Практичне заняття №4

Властивості відношень. Операції над відношеннями.

Перед тим, як розпочати вивчення нової теми, ще раз розглянемо приклади на тему «Операції над множинами» **.** Отже: Спростити вираз.

- $\overline{A \cup \overline{\overline{B}}}$.

  Рішення. Використовуючи закони де Моргана, отримаємо:

  $\overline{A \cup \overline{\overline{B}}} = \overline{A} \cap \overline{\overline{\overline{B}}} = \overline{A} \cap B$.

- $\overline{\overline{\left(A \cup \overline{B}\right)} \cup \overline{A}}$.

  Рішення. Вираз у внутрішніх дужках вже спрощене в попередній частині прикладу. Підставляємо його і далі, використовуючи закони де Моргана, закон подвійного заперечення і закон поглинання, отримуємо:

  $$\overline{\overline{\left(A \cup \overline{B}\right)} \cup \overline{A}} = \overline{\left(\overline{A} \cap B\right)} \cap A =$$

  $$= \left(\overline{\overline{A}} \cup \overline{B}\right) \cap A = \left(A \cup \overline{B}\right) \cap A = A.$$

- $\overline{\left(\overline{A} \cap \overline{\left(\overline{A} \cup C\right)}\right) \cap \overline{D}}$.

  Рішення. Спростимо вираз у перших внутрішніх дужках, використовуючи закони де Моргана і закон про подвійне заперечення:

  $$\overline{\overline{A} \cap \overline{\left(\overline{A} \cup C\right)}} = \overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{\left(\overline{A} \cup C\right)}} =$$

  $$= A \cup \left(\overline{A} \cup C\right) = \left(A \cup \overline{A}\right) \cup C = U$$

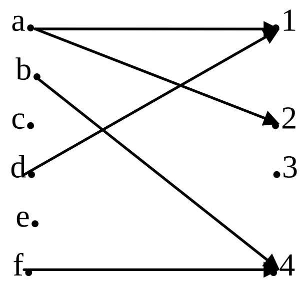
  З цього, використовуючи закони про універсум, порожню множину і подвійне заперечення, отримаємо:

  $$\overline{U \cap \overline{D}} = \overline{U} \cup D = \varnothing \cup D = D$$

Операції над відношеннями.

Над відношеннями можна виконувати усі теоретико-множинні операції. Крім того, над відношеннями визначені операції знаходження оберненого відношення та композиції відношень.

Бінарне відношення $R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$, визначене на множинах B та A, називається ***оберненим*** до відношення $R \subseteq A \times B$. Наприклад, для відношення, діаграма якого наведена на рис.,

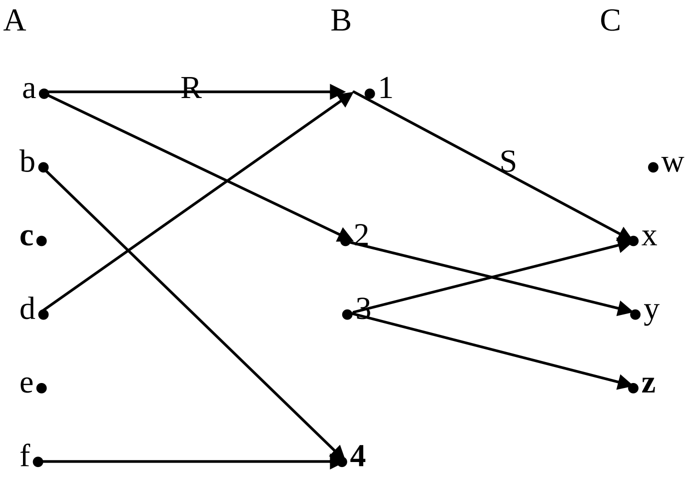


Граф відношення R

$R^{-1} = \{(1,a),(2,a),(1,d),(4,b),(4,f)\}$

Бінарне відношення $S \circ R = \{(x,z) \mid \textit{існуєтакий}\, y \in B, \textit{що}\, (x,y) \in R, (y,z) \in S\} \subseteq A \times C$ на зивається ***добутком*** **(композицією)** відношень $R \subseteq A \times B$ та $S \subseteq B \times C$.

