \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 + 8x_4 = 0; \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (2; -1; 3)$, $\vec{a}_2 = (-1; 1; -2)$, $\vec{a}_3 = (-1; 3; -5)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (0; 4; -3)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 7 & -5 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U всіх верхніх трикутних матриць.

Варіант 4

1. Знайти алгебраїчну форму комплексного числа

$$\text{а) } (-1+i)(5+3i)+\frac{i(5-4i)}{2+2i}; \qquad \text{б) } (\sqrt{2}i-\sqrt{6})^{33}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(1+3i)x+(1-2i)^2 y=(-1-4i)\cdot i.$$

3. Знайти корені рівняння $z^4-\sqrt{7}i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4+6x^3+14x^2+16x+8$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-3x^2-5$ від матриці $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 7 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 3 & -2 \\ -3 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & -5 & -1 \\ 1 & 4 & -5 & -8 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -3 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 5; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 6; \\ -5x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -8. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 - 11x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (2;1;3)$, $\vec{a}_2 = (1;-4;2)$, $\vec{a}_3 = (3;-2;5)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (-4;4;-7)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 15 \\ -1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}^n$ всіх векторів розмірності n множина U тих векторів, сума координат яких дорівнює нулю.

Варіант 5

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел

а) $\dfrac{5+3i}{1+3i}-i(3+2i)$; б) $(-1+\sqrt{3}i)^{26}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(2-i)x+(-5+2i)y=1-i$.

3. Знайти корені рівняння $z^4+\sqrt{3}i\cdot z=z$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4+x^3-2x^2+9x-9$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3+3x^2+x-4$ від матриці $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 4 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}5 & -2 & 0 & 7\\ 1 & -3 & 2 & 0\\ 2 & 5 & -1 & 4\\ -2 & 0 & 1 & -6\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}-2 & 1 & 8 & -1 & 0\\ 4 & -2 & 3 & 2 & -5\\ 1 & 6 & 0 & 3 & 2\\ 5 & 4 & -16 & 5 & 2\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$X\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & -5\\ 1 & 2 & -3\\ -3 & -4 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3 & -2\\ 0 & 7 & 3\\ -5 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8; \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 = -7. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0; \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; -4; -1)$, $\vec{a}_2 = (2; 1; 3)$, $\vec{a}_3 = (3; 6; 5)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (-4; 7; 1)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -5 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U всіх матриць, елементи яких є цілими числами.

Варіант 6

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел

а) $\dfrac{4-5i^3}{1+i}-3i(5+2i)$;   б) $(-\sqrt{3}-3i)^{36}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(5+i)x+(4-2i)y=ix-(2+i)y+4+i.$$

3. Знайти корені рівняння $z^3+5+5i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x)=2x^4-9x^3+9x^2+x-3$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-4x^2-2$ від матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & -6 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 3 & 8 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 4 \\ -3 & 5 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & -11 & 8 & 2 & -10 \\ 2 & -8 & 6 & 1 & -6 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1; \\ -x_1 + x_2 = -2; \\ -5x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 0; \\ -2x_1 + 5x_2 - 8x_3 - 6x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (-3; 3; 1)$, $\vec{a}_2 = (-8; 9; 3)$, $\vec{a}_3 = (1; -1; 0)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (1; -1; 2)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем $\mathbf{R}$ множина U всіх многочленів $f(x)$, які задовольняють рівність $f(1) + f(2) + f(3) = 0$.

Варіант 7

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел

а) $\dfrac{(1-5i)\cdot(2+i)}{-1+i}-i^7(4-3i)$; б) $(\sqrt{2}-\sqrt{6}i)^{30}$.

2. Знайти дійсні розв’язки рівняння $(2+i)x+(4-i)y=y+5i$.

3. Знайти корені рівняння $2z^4-5i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-3x^3+3x^2+x-6$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-5x^2+2x-3$ від матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 6 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -8 & 1 & -4 \\ -4 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -7 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 9; \\ -2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = -6; \\ 4x_1 - 8x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0; \\ 2x_1 - 4x_2 + 10x_3 + 8x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 + 8x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; 5; -1)$, $\vec{a}_2 = (0; -2; 1)$, $\vec{a}_3 = (-1; -1; 0)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (4; 0; 3)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}^n$ всіх векторів розмірності n множина U векторів, у яких всі координати рівні між собою.

