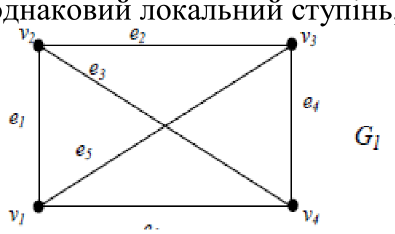
Практичне заняття №8

Графи

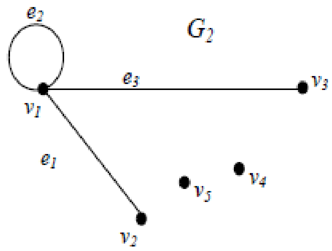
Степені вершини неорієнтованого графа.
Означення. Кількість ребер графа, інцидентних деякій вершині γ , називається локальним степенем, або просто степенем вершини γ і позначається $\rho(\gamma)$. Якщо є ребро е в графі G, тобто е = (γ , ω) $\in$ E(G), то можна сказати:

- вершини γ і ω суміжні в графі G;
- вершини γ і ω є кінцями ребра е;
- вершини γ та ω інцидентні ребру е;
- ребро е інцидентне вершині γ (ω).

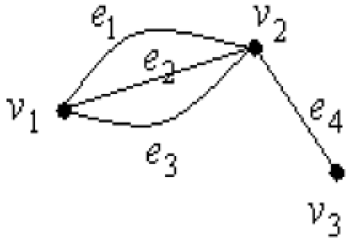
Означення. Два ребра називаються суміжними, якщо обидва вони інцидентні одній вершині.
Приклад 1.
В графі G1 суміжними є всі вершини $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\gamma_4$, суміжні трійки ребер е1, е2, е3; е1, е5, е6; е6, е3, е4; е2, е3, е4. Розглянемо ребро е2. Вершини γ_2 і γ_3 є кінцями ребра е2. Вершини γ_2 і γ_3 інцидентні ребру е2. Ребро е2 інцідентне вершинам γ_2 і γ_3. Вершини $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\gamma_4$ всі мають однаковий локальний ступінь, який дорівнює 3.



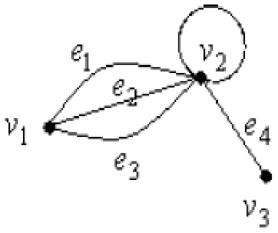
Приклад 2.
В графі G2 не всі вершини суміжні між собою. Вершини γ_4 і γ_5 не суміжні жодній вершині графу. Їхній локальний ступінь $\rho(\gamma_4)=\rho(\gamma_5)=0$. Ребро е3 інцідентне вершинам γ_1 і γ_3, а вершини γ_1 і γ_3 інцідентні ребру е3 $\rho(\gamma_1)=3, \rho(\gamma_3)=1, \rho(\gamma_2)=1$. Ребра е1, е2, е3 суміжні між собою попарно: е1 і е2, е2 і е3.

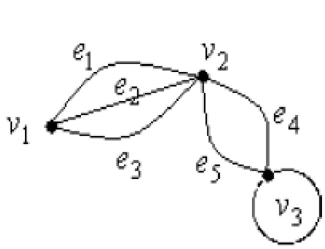


Різні ребра можуть бути інцидентні одній і тій самій парі вершин, такі ребра називаються ***кратними***. Цей випадок відповідає наявності декількох однакових пар (γ_i,γ_j) $\in$ E(G).



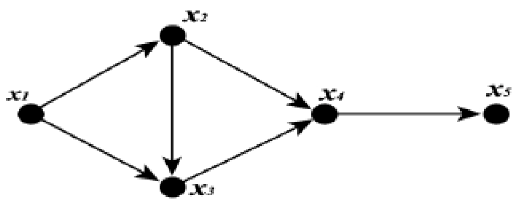
Граф з петлями та кратними ребрами називається ***псевдографом.***





Степені вершини орієнтованого графа.

