Практичне заняття №9
Графи.

Зв`язні компоненти.

Нехай задано неорієнтований граф. Граф називається зв`*язним*, якщо будь-які дві неспівпадаючі вершини графа з`єднані маршрутом. Вочевидь, що для зв`язності графа необхідно і достатньо, щоби довільна фіксована вершина графа з`єднувалася маршрутом з кожною з інших вершин цього графа.

Відношення зв`язності рефлексивне (вершина завжди зв`язана сама з собою), симетричне (із зв`язності вершины $a$ з вершиною $b$ випливає зв`язність вершини b з вершиною a) і транзитивне (якщо вершини a, b і вершини b, c зв`язані, то зв`язані і вершини a, c). Таким чином, відношення зв`язності для вершин є відношенням еквівалентності. Тому існує таке розбиття множини вершин графа на попарно неперетинаємі підмножини (класи еквівалентності), що всі вершини в кожній підмножині зв`язані, а вершини з різних підмножин не зв`язані. Кожна така підмножина вершин графа разом з ребрами, інцидентними цим вершинам, створює зв`язний підграф. Отже, неорієнтований граф можна представити єдиним чином у вигляді об`єднання неперетинаємих зв`язних підграфів. Ці підграфи називають з***в`язними компонентами*** графа, що розглядається. Зв`язныи граф є своєюй єдиною компонентою зв`язності. На рис.4.21 зображений граф, який має три компоненти зв`язності.

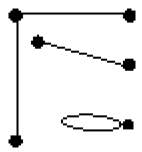


Рис.4.21

Тепер звернемося до орієнтованго графу. Якщо в орграфі існує маршрут, що пов`язує вершини a і b, то кажуть, що вершина b ***досяжна*** з вершини a. Будь-яка вершина вважається досяжною з себе самої. Вершина орграфа називається ***джерелом***, якщо з неї досяжна будь-яка вершина орграфа.

Зв`язність орієнтованих графів визначається в принципі так само, як і неорієнтованих, тобто без урахування напрямку дуг. Специфічним для орграфа є поняття сильної зв`язності. Орграф називається сильним (або ***сильнозв`язним***), якщо будь-які дві його вершини досяжні одна з одної. Орграф називається ***одностороннім*** (або ***односторороннєзв`язним***), якщо для будь-якої пари його вершин, меншою мірою, одна з них досяжна з іншої.

Рис.2. Орграфи (зліва направо): сильний, односторонній і слабкий.

Орграф називається ***слабким*** (або с*лабозв`язним*), якщо зв`язним графом є його неорієнтований дублікат. Оскільки вершина графа досяжна з себе самої, то одновершинний орграф буде одночасно і сильним, і одностороннім, і слабким. Кожний сильный орграф є одностороннім, а кожний односторонній – слабким. Вочевидь, дві будь-які неспівпадаючі вершини сильного орграфа належать деякому контуру.

В деяких задачах істотною є вимога сильної зв`язності графа. Наприклад, граф, що представляє план міста з одностороннім рухом по деяким вулицям, повинен бути сильно зв`язаним, так як, в протилежному випадку, знайдуться вершини (площі і перехрестя), між якими не можна було б проїхати по місту без порушення правил руху.

Маршрут, що містить всі вершини орграфа, називається ***остовним***.

Теорема. *Орграф є сильним тоді і тільки тоді, коли в ньому є остовний контур, є одностороннім тоді і тільки тоді, коли в ньому є остовний шлях.*

Відношення взаємної досяжності вершин орграфа рефлексивно, симетрично і транзитивно. Якщо це відношення еквівалентності, то воно розбиває множину вершин орграфа на класи еквівалентності, об`єднуючи в один клас всі вершини, що досяжні одна з одної. Вершини, що входять в такі класи, разом з дугами, їм інцидентними, обидві кінцеві вершини яких належать цьому ж класу, створюють підграфи, що називаються *сильними* (або *сильнозв`язними*) компонентами орграфа.

Орграф називається *незв`язним*, коли його неорієнтований дублікат не є зв`язним графом.