Варіант 8

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел

а) $\dfrac{(1-6i)\cdot i^3}{-2+i}-(1-i)^2$; б) $(-2+2i)^{44}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(3-2i)x+(1+4i)y=5+6i$.

3. Знайти корені рівняння $2z^3+3\sqrt{3}-3i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-2x^3-x^2-10x+12$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-3x^2+3$ від матриці $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & 6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & -4 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & -10 & 6 & 9 \\ 0 & 7 & 8 & -2 & 11 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$X\cdot\begin{pmatrix} 2 & -7 & 6 \\ -2 & 6 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2; \\ -x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 4; \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 7x_4 = 0; \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; 3; 2)$, $\vec{a}_2 = (-1; -1; 0)$, $\vec{a}_3 = (2; -1; -9)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (1; 4; -3)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U всіх симетричних матриць.

Варіант 9

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } \frac{(2-i)\cdot i^3}{2+3i}+7-2i; \qquad \text{б) } (2\sqrt{3}-2i)^{30}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(5+i)^2x-y=(1+i)x+9i$.

3. Знайти корені рівняння $z^3+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-4x+3$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3+2x^2-3x+5$ від матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -3 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}4 & 2 & -3 & 0\\ 2 & 1 & -2 & -1\\ 1 & -4 & 2 & -3\\ -1 & 7 & 0 & 5\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}1 & -4 & -3 & 2 & 7\\ -2 & 1 & 0 & 3 & 4\\ 2 & 3 & -4 & 2 & -1\\ 3 & -1 & -7 & 4 & 6\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -5\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 9\\ 6 & -5\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -8; \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 5; \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 = -4. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \\ -x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 0; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (2; 1; -4)$, $\vec{a}_2 = (-1; 3; 1)$, $\vec{a}_3 = (2; 0; -1)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (-2; 7; -1)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}^n$ всіх векторів розмірності n множина U всіх векторів, у яких координати з непарними номерами рівні нулю.

Варіант 10

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } \frac{(3-i)\cdot i^5}{1-2i}-3+2i; \qquad \text{б) } (1-i)^{32}.$$

2. Знайти дійсні розв’язки рівняння

$$(1+4i)x+(5-2i)y=(3+i)x-(2+3i)y+3+7i.$$

3. Знайти корені рівняння $z^3+\sqrt{2}-\sqrt{6}i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-6x^3+13x^2-16x+12$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3+2x^2-4$ від матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 0 & -1 \\ 1 & 6 & 3 & -4 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & -4 & 2 & -6 & -1 \\ 6 & 5 & -1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -6 & -3 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 7x_3 = -4; \\ x_2 + 4x_3 = 1; \\ x_1 - 2x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \\ 4x_1 - x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (2; -1; 1)$, $\vec{b}_2 = (-1; 2; 5)$, $\vec{b}_3 = (4; 0; -3)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (1; -1; 11)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем $\mathbf{R}$ множина U тих многочленів, що не містить парних степенів змінної x.

Варіант 11

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $\dfrac{(1-3i)(2+i)}{3-i}+2i(2-i)$; б) $(-2\sqrt{3}+2i)^{36}$.

2. Знайти дійсні розв’язки рівняння

$$(1+3i)x+(2-i)^2 y=(-1-4i)i.$$

3. Знайти корені рівняння $3z^3+\sqrt{5}+\sqrt{5}i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4+x^3-12x^2+4x+16$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3+x^2-5x+2$ від матриці $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 3\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}3 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 5 & 7 & -1\\ -1 & -3 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -1 & 0\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}1 & -1 & 4 & 3 & 2\\ -2 & 3 & 2 & -1 & 0\\ 4 & 1 & -1 & 2 & 4\\ 3 & 3 & 5 & -4 & 6\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$X\cdot\begin{pmatrix}-1 & 4 & 5\\ 0 & -2 & -3\\ 1 & -3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 7\\ -3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -4; \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 5; \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -1. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0; \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0; \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; 2; -2)$, $\vec{a}_2 = (-2; 3; 1)$, $\vec{a}_3 = (1; -1; -3)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (-5; 10; 6)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -7 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}^n$ всіх векторів розмірності n множина U тих векторів, у яких координати є непарними цілими числами.