При зображенні орієнтованих графів напрями ребер позначаються стрілками. Орієнтований граф також може мати кратні ребра, петлі, а також ребра, що з'єднують одні й ті самі вершини ребра, але у зворотних напрямах.



$V=\{x_1;x_2;x_3;x_4;x_5\}$;

$E=\{(x_1;x_2);(x_2;x_4);(x_1;x_3);(x_2;x_3);(x_3;x_4);(x_4;x_5)\}$.

Наприклад: $l=(x_4;x_5)$ то x_4 – початок дуги, x_5 – кінець.

Кожному неорієнтованому графу можна поставити у відповідність орієнтований граф з тією ж самою множиною вершин, в якій кожне ребро замінено двома орієнтованими ребрами, що є інцидентними тим же вершинам і мають зворотні напрями.

Для вершин орієнтованого графа визначаються два локальних степеня:
$d_+(x)$ - число ребер з початком у вершині *x*, або, інакше, кількість ребер, які виходять з x і
$d_-(x)$ - кількість ребер, що входять у вершину *x*, тобто ребер, для яких ця вершина є кінцем.
Петля дає внесок 1 в обидва ці степені.

Подання графа за допомогою матриці інцидентності.

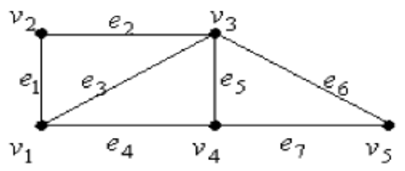
Задати граф означає задати множини його вершин і ребер, а також відношення інцидентності. Розглянемо звичайні графи. Нехай $v_1,v_2,...,v_n$ - множина вершин графа G; $e_1,e_2,...,e_m$ - множина його ребер.

Відношення інцидентності можна означити матрицею $E=\|\varepsilon_{i,}\|$.

$$\varepsilon_{ij}=\begin{cases}1, & \text{якщо ребро } e_i \text{ інцидентне вершині } V_j\\ 0 & \text{в протилежному випадку}\end{cases}.$$

Стовпці графа відповідають вершинам графа, а рядки – його ребрам.

Приклад 3.



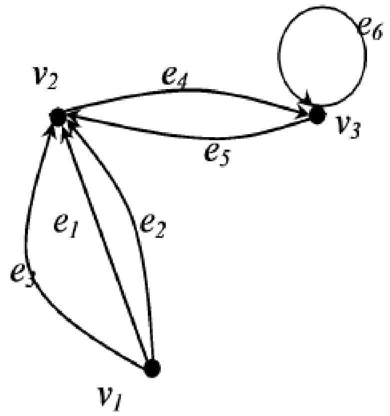
Матриця інцидентості

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
e_1	1	1	0	0	0
e_2	0	1	1	0	0
e_3	1	0	1	0	0
e_4	1	0	0	1	0
e_5	0	0	1	1	0
e_6	0	0	1	0	1
e_7	0	0	0	1	1

Сума у кожному рядку матриці інцидентності звичайного графу дорівнює 2, сума у кожному стовпці матриці інцидентності звичайного графу дорівнює локальному ступеню вершини, що відповідає даному стовпцю. Якщо в неорієнтованому графі є петлі, тобто ребро, що є інцидентним одній і тій самій вершині, то у відповідному рядку буде одна 1.

Матриця інцидентності орієнтованого графу. У матриці інцидентності $E = \|\varepsilon_{i,}\|$ орієнтваного графа G, якщо v_j - початок ребра e_i, то $\varepsilon_{i,j} = -1$. Якщо v_j-кінець ребра e_i, то $\varepsilon_{i,j} = 1$; якщо v_j- петля, а v_j- інцидент на їй вершина, тобто і початок і кінець одночасно, то $\varepsilon_{i,j} = a$, де a будь-яке число, відмінне від -1; 0 і 1, в інших випадках $\varepsilon_{i,j} = 0$.