Орграф, зображений на рис. 4.25, має чотири сильні компоненти з множинами вершин $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $\{v_5, v_6, v_8\}$, $\{v_7\}$, $\{v_9\}$. В орграфі можуть бути дуги, що не входять в жодну з його сильних компонент, наприклад, дуги $v_3 \times v_5$, $v_4 \times v_6$, $v_9 \times v_2$ $v_9 \times v_2$ і $v_9 \times v_8$ у орграфа на рис. 4. 25.

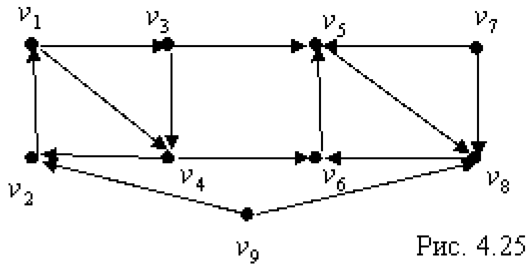


Рис. 4.25

Вершинна зв`язність і реберна зв`язність

Розглянемо граф, вершини якого відповідають деяким технологічним об`єктам, а ребра показують, які об`єкти можуть взаємодіяти або безпосередньо один з одним, або опосередковано через інші об`єкти. Технологічна система, що представлена цим графом, вважається функціонуючою, якщо кожна пара її об`єктів зв`язана між собою. В цьому випадку система повинна мати зв`язний граф. Важливою характеристикою системи є її надійність, під якою зазвичай розуміють здібність системи функціонувати при виході зі строю одного або декількох об`єктів і (або) порушенні зв`язку між деякими з них. Вочевидь, що менш надійною слід вважати ту систему, яка перестає функціонувати при виході зі строю меншої кількості її елементів. Оцінити степінь надійності такої системи можуть допомогти ті поняття, про які згадувалося вище і які зараз будуть визначені.

Визначення. ***Числом вершиною зв`язності*** (або просто ***числом зв`язності***) $\chi(G)$ графа G називається число, що дорівнює найменшему числу вершин, видалення яких приведе до незв`язного або одновершинного графу.

Граф G, представлений на рис. 4.26, зв`язний, але він перестане бути зв`язним, якщо видалити вершину 4. Тому $\chi(G) = 1$.

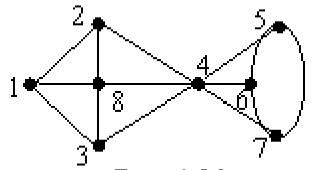


Рис. 4.26

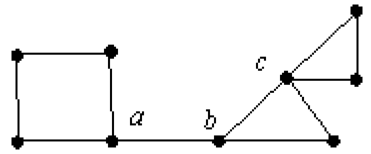


Рис. 4.27

Можна порушувати зв`язність графа, видаляючи деякі його ребра (дуги). У графа G (рис. 4.26) для цього треба видалити не менше трьох ребер. Наприклад, граф G розпадеться на дві компоненти після видалення ребер 4&5, 4&6, 4&7.

Визначення. ***Числом реберної зв`язності*** $\lambda(G)$ графа $G$ називається число, яке дорівнює найменшому числу ребер, видалення яких приведе до незв`язного графу. Число реберної зв`язності одновершинного графу дорівнює нулю.

Вище показано, що для графа G (рис. 4.26) $\lambda(G) = 3$.

Вершина v графа G називається ***точкою зчленування***, якщо граф $G - v$, отриманий після операції видалення у графа G вершини v, має більше компонент зв`язності, чим сам граф $G$. Якщо $G$ зв`язний і v – точка зчленування, то $G - v$ не зв`язний.

Ребро u графа G називається ***мостом***, якщо його видалення збільшує число компонент зв`язності графа.

Таким чином, точки зчленування і мости – це свого роду «вузькі місця» графа. Граф на рис. 4.27 має три точки зчленування – це вершини a, b, c, і один міст – ребро $a \& b$.

Повертаючись до технологічної системи, річ про яку йшла спочатку, зазначимо, що число вершинної зв`язності і число реберної зв`язності її графа відображають чуттєвість системи до пошкоджень, а точки зчленування і мости графа системи вказують на найбільш вузькі місця системи.

Граф називається ***нероздільним,*** якщо він зв`язний і не має точок зчленування. Граф, що має хоча б одну точку зчленування, є роздільним і називається ***сепарабельним.*** Він розбивається на блоки, кожний з яких представляє собою максимальний нероздільний підграф.