Варіант 12

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $\dfrac{3i+2i^6}{1-i}-5+2i$; б) $(-5+5i)^{24}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(2-i)^2x+(3-2i)y=-2i$.

3. Знайти корені рівняння $3z^3-\dfrac{1}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4+3x^3+6x^2+2x-12$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3+2x^2-7$ від матриці $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 4 & 1 & 6 & 2\\ 5 & -2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -2 & -3\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}3 & 1 & 5 & -4 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 10 & 9 & -1\\ 4 & -1 & 2 & 3 & 5 & 0\\ -3 & 2 & -1 & 7 & 4 & -1\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & -3\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -7; \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0; \\ -2x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 0; \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; -3; -1)$, $\vec{a}_2 = (-5; 2; 4)$, $\vec{a}_3 = (2; -1; -3)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $b = (-5; -3; 5)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U всіх матриць, визначник яких дорівнює нулю.

Варіант 13

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $(2-i)^2+\dfrac{3+2i}{1-2i}$; б) $(3\sqrt{3}-3i)^{30}$.

2. Знайти дійсні розв’язки рівняння

$$(2+i)x+(3-2i)y=(1-i)x+(4+i)y.$$

3. Знайти корені рівняння $3z^3+\sqrt{5}+\sqrt{15}i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-x^3+2x^2-5x+3$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-3x^2+5x+2$ від матриці $A=\begin{pmatrix}2 & -5 & 3\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}1 & 0 & -4 & 3\\ 3 & -2 & -2 & 1\\ 5 & 2 & 3 & -6\\ 2 & -1 & 0 & -3\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 1\\ -3 & -1 & 1 & 1 & -2 & -3\\ 2 & 3 & 4 & 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 2\\ 3 & 3 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + x_3 = -8; \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 = -5; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 12. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0; \\ -2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (-2; 1; 0)$, $\vec{a}_2 = (1; -7; 1)$, $\vec{a}_3 = (4; -2; 5)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (-5; -4; 1)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & -5 & 3 \\ -10 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U всіх нижніх трикутних матриць.

Варіант 14

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $\dfrac{2-i}{-1+3i}-2+5i^5$; б) $(\sqrt{5}-\sqrt{15}i)^{45}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(5+i)x-(1+i)y=-7-3i$.

3. Знайти корені рівняння $z^4+2=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4+2x^2-16x-15$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-2x^2-3$ від матриці $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}1 & 7 & 0 & 3\\ 4 & -2 & -1 & 3\\ 0 & 3 & 2 & -1\\ -2 & 5 & 1 & 0\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 2 & 6 & 0\\ 4 & -5 & 2 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 11 & -4 & 7 & 10 & -1\\ 2 & -8 & 3 & -5 & -4 & 1\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ -3 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5; \\ -x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -2; \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 7. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 - 7x_4 = 0; \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0; \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (3; 1; -1)$, $\vec{a}_2 = (-2; 0; 3)$, $\vec{a}_3 = (1; -1; 6)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (0; 4; 3)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем $\mathbf{R}$ множина U всіх многочленів непарного степеня.

Варіант 15

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $\dfrac{i^5(6-i)}{-2+i}-4+5i$; б) $(2\sqrt{3}-2i)^{90}$.

2. Знайти дійсні розв’язки рівняння $(1-2i)x-(4+2i)y=3+4i$.

3. Знайти корені рівняння $\sqrt{3}z^3+\sqrt{2}-\sqrt{2}i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-2x^3-x^2-4x+12$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3+5x^2-2x+3$ від матриці $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ -3 & -5 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 8 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -5 & 10 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5; \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3; \\ 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 10. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + x_3 - 4x_4 = 0; \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (4; 1; -1)$, $\vec{a}_2 = (-1; 0; 1)$, $\vec{a}_3 = (-2; 3; 1)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (9; 0; 1)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем $\mathbf{R}$ множина U всіх многочленів $f(x)$, які задовольняють рівність $2 \cdot f(1) + 3 \cdot f(2) = 0$.