Приклад 4.



	v_1	v_2	v_3
e_1	-1	1	0
e_2	-1	1	0
e_3	-1	1	0
e_4	0	-1	1
e_5	0	1	-1
e_6	0	0	2

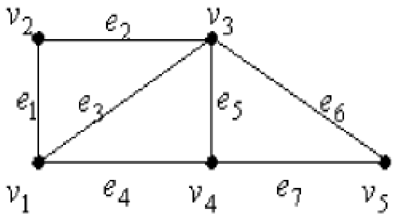
У кожному рядку матриці інцидентності для неорієнтованого або орієнтованого графу тільки два елементи відмінні від 0 (або один, якщо ребро є петлею), причому в орграфі сума елементів рядка, що не відповідає дузі, дорівнює 0.

Подання неорієнтованого графа за допомогою матриці суміжності графа.

Матриця суміжності неорієнтованого графа – це квадратна матриця $\Delta = \|\delta_{i,j}\|$, стовпцям і рядкам якої відповідають вершини графа.

Для неорієнтованого графа $\delta_{i,j}$ дорівнює кількості ребер, інцидентних і-й та j-1 вершинам, для орієнтованого графу цей елемент матриці суміжності відповідає кількості ребер з початком у і-й вершині і кінцем у j-й . Таким чином, матриця суміжності неорієнтованого графа симетрична $\delta_{i,j} = \delta_{j,i}$, а орієнтованого – необов`язково.

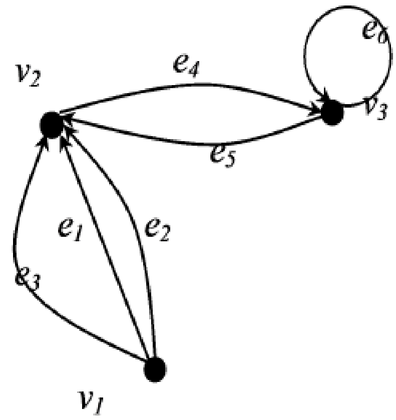
Приклад матриці суміжності неорієнтованого графа.



Матриця суміжності

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	1	1	0
v_2	1	0	1	0	0
v_3	1	1	0	1	1
v_4	1	0	1	0	1
v_5	0	0	1	1	0

Приклад матриці суміжності для орієнтованого графа.



	v_1	v_2	v_3
v_1	0	3	0
v_2	0	0	1
v_3	0	1	1

Матриця суміжності повністю визначає відповідний неорієнтований і орієнтований графи. Число його вершин дорівнює розмірності матриці n, i-й і j-й вершинам графа інцидентності $\delta_{i,j}$ ребер.

Для неорієнтованого графа $\delta_{i,j} = \delta_{j,i}$, і всі його ребра визначаються верхнім правим трикутником матриці, розташованим над діагоналлю, включаючи останню. Кількість ребер графа дорівнює сумі $\delta_{i,j}$ у цьому трикутнику, тобто $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}$. Ребра орієнтованого графа визначаються всіма елементами $\delta_{i,j}$ матриці суміжності.

Визначення локальних степенів вершин графа. Повні графи.

Якщо задані матриці суміжності Δ або інцидентності Е графа можна визначити локальні степені всіх його вершин.

Дійсно в j-тому стовпці матриці інцидентності, який відповідає вершині v_i одиниці знаходяться на перетині з рядками, яким відповідають інцидентні цій вершині ребра, а інші елементи стовпця дорівнюють 0. Отже, $\rho(v_i) = \sum_{i=1}^{m}\delta_{ij}$.

Елементи δ_{ij} матриці суміжності – це кількість ребер, інцидент них вершинам v_i і v_j, звідси $\rho(v_j) = \sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}$.

Локальні степені вершин орієнтованого графа визначаються через коефіцієнти δ_{ij} його матриці суміжності $\rho_1(v_i) = \sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}; \rho_2(v_i) = \sum_{i=1}^{n}\delta_{ij}$.

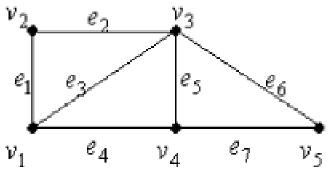
Вираз їх через коефіцієнти матриці інцидентності – значно складніше.