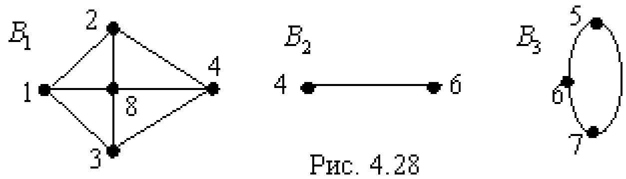


Рис. 4.28

На рис. 4.28 показані блоки B_1, B_2, B_3 графа з рис. 4.26.

Якщо $\delta(G)$ є мінімальна степінь вершин графа G, то вочевидь, що $\lambda(G) \le \delta(G)$, оскільки видалення всіх ребер, інцидентних даній вершині, приведе до збільшення числа компонент зв`язності графа.

Теорема. *Для будь-якого графа* G *справедливі нерівності*:

$$\chi(G) \le \lambda(G) \le \delta(G).$$

Граф G називається k-зв*`язним*, якщо $\chi(G) \ge k$, *реберно*- k-зв*`язним, якщо* $\lambda(G) \ge k$.

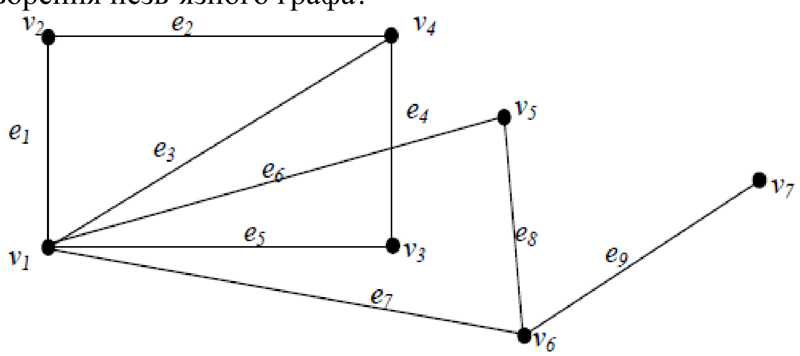
Граф G, зображений на рис. 4.26, 1-зв`язний і реберно-3-зв`язний.

Отже, підсумовуючи: Означення. Дві вершини v і w називаються зв'язаними, якщо існує маршрут з кінцями v та w. Граф називається зв'язним, якщо будь-яка пара його вершин є зв'язаною. Якщо граф не є зв'язним, то він називається незв'язним.

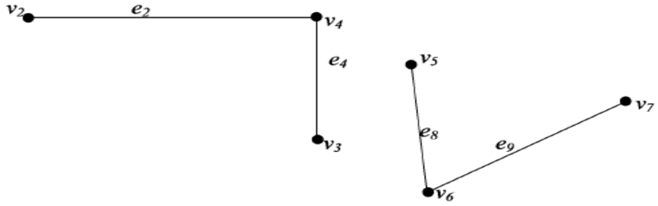
Означення. Зв'язністю графа називається мінімальна кількість вершин, вилучення яких приводить до утворення незв'язного графа.

Приклад 1.

Граф, наведений на рис., є зв'язним, тому що будь-яка пара його вершин зв'язана. Але яка його зв'язність? Тобто, якою є мінімальна кількість вершин його графа, влучення яких приводить до утворення незв'язного графа?

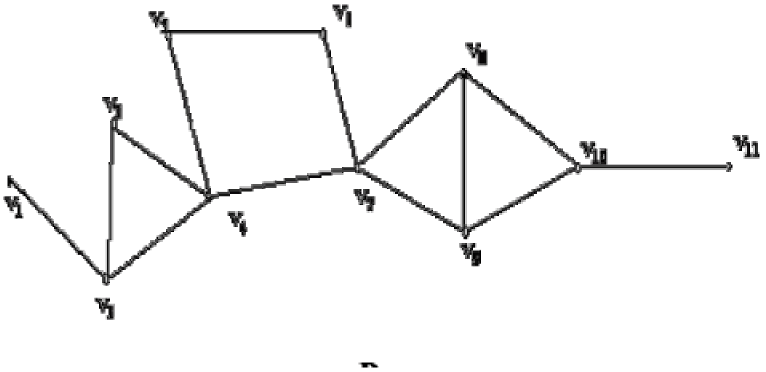


Очевидно, що зв`язність дорівнює одиниці, тому що вилучення однієї вершини $v_1$ приводить до утворення незв`язного графа.