Варіант 16

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $\dfrac{(1+2i)^2}{3-i}-2+i$; б) $(3-\sqrt{3}i)^{90}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(-4+i)x+(3-2i)y=-7+3i.$$

3. Знайти корені рівняння $z^4-2\sqrt{3}z^2+4=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x)=3x^4-8x^3-3x^2+12x+4$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-5x^2-1$ від матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & -1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}-2 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 6 & -1 & 3\\ 1 & -3 & 2 & 7\\ 3 & 1 & 0 & -5\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}6 & 2 & 8 & -1 & 0 & -3\\ 1 & -2 & 2 & 1 & -1 & -3\\ 3 & 8 & 2 & -4 & 3 & 6\\ 4 & 6 & 4 & -3 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -3; \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = -9; \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (-1; 3; 1)$, $\vec{a}_2 = (3; -2; -1)$, $\vec{a}_3 = (1; 0; 4)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (-3; 3; -7)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U всіх діагональних матриць.

Варіант 17

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $5-3i+\dfrac{i^3(2-i)}{2+i}$; б) $(-\sqrt{21}+\sqrt{7}i)^{90}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(5-2i)x+(1+4i)y=7+6i$.

3. Знайти корені рівняння $z^5+2+2i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-2x^3-4x^2+5x-6$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-5x^2+2x-7$ від матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}3 & 2 & -1 & 0\\ -1 & 5 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 0 & 4\\ -7 & 0 & 1 & 8\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}-5 & -2 & -1 & 1 & 0 & -2\\ 6 & -1 & 3 & -3 & 1 & -4\\ 1 & -3 & 2 & -2 & 1 & -6\\ 2 & 0 & 3 & 5 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$X\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & -6\\ 1 & 0 & -3\\ -3 & 1 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ -2 & 1 & -1\\ 5 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -4; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 0; \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (-2; 2; -1)$, $\vec{a}_2 = (4; 5; 6)$, $\vec{a}_3 = (-1; -3; -2)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (-8; 7; -5)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем $\mathbf{R}$ множина U тих многочленів, для яких дане число $a \in \mathbf{R}$ буде коренем.

Варіант 18

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $(2-3i)^2+\dfrac{(5-6i)}{4+2i}-i^5$; б) $(-6+6i)^{96}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(7-i)x+(-2+4i)y=11+x$.

3. Знайти корені рівняння $2x^6+3i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-3x^3+x^2+4$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3+4x^2-6$ від матриці $A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 6 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 7 & 4 & 1 & -9 \\ -3 & -2 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 6; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0; \\ -4x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (5;-1;2)$, $\vec{a}_2 = (-1;2;-4)$, $\vec{a}_3 = (-3;2;-2)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (-2;1;4)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}^n$ всіх векторів розміру n множина U тих векторів, координати яких є парними цілими числами.

Варіант 19

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $\dfrac{(1-3i)^2}{2+i}-1-i^5$; б) $(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^{28}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $x+(-1+3i)y=1-6i$.

3. Знайти корені рівняння $2z^3+\sqrt{15}i-\sqrt{5}=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4+7x^3+18x^2+22x+12$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3+2x^2+5x-6$ від матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 7 & 3\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}5 & 3 & -2 & 1\\ 3 & 0 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 4 & -3\\ -3 & 1 & 3 & 2\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3 & -4 & -1 & 2\\ -1 & 4 & 0 & -3 & 4 & 0\\ 4 & -2 & -6 & 8 & 2 & -4\\ -3 & 5 & 3 & -7 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix}3 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 0\\ -3 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\\ -3 & 1\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 3; \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = -4; \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0; \\ 7x_1 + x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (-1; 0; 4)$, $\vec{a}_2 = (2; -3; -1)$, $\vec{a}_3 = (1; -1; 6)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (3; -8; -1)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & -9 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}^n$ всіх векторів розмірності n множина U тих векторів, у яких співпадає перша і остання координата.