Оскільки кожне ребро орієнтованого графа G має один початок й один кінець, суми $\sum_{v\in G}\rho_1(v)$ та $\sum_{v\in G}\rho_2(v)$ дорівнюють кількості ребер цього графа, а отже, є рівними між собою

$$\sum_{v \in G} \rho_1(v) = \sum_{v \in G} \rho_2(v).$$

Визначення локальних степенів вершин неорієнтованого графа. Приклад.

Для графа, що заданий на рисунку, визначимо локальні степені його вершин за матрицей інцидентності, підраховуючи суми одиниць в стовпцяї.

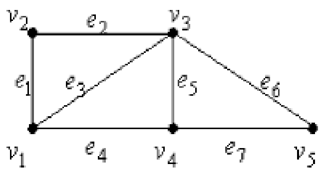


Матриця інцидентості

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
e_1	1	1	0	0	0
e_2	0	1	1	0	0
e_3	1	0	1	0	0
e_4	1	0	0	1	0
e_5	0	0	1	1	0
e_6	0	0	1	0	1
e_7	0	0	0	1	1

$\rho(v_1) = 3$, $\rho(v_2) = 2$, $\rho(v_3) = 4$, $\rho(v_4) = 3$, $\rho(v_5) = 2$.

Для того ж самого графа визначимо локальні ступені його вершин за матрицею суміжності, підраховуючи суми одиниць в рядках (або стовпцях) матриці.



Матриця суміжності

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	1	1	0
v_2	1	0	1	0	0
v_3	1	1	0	1	1
v_4	1	0	1	0	1
v_5	0	0	1	1	0

$\rho(v_1) = 3$, $\rho(v_2) = 2$, $\rho(v_3) = 4$, $\rho(v_4) = 3$, $\rho(v_5) = 2$.

Результати підрахунків за обома матрицями співпадають.

Маршрути, шляхи, ланцюги та цикли.

Означення. Нехай G – неорієнтований граф, що з`єднає вершину v_1 з вершиною v_n, маршрутом називається така послідовність вершин і ребер, які чергуються,

$$M = (v_1, e_1, v_2, e_2, ..., v_n, e_n), \quad (1)$$

Що починається у вершині v_1 і закінчується у вершині v_n, і така, що кожні два сусідні ребра e_{i-1} і e_i мають спільну інцидентну вершину v_1.

Іншими словами, маршрутом, що з`єднає вершину v_1 з вершиною v_n, в неорієнтованому графі називається послідовність вершин і інцидентних їм ребер, яка починається в вершині v_1 і закінчується в вершині v_n.

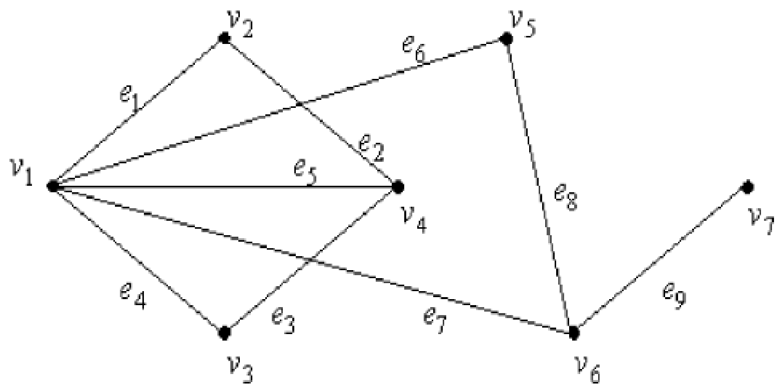
Очевидно, що маршрут M можна задавати послідовністю його вершин $(v_1, v_2, ..., v_n)$ (в звичайному графі), а також послідовністю $(e_1, e_2, ..., e_n)$ ребер (для будь-якого графа). Одне і те саме ребро може зустрічатися в маршруті кілька разів. Вершина v_1 називається початком маршруту. v_n - кінець маршруту.