Приклад 2.

Для графа, зображеного на рис., точками зчленування (відокремлювальними вершинами) будуть вершини v_3, v_4, v_7, v_{10}.



Відстань між вершинами.

Означення. Довжина найменшого ланцюга між вершинами v і ω звичайного графа G називається відстанню $d(v,\omega)$ між цими вершинами.

Вона задовольняє аксіоми:

$d(v,\omega) \geq 0$;

$d(v,\omega) = 0 \Leftrightarrow v = \omega$;

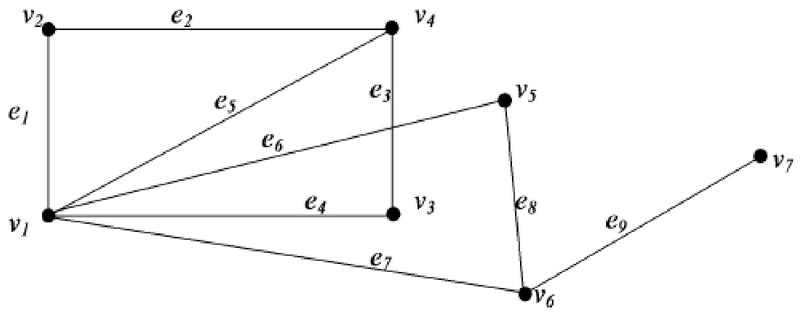
$d(v,\omega) = d(\omega,v)$;

$d(v,\omega) + d(\omega,u) \geq d(v,u)$

Означення. Діаметром графа G називається величина $d(G) = \max\limits_{v,\omega \in Y} d(v,\omega)$.

Іншими словами, діаметром графа G називається максимальна відстань між двома вершинами графа G.

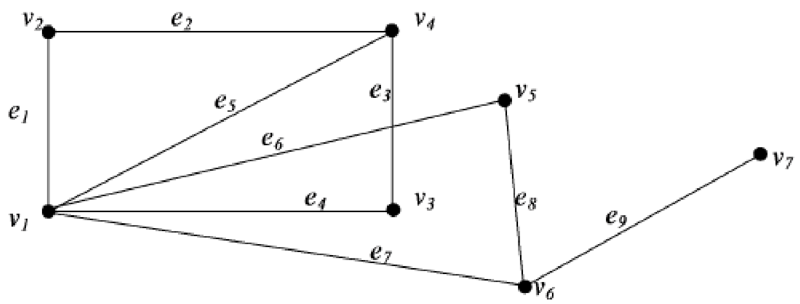
Приклад 2. Визначимо відстані між деякими вершинами графа з рис. $d(v_1,v_4)=1$, це ребро e_5, але є більші прості ланцюги, що зв`язують v_1 і v_4, це ланцюги (e_1,e_2) і (e_4,e_3). $d(v_1,v_7)=2$; $d(v_3,v_5)=2$; $d(v_3,v_6)=2$; $d(v_2,v_6)=2$; $d(v_2,v_7)=3$



В звичайному графі G (рис.) 7 вершин, тому всього існує C_7^2 пар вершин, для яких слід визначити відстані. Ми визначили декілька, але очевидно, що відстаней, більших за 3 в цьому графі немає. Тому діаметр $d(G)=3$.

Означення . ***Центром*** C_0 графа G називається вершина графа G, для якої максимальна з відстаней до інших вершин є мінімальною. ***Радіусом*** r(G) графа G називається максимальна відстань від центра C_0 графа G до його вершин.

Для графа з рис. Визначимо центр C_0 і радіус r(G). Для цього визначимо відстані $d(v_1,v_2)=1$, $d(v_1,v_3)=1$, $d(v_1,v_4)=1$, $d(v_1,v_5)=1$, $d(v_1,v_6)=1$, $d(v_1,v_7)=2$. Максимальна відстань від v_1 до інших вершин дорівнює 2 (є відстанню від v_1 до v_7).