Варіант 20

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $(2-i)^2 + \frac{4+i}{1-2i}$; б) $(-\sqrt{6}-\sqrt{2}i)^{90}$.

2. Знайти дійсні розв’язки рівняння $(3-2i)x+(1+4i)y=5+6i$.

3. Знайти корені рівняння $z^6-3=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4+2x^2-7x-10$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-5x^2+4$ від матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \\ -7 & 0 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 & 2 & 7 & -2 \\ 1 & -3 & 3 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & -6 & 1 & -4 & -4 \\ -3 & 2 & -4 & -1 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & -9 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2; \\ -x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1; \\ 4x_1 - 9x_2 + 7x_3 = -6. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 0; \\ -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 0; \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (3;-2;1)$, $\vec{a}_2 = (-8;3;-1)$, $\vec{a}_3 = (1;4;2)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (-2;-8;1)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина всіх тих матриць, в яких сума елементів по діагоналі дорівнює 0.

Варіант 21

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } \frac{6+i}{-1-2i}+\frac{4+5i}{i}; \qquad \text{б) } (-\sqrt{15}+\sqrt{5}i)^{90}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(6-i)x+(3+2i)y=x-13i+13.$$

3. Знайти корені рівняння $7x^3+\sqrt{18}i-\sqrt{6}=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-6x^3-3x^2+20x-12$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3+3x^2-x+8$ від матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -5 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 7 & 5 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & -4 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & -6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -5; \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -8; \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 12. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} -3x_1 - 8x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 0; \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\bar{a}_1 = (1;-2;-1)$, $\bar{a}_2 = (3;-1;1)$, $\bar{a}_3 = (-1;-4;2)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (11;3;9)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 6 & 2 & -3 \\ -6 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем $\mathbf{R}$ множина U тих многочленів, що задовольняють рівність $f(4) + f(5) = 0$.

Варіант 22

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $(1+3i)(3-2i)+\dfrac{2i(4+3i)}{1+2i}$; б) $(-\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^{40}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(3+5i)x+(1-2i)y=(3-4i)\cdot i.$$

3. Знайти корені рівняння $\sqrt{3}z^4+6=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-18$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-2x^2-4$ від матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -5\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}2 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 3 & -7\\ 4 & 2 & 1 & -1\\ 1 & -6 & 5 & 3\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}3 & 2 & -1 & 4 & 6\\ 2 & 1 & -1 & 0 & -2\\ -3 & 5 & -6 & 7 & 2\\ 4 & -2 & 4 & -3 & 6\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3 & -7\\ 1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1; \\ -4x_1 + x_2 + 3x_3 = -9; \\ x_1 - 2x_2 - 6x_3 = -3. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 0; \\ -3x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (2;-1;1)$, $\vec{a}_2 = (-1;1;3)$, $\vec{a}_3 = (0;5;-2)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (10;-1;-4)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 2 & -1 & -8 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}^n$ всіх векторів розміру n множина U тих векторів, у яких перша і остання координата дорівнюють нулю.

Варіант 23

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $\dfrac{(2-i)(1+i)}{-3+i}-i^3(1-i)$; б) $(-2\sqrt{3}+2i)^{40}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(5-2i)x+(1+4i)y=7+6i$.

3. Знайти корені рівняння $\sqrt{3}z^3+3\sqrt{2}-3\sqrt{6}i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-3x^3-2x^2+2x+12$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-3x^2+2x-5$ від матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}-3 & 3 & 1 & -4\\ 5 & -1 & 2 & 6\\ -1 & 3 & 0 & -3\\ 6 & 1 & -2 & 0\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}2 & 1 & -3 & 5 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 6 & -1 & 0 & 4\\ 1 & -4 & 9 & -6 & 1 & 2\\ 7 & -1 & 0 & 9 & -2 & 8\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$X\cdot\begin{pmatrix}2 & -7 & 4\\ -1 & 3 & -2\\ 2 & -6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -4\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2; \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -6; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 0; \\ -5x_1 + x_3 - 4x_4 = 0; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; 0; 3)$, $\vec{a}_2 = (-2; 2; -1)$, $\vec{a}_3 = (3; 6; 2)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (-2; -6; 1)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U тих матриць, діагональні елементи яких дорівнюють нулю.