Наприклад, для відношень *R* та *S*, зображених на рис. $S \circ R = \{(a,x),(a,y)\}$.



Приклад 2.1. Нехай $A = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B = \{23,24,25,26,27\}$, $C = \{a,b,c,d,e,f\}$, бінарне відношення *R* визначене на множинах *A* та *B* наступним чином: тоді і тільки тоді, коли *y* націло ділиться на *x*, xRy, $S = \{(23,f),(24,b),(25,d),(26,d),(27,a),(27,e)\} \subseteq B \times C$.
Знайти першу та другу проекції бінарного відношення та вказати $T = S \bullet R$ та вказати $T^{-1}[\{a,c,d,f\}]$.

Розв'язок .
Задамо бінарне відношення *R* переліком елементів, які перебувають у цьому відношенні:
$R = \{(2,24),(2,26),(3,24),(3,27),(4,24),(5,25),(6,24),(8,24),(9,27)\}$, тоді
$T = \{(2,b),(2,d),(3,b),(3,a),(3,e),(4,b),(5,d),(6,b),(8,b),(9,a),(9,e)\}$. Тому $\Pr_1 T = \{2,3,4,5,6,8,9\}$;
$\Pr_2 T = \{a,b,d,e\}$. Вкажемо перелік елементів відношення T^{-1}:
$T^{-1} = \{(b,2),(d,2),(b,3),(a,3),(e,3),(b,4),(d,5),(b,6),(b.8),(a,9),(e,9)\}$. Тоді $T^{-1}[\{a,c,d,f\}] = \{2,3,5,9\}$

Властивості однорідних бінарних відношень.
Надалі будемо розглядати лише **однорідні бінарні відношення**.
Бінарне відношення $\{(a,a) \mid a \in A\}$ називається ***відношенням ідентичності*** на множині *A*.
Бінарне відношення *R* на множині *A* називається ***рефлексивним***, якщо для кожного $x \in R$ має місце *xRx*, тобто кожний елемент множини *A* перебуває у відношенні *R* сам із собою.
Бінарне відношення *R* на множині *A* називається ***антирефлексивним***, якщо для жодного $x \in R$ не має місце *xRx*.
Бінарне відношення *R* на множині *A* називається ***симетричним***, якщо з того, що *xRy* випливає, що *yRx* . Умова $R^{-1} = R$ може використовуватися у якості критерію симетричності.
Бінарне відношення *R* на множині *A* називається ***асиметричним,*** якщо з того, що *xRy* випливає, що не виконується *yRx* . Умова $R^{-1} \cap R = \varnothing$ може використовуватися у якості критерію асиметричності.
Бінарне відношення *R* на множині *A* називається ***антисиметричним***, якщо з того, що $x \neq y$ та *xRy* випливає, що не виконується *yRx* . Умова $R^{-1} \cap R \subseteq I_A$ може використовуватися у якості критерію антисиметричності.
Бінарне відношення *R* називається ***транзитивним*** на множині *A*, якщо з того, що *xRy* та *yRz* випливає, що *xRz* . Умова $R^2 \subseteq R$ може використовуватися у якості критерію транзитивності.

Бінарне відношення R називається ***лінійним*** на множині A, якщо для довільних відмінних один від одного $a \in A$, $b \in B$ хоча би одна із пар (a,b) , (b,a) є елементом відношення R.

Замиканням бінарного відношення R за властивістю P називається таке мінімальне за числом елементів бінарне відношення $[R]_p$, яке містить у собі відношення R і задовольняє властивість P.

Приклад 2.2. На множині $A = \{1,2,3,4\}$ задано відношення:

$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$**;**

$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$**;**

$R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$**;**

$R_4 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$**;**

$R_5 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$**;**

$R_6 = \{(3,4)\}$**.** Визначити, які з цих відношень (а) рефлексивні; (б) анти рефлексивні; (в) симетричні; (г) антисиметричні; (д) транзитивні.