$d(v_2,v_1)=1.$ $d(v_2,v_3)=2,$ $d(v_2,v_4)=1,$ $d(v_2,v_5)=2,$ $d(v_2,v_6)=2,$ $d(v_2,v_7)=3.$
Максимальна відстань від v_2 до інших вершин дорівнює 3.
$d(v_3,v_1)=1,$ $d(v_3,v_2)=2,$ $d(v_3,v_4)=1,$ $d(v_3,v_5)=2,$ $d(v_3,v_6)=2,$ $d(v_3,v_7)=3.$
Максимальна відстань від v_3 до інших вершин дорівнює 3.
$d(v_4,v_1)=1,$ $d(v_4,v_2)=1,$ $d(v_4,v_3)=1,$ $d(v_4,v_5)=2,$ $d(v_4,v_6)=2,$ $d(v_4,v_7)=3.$
Максимальна відстань від v_4 до інших вершин дорівнює 3.
$d(v_5,v_1)=1,$ $d(v_5,v_2)=2,$ $d(v_5,v_3)=2,$ $d(v_5,v_4)=2,$ $d(v_5,v_6)=2,$ $d(v_5,v_7)=2.$
Максимальна відстань від v_5 до інших вершин дорівнює 2.
$d(v_6,v_1)=1,$ $d(v_6,v_2)=2,$ $d(v_6,v_3)=2,$ $d(v_6,v_4)=2,$ $d(v_6,v_5)=1,$ $d(v_6,v_7)=2.$
Максимальна відстань від v_6 до інших вершин дорівнює 2.
$d(v_7,v_1)=2,$ $d(v_7,v_2)=3,$ $d(v_7,v_3)=3,$ $d(v_7,v_4)=3,$ $d(v_7,v_5)=2,$ $d(v_7,v_6)=1.$
Максимальна відстань від v_7 до інших вершин дорівнює 3.

Таким чином, мінімальною із максимальних з вершин є відстань 2, і на звання центру претендують 3 вершини v_1, v_5 і v_6.

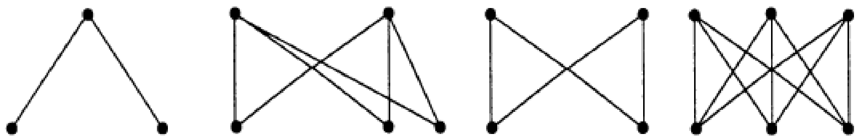
Тому радіус дорівнює максимальній відстані від цих вершин до інших вершин, а це $r(G)=2$.

Дводольний граф.

Означення. Дводольний граф $G_{m,n}=(V,E)$ - це граф, множину вершин якого можна розбити на дві підмножини $V_1 i V_2$ $(V=V_1\cup V_2, V_1\cap V_2=\varnothing, |V_1|=m, |V_2|=n)$ таким чином, що кожне ребро графа з`єднає вершини з різних підмножин.

Дводольний граф називається повним $K_{m,n}$, якщо для кожної пари вершин $v\in V_1$ та $\omega\in V_2$ існує ребро $(v,\omega)\in E$

Графи $K_{1,2}$, $K_{2,3}$, $K_{2,2}$, $K_{3,3}$



Цикломатика графів. Дерева

Цикломатика – це вивчення циклів у графі.

З усієї сукупності циклів даного графа можна відокремити цілковито певну кількість незалежних (базисних) циклів, а решту здобути з базисних циклів за допомогою спеціальної операції додавання. Приклад такого додавання на рис. 3.26.

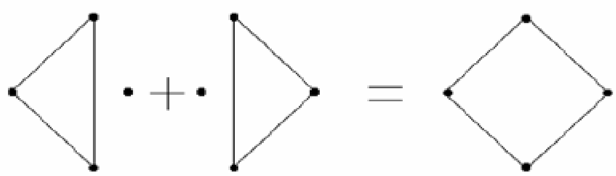


Рисунок 3.26. Приклад додавання циклів

Циклові ребра та перешийки

Нехай задано граф $G = (X, U)$. Ребро графа, через яке проходить хоча б один цикл, назвемо ***цикловим ребром***. Ребро, яке не входить до жодного циклу, називатимемо ***перешийком***.

П р и к л а д. У графі, зображеному на рис. 3.27, ребра $u1$ та $u2$ – перешийки, решта ребер − циклові.