Варіант 24

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $i^3(1+2i)-\dfrac{2+3i}{1-2i}$; б) $(3-\sqrt{3})^{60}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(1+3i)x+(2-2i)^2 y=(-1-4i).$$

3. Знайти корені рівняння $3x^3+\sqrt{2}+\sqrt{2}i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4+x^3-6x^2-15x-9$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-5x^2+2$ від матриці $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & -6 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 8 & -5 & -7 \\ -8 & -4 & 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_3 = -10; \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 5; \\ 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -6. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 0; \\ 2x_1 + 2x_2 + 13x_3 - 8x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (2; 1; -1)$, $\vec{a}_2 = (-2; -3; 2)$, $\vec{a}_3 = (1; -1; 4)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (6; -2; 7)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 10 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем $\mathbf{R}$ множина U тих многочленів, що не містять парних степенів змінної x.

Варіант 25

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $3i^3(5+2i)-\frac{4-5i}{1-i}$; б) $(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^{60}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(-4+i)x+(3-2i)y=-7+3i.$$

3. Знайти корені рівняння $\sqrt{5}z^5-2=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-3x^3+4x^2-12x+16$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-3x^2-x+5$ від матриці $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 5\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}8 & 2 & -7 & 3\\ 1 & -4 & 2 & 1\\ -7 & 1 & 0 & 5\\ 1 & 2 & -3 & 2\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & -2 & 1\\ 2 & -2 & 1 & -1 & 0\\ -3 & -1 & -5 & 3 & -1\\ 1 & -5 & -3 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix}-1 & 3 & -4\\ 1 & -4 & 5\\ 1 & -3 & 3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ 0 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -9; \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0; \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0; \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1;-2;3)$, $\vec{a}_2 = (0;4;1)$, $\vec{a}_3 = (1;1;-2)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (4;-7;-5)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U всіх матриць, координати яких є парними натуральними числами.

Варіант 26

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } \frac{5+2i}{3-i} - i^3(2-3i); \qquad \text{б) } (2\sqrt{2}+2\sqrt{6}i)^{60}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(3+5i)x + (1-2i)y = (3-4i)i.$$

3. Знайти корені рівняння $z^3 + \sqrt{3}i = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 + x^2 - 3$ від матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -5 & 1 \\ 4 & -1 & -2 & -6 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & 0 & 11 & 7 & -6 \\ 2 & -3 & 1 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$X \cdot \begin{pmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 7; \\ -4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0; \\ 2x_1 + 6x_2 - 6x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (4;-1;0)$, $\vec{a}_2 = (1;3;2)$, $\vec{a}_3 = (-2;-1;-5)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (2;8;-7)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -6 \\ 1 & -8 & 7 \\ 0 & -9 & 7 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}^n$ всіх векторів розміру n множина U тих векторів, у яких координати з парними номерами дорівнюють нулю.

Варіант 27

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $\dfrac{(1+3i)(2-i)}{3+i}-i^6(5+6i)$; б) $(3\sqrt{3}-3i)^{72}$.

2. Знайти дійсні розв’язки рівняння

$$(3+i)^2x+(1-4i)y=15+16i.$$

3. Знайти корені рівняння $5x^3+\sqrt{7}-\sqrt{7}i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4+x^3-6x^2-14x-12$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-3x^2+7$ від матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 3 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}5 & 1 & -2 & 3\\ -1 & 4 & 3 & 2\\ 1 & 6 & 2 & 1\\ 2 & -3 & -1 & 3\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}3 & -2 & 1 & 5 & -2\\ 7 & 6 & -4 & 2 & 3\\ -1 & -10 & 6 & 8 & 3\\ 4 & 8 & -5 & -3 & -5\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -10; \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -14; \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 9. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0; \\ 6x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 0; \\ 5x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; 2; 3)$, $\vec{a}_2 = (-6; 4; 1)$, $\vec{a}_3 = (5; -1; 4)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (-1; -3; 2)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -15 \\ 0 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U діагональних матриць, сума елементів яких дорівнює числу 10.