Рішення. R_3 і R_5 - рефлексивні, оскільки вони містять всі пари вигляду (a,a), тобто (1,1),(2,2),(3,3),(4,4). Всі інші не є рефлексивними. R_1, R_2, R_4, R_6 не містять пару (3,3).
Відношення R_2, R_3 - симетричні. В R_2 є пари (1,2) і (2,1). В R_3 є пари (1,2),(2,1),(1,4),(4,1).
Відношення R_4, R_5 - антисиметричні, бо є пари (c1, c1) і немає пар (c1, c2), (c2, c1).
Відношення R_6 - асиметричне, бо
Якщо із c1*R*c2 не виконується c2*R*c1, то відношення R називають *асиметричним*.

Властивості симетричності і анти симетричності не є антагоністичними. Відношення $R = \varnothing$
На множині $A = \{a\}$ одночасно і симетричне і антисиметричне.

R_1 не має властивостей ані симетричності, ані анти симетричності.

Асиметричне відношення є і антисиметричним. Обернене твердження неправильним. Відношення R_5 є антисиметричним відношенням, але не є асиметричним, бо містить пару (1,1).

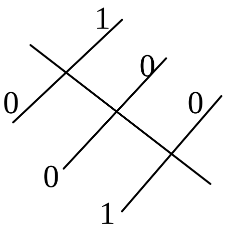
R_4, R_5, R_6 - транзитивні. R_1, R_2, R_3 - не транзитивні, бо $(3,4) \in R_1; (4,1) \in R_1$, але $(3,1) \notin R_1$; $(2,1) \in R_2; (1,2) \in R_2$ але $(2,2) \notin R_2$; $(2,1) \in R_3$; $(1,4) \in R_3$; але $(2,4) \notin R_3$.

Відношення R на множині A називають ***іррефлексивним,*** якщо для будь-якого $a \in A$ $(a,a) \notin R$/

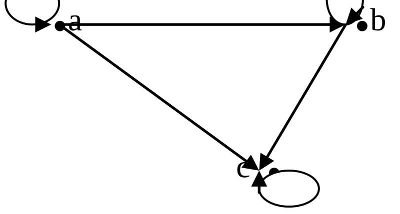
R_4, R_6 - іррефлекствні; R_1, R_2 - не рефлексивні і не іррефлексивні.

Якщо відношення рефлексивне, то на головній діагоналі матриці відношення будуть знаходитися «1», якщо іррефлексивне, то на головній діагоналі – «0».

Матриця симетричного відношення симетрична відносно головної діагоналі. Матриця антисиметричного відношення має наступну властивість: якщо $i \neq j$, то з $m_{i,j} = 1$ випливає $m_{j,i} = 0$.



Граф рефлексивного відношення має петлю в кожній вершині, в графі транзитивного відношення в разі наявності пари дуг (a,b) (b,c) існує дуга (a,c).

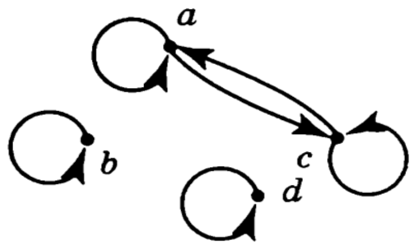


Відношення еквівалентності

Бінарне відношення називається відношенням ***еквівалентності*** на множині A, якщо воно є рефлексивним, симетричним та транзитивним.

Бінарне відношення еквівалентності *розбиває* множину A на множини, які не мають спільного перетину (***класи еквівалентності***).

Граф відношення еквівалентності $R=\{(a,a),(a,c),(b,b),(c,a),(c,c),(d,d)\}$ наведено на рис. (у випадку однорідних відношень кожний елемент множини, на якій визначене відношення, достатньо зображати один раз).



Приклад 2.3. Визначити, які з наступних бінарних відношень є відношеннями еквівалентності, та вказати для них класи еквівалентності:

а) перпендикулярність площин у просторі;

б) відношення "бути однакового зросту" на множині людей;

в) відношення "знаходитися один від одного на відстані не меншій за 100" на площині;

г) відношення "бути родичем" на множині людей (вважаємо, що людина є родичем сама собі, а дві людини є родичами, якщо одна з них є нащадком іншої, або вони мають спільного предка).