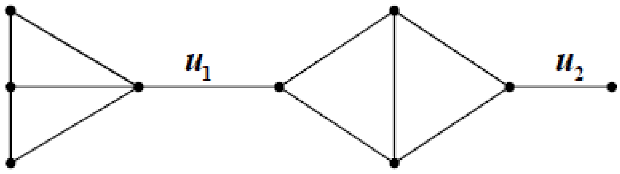


Рисунок 3.27.

Лема При вилученні зі зв'язного графа циклового ребра він залишається зв'язним. При вилученні зі зв'язного графа перешийка граф розпадається на дві компоненти зв'язності.

Цикломатичне число

Нехай задано граф $G = (X, U)$, $|X| = n$, $|U| = m$; p – кількість компонент зв'язності графа. Величина $\lambda = m – n + p$ називається ***цикломатичним числом графа***.

Теорема Для кожного графа цикломатичне число є невід'ємне, тобто $\lambda \geq 0$.

Якщо $\lambda > 0$, то у графі є принаймні один цикл. При вилученні циклового ребра деякі цикли розриваються − і це призводить до зменшення λ. Якщо продовжувати вилучення ребер, то, зрештою, розриваються всі цикли − і λ стає дорівнюваним **0**. Після цього λ вже не змінюється, тому що всі ребра стали перешийками.

П р и к л а д. Нехай треба зв'язати кілька населених пунктів мережею доріг або телефонною мережею; взагалі яким-небудь чином зв'язати один пункт з одним. Пропонований проект подано на рис. 3.28, *а*).

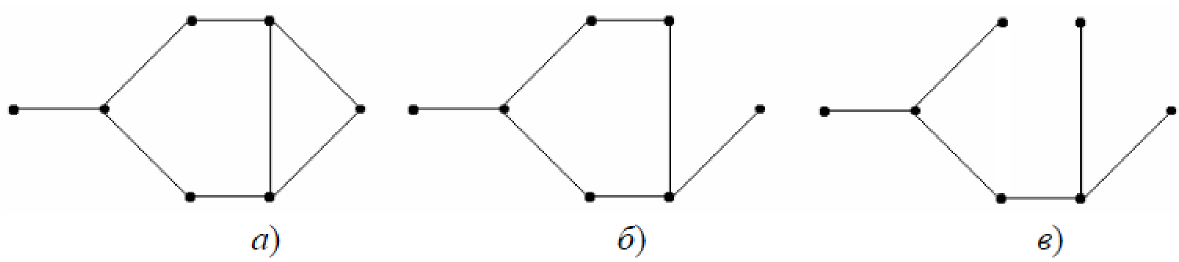


Рисунок 3.28. Різні приклади мереж

Надалі виникла потреба здешевити проект, внаслідок чого певні зв'язки було вилучено (рис. 3.28 *б, в*).

У графі на рис. 3.28, *в*) вже жодного зв'язку вилучати не можна, в противному разі граф перестане бути зв'язним і поставлене завдання не буде розв'язано. Такого роду графи називаються ***деревами***.

При розгляді довільного неорієнтованго графа $G(X,U)$ без петель з $X| = n$ і $U = r$, що містить " p" компонент зв`язності, величину

$$v(G) = r - n + p \quad (18.1)$$

називають ***цикломатичним числом*** *графа*.

Іноді вводять поняття рангу графа

$$R(G) = n - p. \quad (18.2)$$

В цьому випадку цикломатичне число

$$v(G) = r - R(G). \quad (18.3)$$

Циломатичне число графа вказує те найменше число ребер, яке треба видалити з даного графа, щоб отримати дерево (для зв`язного графа) або ліс (для незв`язного графа), тобто досягти відсутності у графа циклів.
Цикломатичне число завжди невід`ємне.
Основна властивість цикломатичного числа формулюється у вигляді теореми:
Цикломатичне число *мультиграфа дорівнює максимальному числу незалежних циклів*.
Знання цикломатичного числа виявляється корисним при аналізі топології електронних схем, а також для вирішення цілого класу задач конструкторського проектування.