Варіант 28

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $(3-i)^2+\dfrac{1-7i^3}{4+2i}$; б) $(-\sqrt{21}-\sqrt{7}i)^{48}$.

2. Знайти дійсні розв’язки рівняння $(1-i)x+(3+4i)y=-3-11i$.

3. Знайти корені рівняння $7z^4-\sqrt{6}+\sqrt{3}i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-2x^3-14x+15$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3+4x^2-3$ від матриці $A=\begin{pmatrix}0 & 5 & -1\\ 3 & 1 & 3\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}2 & -7 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -4 & 1\\ -5 & 0 & 3 & -6\\ 1 & 2 & 1 & 3\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}4 & -2 & 3 & 1 & 5\\ 2 & -5 & 4 & 11 & -5\\ 3 & 3 & 6 & 8 & -1\\ -5 & 2 & 2 & -3 & 4\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix}5 & -2 & 0\\ -7 & 6 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 6 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -5; \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = -7; \\ -3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 12. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0; \\ -4x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (3; 1; -1)$, $\vec{a}_2 = (-3; -2; 5)$, $\vec{a}_3 = (1; 2; 1)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (4; -8; -4)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U всіх нижніх трикутних матриць, елементи яких є цілими числами.

Варіант 29

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $\dfrac{3-i}{4+5i}-(3+2i)\cdot i^7$; б) $(-\sqrt{7}+\sqrt{21}i)^{90}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(3-i)x-(1+2i)y=(9i-4)i.$$

3. Знайти корені рівняння $5z^3+\sqrt{3}i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4+x^3-2x^2-4x-8$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3+2x^2+4x-7$ від матриці $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 6 \\ -7 & 1 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 7 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 9 & 1 & -3 \\ -2 & 10 & -11 & 12 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & 1 & 6 & 2 & -7 \\ 3 & -8 & 6 & -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & -7 & 6 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 3; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0; \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 4x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 1x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (2; 1; 3)$, $\vec{a}_2 = (-3; 4; -6)$, $\vec{a}_3 = (2; -1; 1)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (2; 6; -6)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем $\mathbf{R}$ множина U тих многочленів, що не містять непарних степенів змінної x.

Варіант 30

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $\dfrac{3-2i^3}{4-3i}-i(3+2i)$;   б) $(2\sqrt{3}+2i)^{90}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(1-i)x+(2+i)y=-1+3i$.

3. Знайти корені рівняння $2x^5-\sqrt{5}=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-x^3+4x-16$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-5x^2+4$ від матриці $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}2 & 5 & -8 & 3\\ -3 & 1 & 4 & 2\\ 2 & 3 & -6 & 1\\ 6 & 0 & 3 & -7\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}-1 & -3 & -4 & 2 & -6\\ 4 & 3 & -2 & 7 & 2\\ 1 & 5 & 2 & -3 & 1\\ -3 & 2 & 6 & -8 & 4\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3 & -2\\ 3 & -5 & 3\\ 4 & -6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 5 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -9; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 8; \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 6x_2 - 7x_3 - 3x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (3; 1; 3)$, $\vec{a}_2 = (-1; 2; -5)$, $\vec{a}_3 = (-3; 1; -1)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (-7; 8; -3)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \\ -9 & -8 & 3 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U всіх верхніх трикутних матриць, елементи яких є цілими числами.

Навчально-методичне видання

Лінійна алгебра

Методичні вказівки та самостійні завдання
з вищої математики
для студентів 1-го курсу
всіх напрямків підготовки

Укладачі: БОНДАРЕНКО Наталія В'ячеславівна
БОНДАРЕНКО Євген Володимирович
ПАСТУХОВА Марина Семенівна

Комп'ютерна верстка А.П. Морозюк

Підписано до друку . Формат $60 \times 84_{1/16}$
Ум. друк. арк. 2,32. Обл.-вид. акр. 2,5.
Тираж 100 прим. Вид. № . Зам. № .

КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31, Київ-680, 03680

Віддруковано в редакційно-видавничому відділі
Київського національного університету будівництва і архітектури

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.