Розв'язок .

а) Відношення перпендикулярності площин не є відношенням еквівалентності, оскільки воно не є рефлексивним.

б) Відношення "бути однакового зросту" на множині людей є відношенням еквівалентності. Рефлексивність, очевидно, справджується, оскільки відношення рівності чисел є рефлексивним.

Симетричність також виконується по тій самій причині.

Для перевірки транзитивності досить пересвідчитися у транзитивності відношення рівності чисел.

Якщо вважати, що зріст вимірюється у сантиметрах, то класом еквівалентності, який відповідає числу k, є множина людей зросту k см.

в) Відношення не є відношенням еквівалентності, оскільки не виконується умова транзитивності. Для того, щоб пересвідчитися у цьому досить розглянути вершини рівнобедреного трикутника з бічною стороною 100 та основою 50. Відстані від кінців основи до вершини задовольняють умову, а довжина основи — не задовольняє.

г) Відношення не є відношенням еквівалентності.

Рефлексивність та симетричність випливають із означення. Покажемо, що транзитивність не виконуються. Нехай різні особи А та В є родичами і нехай В та С також є родичами, причому А предок В по батьківській лінії, а С — предок В по материнській лінії. Тоді жоден із людей А та С не є родичем іншого. Отже, транзитивність не виконується.

Приклад 2.4. Перевірити, чи є визначене на множині $A=\{x,y,z,t,u,v,w\}$ бінарне відношення $R=\{(u,x),(u,u).(y,z),(w,w),(y,y),(z,y),(z,z),(z,w),(y,w),(x,u).(w,y),(w,z),(x,x),(v,v),(t,t)\}$, відношенням еквівалентності. Якщо так, то вказати фактор-множину A/R.

Розв'язок .

Оскільки $I_A \subseteq R$, то відношення R є рефлексивним.

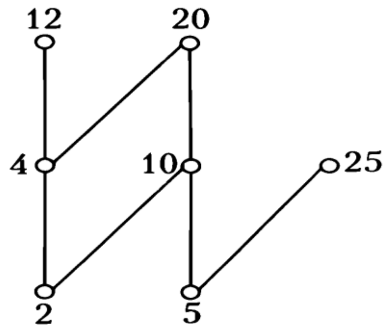
Для перевірки симетричності знайдемо обернене відношення:
$R^{-1}=\{(x,u),(u,u),(z,y),)w,w),(y,y),(y,z),(z,z),(w,z),(w,y),(u,x),(y,w),(z,w),(x,x),(y,y),(t,t)\}$. Легко переконатися, що , $R^{-1}=R$ а отже, відношення R є симетричним.

Для перевірки транзитивності знайдемо другу степінь відношення R:
$R^2=\{(x,x),(x,u),(y,y),(y,z),(y,w),(z,y),(z,z),(z,w),(t,t),(u,x),(u,u),(v,v),(w,y),(w,z),(w,w)\}$.

Нескладно перевірити, що $R^2 = R$. Тому відношення R є транзитивним.
Отже, бінарне відношення R є відношенням еквівалентності. Знайдемо тепер класи еквівалентності. Для цього потрібно вказати одноелементні зрізи відношення R.
$R[x]=\{x,u\}; R[y]=\{y,z,w\}; R[z]=\{y,z,w\}: R[t]=\{t\}" R[u]=\{x,u\}: R[v]=\{v\}" R[w]=\{y,z,w\}$. Отже,
$A \setminus R = \{\{x,u\},\{y,z,w\},\{t\},\{v\}\}$.