Внутрішні вершини.

Означення. Вершини, інцидентні ребрам маршруту, крім початкової і кінцевої, називаються внутрішніми або проміжними. Оскільки різні ребра маршруту можуть бути інцидентними одній і тій самій вершині, початок або кінець маршруту може одночасно виявитися і внутрішньою вершиною.

Приклад.

Маршрут $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_6, e_8)$



Нехай маршрут $M = (e_1, e_2, ..., e_n)$ має початок v_1 і кінець v_n.

Означення. Число ребер маршруту називається його ***довжиною***. Якщо $v_1 = v_n$, то маршрут називають ***замкненим***.

Ланцюги і цикли.

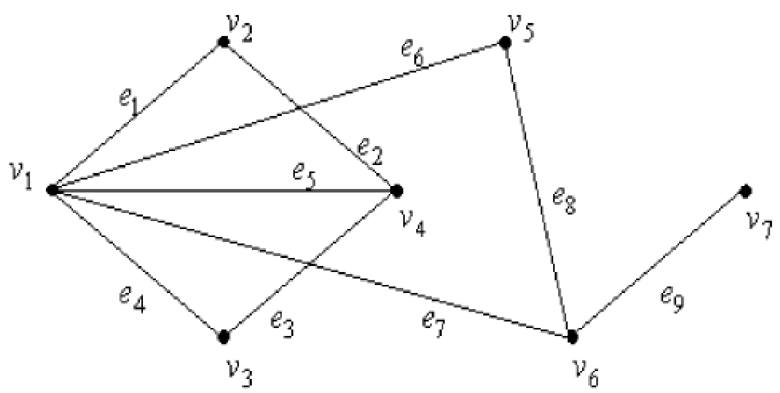
Означення. Маршрут М називається ***ланцюгом***, якщо кожне ребро зустрічається в ньому не більше, ніж один раз, і ***простим ланцюгом***, якщо будь-яка вершина (крім, можливо, початкової) зустрічається в ньому не більше, як один раз.

Якщо ланцюг є замкненим, то його називають ***циклом***, а його простий ланцюг – замкнений, то це – ***простий цикл***.

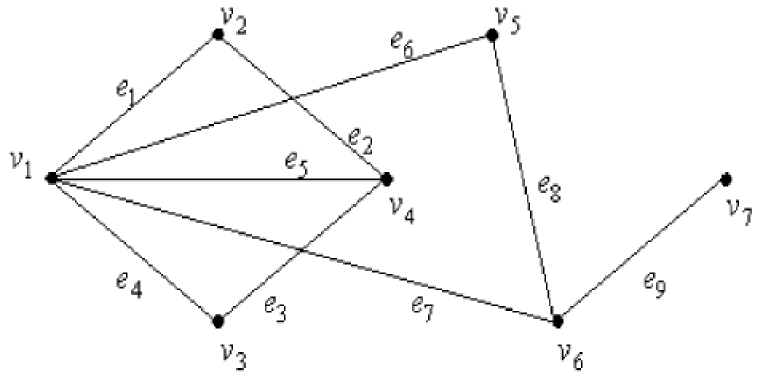
Приклад 5.

Маршрут $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_6, e_8, e_7)$ є замкненим ланцюгом,

тобто циклом, але не є простим циклом, тому вершина v_1 зустрічається в ньому тричі.



Часто вважається, що можна міняти порядок ребер циклу на зворотний, тобто, наприклад, послідовність (e_4, e_3, e_2, e_1) зображує той самий цикл.



Маршрути в орієнтованих графах.