Будь-які дві вершини $x_i, x_j \in X$, що знаходяться в різних областях $q_s, q_i \in Q$, не можуть бути з`єднані ребром $u_k \in U$ без перетину ребер (з`єднань), що обмежують області q_s і q_t.
В зв`язку з цим виникає необхідність контролю непопадання суміжних вершин в різні ізольовані області.
Цикломатичне число $v(G)$ дозволяє визначити число таких локально замкнених областей і перейти до вирішення задачі раціонального перерозподілу ребер графа $G(X, U)$.
Приклад. Визначити цикломатичне число графа G = (X, U), зображеного на рис. 17.3.

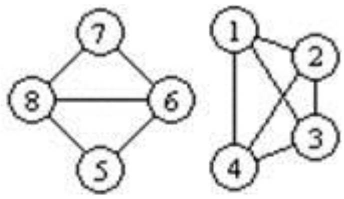


Рис. 17.3. *Граф G*

Рішення: з рис. 17.3 видно, що вхідний граф складається з двох компонент зв`язності, причому |X| = 8; |U| = 11, тобто граф G має 8 вершин і 11 ребер. Підставивши ці числа в формулу g(G)= m-n+p, отримаємо g(G) = 11 - 8 + 2 = 5. Отже, з вхідного графу G необхідно видалити п`ять ребер для того, щоб отримати дерево. Тепер необхідно визначити, які саме ребра ми повинні видалити.

Як вже було сказано вище, на кожному кроці видаляється ребро, що утворює хоча б один цикл. В заданому графі присутні дві компоненти зв`язності. Проаналізувавши кожне ребро першої компоненти, ми приходимо до висновку, що в даному випадку видалення будь-якого ребра приведе до розриву одного з наявних циклів тому можна видалити будь-яке ребро. Нехай це буде ребро ($x_1 - x_2$). Видалимо крок за кроком, наприклад, ребра ($x_2 - x_3$); ($x_3 - x_4$). Як видно, в першошійй компоненті не залишилося більше жодного циклу. Тепер розглянемо другу компоненту. Тут ми можемо видалити, наприклад, ребра ($x_5 - x_6$); ($x_6 - x_7$). Ми видалили з вхідного графу п`ять ребер. В результаті отримали ліс, що складається з двох дерев, що зображені на рис. 17.4.

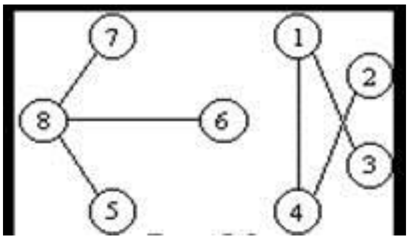


Рис. 17.4. Ліс, що складається з двох остовних *деревв на основі графа G*

Приклад. Дан граф, в якому *m* = 6, *n* = 9 (рис. 18, *а).* Визначити, скільки ребер в графі необхідно видалити, щоб в ньому не залишилося жодного циклу.

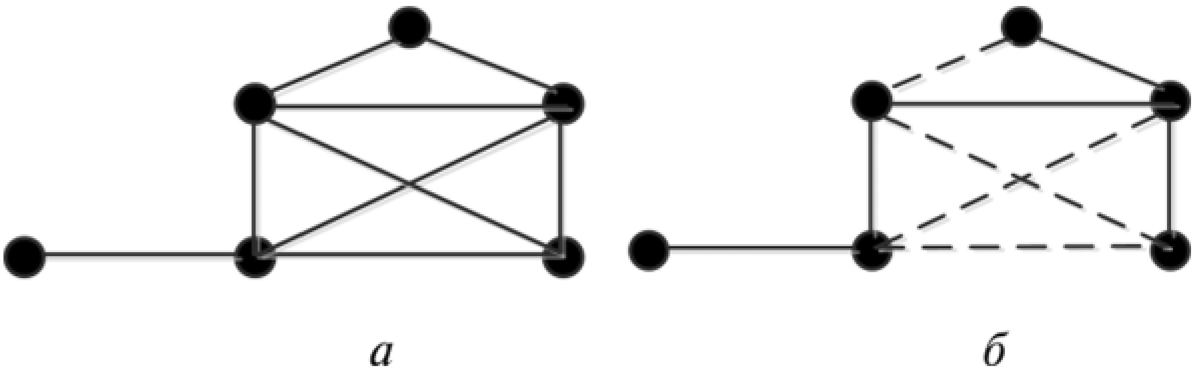


Рис. 18. Вхідний граф (а) і остовний підграф (*б*)

(-------) видалені ребра

Для заданого графу цикломатичне число g(G) = 9 — 6 + 1 = 4. Це означає, що якщо в графі видалити 4 ребра, то в ньому не залишиться жодного циклу. Тоді остовний підграф буде мати вигляд, що показаний на рис. 18, *б*.