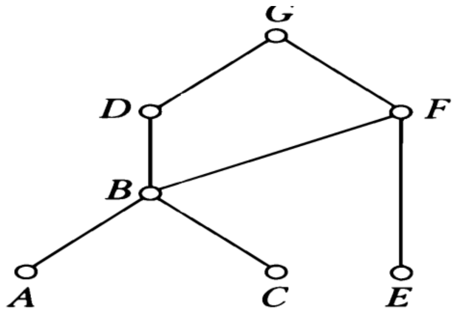
Відношення порядку

Бінарне відношення R називається ***відношенням порядку (порядком) на множині А***, якщо воно є антисиметричним та транзитивним. Пара (A,R) називається ***впорядкованою множиною***. Якщо a та b — елементи впорядкованої множини (A,R) і виконується умова aRb, то кажуть, що елемент a передує елементу b.
Якщо порядок є рефлексивним, то він називається ***частковим (нестрогим)*** **порядком.** Прикладом є відношення "$\le$" на множині дійсних чисел.
Антирефлексивний порядок називається ***строгим порядком***. Прикладом є відношення "$\subset$" (відношення строгого включення множин). Відношення R є строгим порядком тоді і тільки тоді, коли воно є одночасно асиметричним і транзитивним.
Якщо R — відношення строгого порядку на множині A, то відношення A $R' = R \cup I$ називається відношенням часткового порядку, відповідним відношенню R.
Відношення порядку, яке є лінійним, називається відношенням ***лінійного*** порядку.
Прикладом строгого лінійного порядку є відношення ">" на числовій множині.
Відношення часткового порядку на скінченній множині зручно задавати за допомогою діаграм Хассе. При цьому кожний елемент з'єднується відрізками з усіма його "безпосередніми попередниками" і розташовується на діаграмі вище за них.
На рис. зображено діаграму Хассе для відношення подільності ($(x, y) \in R$ тоді і тільки тоді, коли число x є дільником числа y) на множині $\{2,4,5,10,12,20,25\}$.



Діаграма Хассе для відношення подільності на множині $\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$

Елемент a називається ***мінімальним елементом*** впорядкованої множини (A,R), якщо не існує такого елемента $b \in A$, що виконуються умови $b \neq a$ і bRa.
Аналогічно дається означення ***максимального елемента*** впорядкованої множини.
Для відношення подільності із діаграмою на рис. елементи 2 та 5 є мінімальними, а елементи 12, 20 та 25 — максимальними.
Елемент a називається ***найменшим елементом*** впорядкованої множини (A,R), якщо для довільного елемента $b \in A$ $(a,b) \in R$.
Аналогічно дається означення ***найбільшого елемента*** впорядкованої множини.
Найбільший, найменший, максимальні та мінімальні елементи називають ***екстремальними елементами*** впорядкованої множини.
Для часткового впорядкованої множини, діаграма якої наведена на рис., елемент G буде найбільшим, а найменшого елемента взагалі не існує (елементи A, C та E — мінімальні, але не найменші, оскільки жодний із них не передує двом іншим).



Діаграма Хассе для відношення часткового порядку

Елемент a впорядкованої множини (A,R) називається ***нижньою гранню множини*** $M \subseteq A$, якщо для усіх елементів $b \in M$ виконується умова aRb.

Аналогічно дається означення верхньої грані.

Найбільша нижня грань множини (якщо вона існує) називається ***точною нижньою гранню*** множини M і позначається $\inf M$.

Точна верхня грань (найменша верхня грань) множини M позначається $\sup M$.

Так, наприклад для відношення, діаграма якого наведена на рис. 10, $\sup\{D,E\} = G$, $\inf\{D,F\} = B$, а $\inf\{B,E\}$ не існує.

Частково впорядкована множина (A,R) називається ґраткою, якщо для довільних $a \in A$, $b \in A$ існують $\inf\{a,b\}$ та $\sup\{a,b\}$.

Приклад 2.5. Перевірити, чи є бінарне відношення $R = \{(b,d),(a,e),(a,b),(a,d),(c,d),(b,c),(a,c)\}$ відношенням часткового порядку на множині $A = \{a,b,c,d,e\}$.

Якщо так, то зобразити діаграму Хассе впорядкованої множини (A,R), відшукати її екстремальні елементи та перевірити, чи є впорядкована множина (A,R) ґраткою. Крім того, знайти $\inf\{b,c\}$ та $\sup\{b,c\}$.

Розв’язок .