Приклад. Яке мінімальне число дверей необхідно передбачити в замку (рис. 19), щоб потрапити до всіх кімнат (двері — одне ребро).

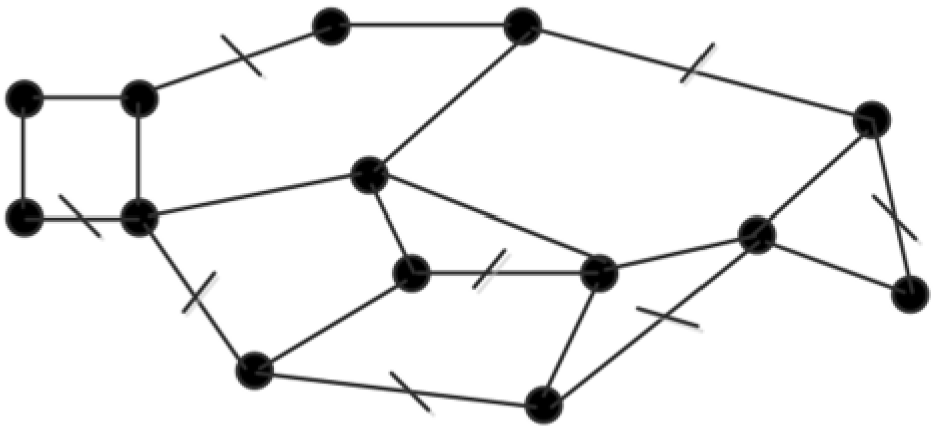


Рис. 19. **Схема замку (вид зверху)**

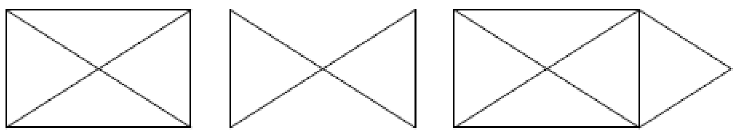
Рішення. Число вершин n = 14, число ребер m = 21. Цикломатичне число у = 21 — 14+1 = 8. Отже, в замку необхідно передбачити 8 дверей.

Властивості ейлерових та гамільтонових графів

Одним з важливіших різновидів зв'язних графів є ейлерові та гамільтонові графи.

Зв'язний граф G називається ейлеровим (малюнок 15), якщо існує замкнутий ланцюг, який включає кожне його ребро. Такий ланцюг називається ***ейлеровим ланцюгом***.

Зв'язний граф G називається напівейлеровим (малюнок 15), якщо в ньому існує ланцюг, який включає кожне його ребро.



a) неейлерів гра; b) ейлерів граф c) напівейлерів граф

Рис.15

Таким чином, всякий ейлерів граф буде напівейлеровим.
Зв'язний граф G є ейлеровим тоді і тільки тоді, коли кожна вершина G має парний степінь.
Нехай G = (V, E) – ейлерів граф. Тоді наступна процедура завжди можлива і веде до ейлерового ланцюга в графі G: виходячи з будь-якої вершини u $\in$V, йдемо по ребрах графаG довільним чином згідно з такими правилами:
1. стираємо ребра, які пройдені, і стираємо ізольовані вершини, які при цьому виникають;
2. на кожному етапі йдемо по мосту лише тоді, коли немає інших можливостей.
Проблема існування замкнутого ланцюга, який проходить через кожне ребро зв'язного графа G, аналогічно може бути сформульована і для вершин. Тобто, чи існує замкнутий ланцюг у зв'язному графі G, який проходить рівно один раз через кожну вершину графа G. Очевидно, що такий ланцюг має бути циклом. Якщо такий цикл у графа G існує, то він називається ***гамільтоновим ланцюгом***, а граф G – **гамільтоновим графом**.
Якщо в графі G = (V, E) порядку n зафіксувати одну з вершин і обхід графа завжди починати з неї, то всякому гамільтоновому циклу буде відповідати перестановка елементів множини V.