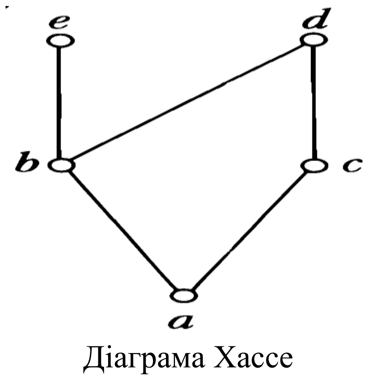
Відношення R є рефлексивним. Перевіримо, чи є воно антисиметричним. Знайдемо обернене йому відношення $R^{-1} = \{(d,b),(e,a),(b,a),(d,a),(d,c),(c,b),(c,a)\}$. Тоді $R^{-1} \cap R = I_A$, а, отже, відношення R є антисиметричним. Перевіримо транзитивність.

$R^2 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,b),(b,d),(b,e\},(c,c),(c,d),(d,d),(e,e)\} = R.$

Тому відношення R є транзитивним.

Отже, відношення R є відношенням часткового порядку.

Зобразимо діаграму Хассе частково впорядкованої множини (A,R) . Відповідна діаграма наведена на рис.



Діаграма Хассе

З діаграми Хассе видно, що елемент a є найменшим елементом впорядкованої множини (A,R) , а, отже, єдиним мінімальним елементом.

Елементи e та d — максимальні елементи впорядкованої множини (A,R) , а найбільший елемент не існує.

Оскільки $\sup\{e,d\}$ не існує, то впорядкована множина (A,R) не є ґраткою.

Нарешті, з діаграми Хассе видно, що $\inf\{b,c\} = a$, $\sup\{b,c\} = d$.

Здачі і вправи

1. З використанням властивостей операцій довести, що у алгебрі множин виконуються наступні рівності:

$\overline{\overline{A} \cup B \cup (C \setminus A)} = A \setminus B$; $(A \oplus (A \cap \overline{B})) \cap (\overline{B} \oplus \overline{C}) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ /

2. Нехай задано множини $A = \{a,b,c,d\}; B = \{1,2,3,4,5\}: G = \{\alpha,\beta,\gamma\}$, відповідності між А і И:
   $C_1 = \{(a,2),(a,3),(b,1),(c,4),(c,5),(d,2),(d,3\}$;
   $C_2 = \{(b,3),(b,5),(c,1),(c,4),(d,1),(d,4),(d,5)\}$ і відповідності між В і G:
   $D_1 = \{(1,\beta),(1,\gamma),(2,\alpha)(2,\gamma),(3,\gamma),(5,\alpha),(5,\beta)\}$;
   $D_2 = \{(1,\alpha),(2,\alpha),(2,\beta),(3,\alpha),(4,\alpha),(4,\gamma)\}$. Визначити (а) $C_i \circ D_j, i, j = 1,2$
   (б) $C_i \circ C_j^{-1}, i, j = 1,2$ (в) $C_2 \circ (D_1 \circ D_2^{-1})$.

3. На множині $M = \{1,2,3,4\}$ задано відношення
   $R_1 = \{(1,1)(1,3),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(4,2),(4,4)\}$;
   $R_2 = \{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,3),(4,1),(4,4)\}$;
   $R_3 = \{(1,3),(1,4),(2,1),(1,2),(3,1),(3,3),(4,1)\}$;
   $R_4 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$;
   $R_5 = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(4,1),(4,3)\}$. Визначити, які з цих відношень
   (а) рефлексивні; (в) симетричні; (д) транзитивні;
   (б) антирефлексивні; (г) антисиметричні; (е) толерантні.

Відношення R на множині M називається ***толерантним***, якщо воно рефлексивне і симетричне.

4. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Чи є відношення еквівалентним?
$R = \{(1,1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (1, 5), (3,1), (3, 5), (5,1), (5, 3)\}$

5. Дана множина $X=\{1,2,3,6\}$ і відношення $R=\{(x,y)|x,y\in X, x-$ дільник $y\}$. Показати, що відношення R є відношенням порядку. Побудувати діаграму Хассе частково впорядкованої множини (X,R). Чи існує в множині X найбільший і найменший елементи? Чи існують непорівнювальні елементи?.