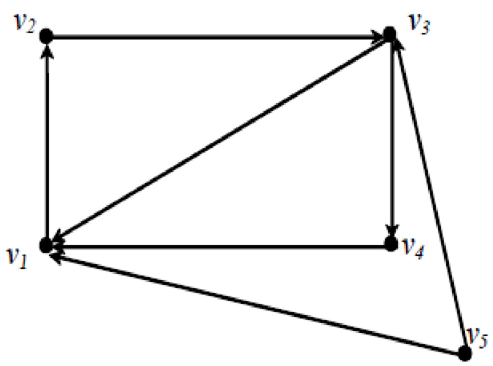
Визначення маршруту легко перенести з графа на орієнтований граф. Маршрут в останньому називатимемо ***шляхом***. Відповідно можна перенести також визначення ланцюга, простого ланцюга та циклу. Простий цикл в орієнтованому графі ще називається ***контуром***.

Визначення кількості шляхів.

Твердження. К-й ступінь матриці суміжності графа G визначає наявність шляхів завдовжки к: елемент a_{ij} матриці $|G|^k$ дорівнює кількості шляхів довжини к, які мають початок v_1 і кінець у вершині v_j (це справджується і для *i*=*j*, в цьому випадку шлях є циклом).

Приклад 6.

Розглянемо граф G:



Побудуємо матрицю суміжності графа G і знайдемо матрицю, яка є її другим ступенем, по якій визначимо шляхи, завдовжки 2.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	0	0	0
v_2	0	0	1	0	0
v_3	1	0	0	1	0
v_4	1	0	0	0	0
v_5	1	0	1	0	0

×

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	0	0	0
v_2	0	0	1	0	0
v_3	1	0	0	1	0
v_4	1	0	0	0	0
v_5	1	0	1	0	0

=

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	0	1	0	0
v_2	1	0	0	1	0
v_3	1	1	0	0	0
v_4	0	1	0	0	0
v_5	1	1	0	1	0

Приклад 7. Визначення кількості шляхів.

Це, наприклад, шляхи з v_1 у v_3, з v_3 у v_2, з v_5 у v_1 і т.д. На головній діагоналі цієї матриці жодної одиниці. Це свідчить про те, що в графі G немає жодного циклу завдовжки 2.

Приклад 8. Визначення кількості шляхів.

Знайдемо третій ступінь матриці суміжності графа G , і за якою визначимо шляхи, завдовжки 3.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	0	1	0	0
v_2	1	0	0	1	0
v_3	1	1	0	0	0
v_4	0	1	0	0	0
v_5	1	1	0	1	0

×

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	0	0	0
v_2	0	0	1	0	0
v_3	1	0	0	1	0
v_4	1	0	0	0	0
v_5	1	0	1	0	0

=

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	1	0	0	1	0
v_2	1	1	0	0	0
v_3	0	1	1	0	0
v_4	0	0	1	0	0
v_5	1	1	1	0	0

Прикладами шляхів, завдовжки 3 є шляхи з v_1 у v_4; з v_2 у v_1; з v_5 у v_1 (через v_4); з v_5 у v_2 (через v_1) і т.д. У матриці є одиниці на головній діагоналі. Ще елементи a_{11}, a_{22}, a_{33}. Тобто є цикл завдовжки 3, який містить вершини v_1, v_2, v_3.

Приклад 9. Визначення кількості шляхів.

Знайдемо четвертий ступінь матриці суміжності графа G , і визначимо шляхи, завдовжки 4.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	1	0	0	1	0
v_2	1	1	0	0	0
v_3	0	1	1	0	0
v_4	0	0	1	0	0
v_5	1	1	1	0	0

×

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	0	0	0
v_2	0	0	1	0	0
v_3	1	0	0	1	0
v_4	1	0	0	0	0
v_5	1	0	1	0	0

=

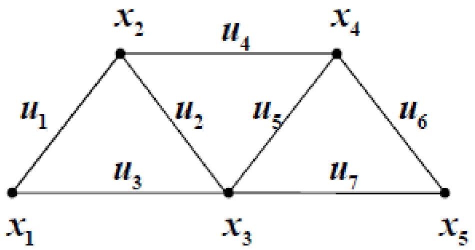
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	1	1	0	0	0
v_2	0	1	1	0	0
v_3	1	0	1	1	0
v_4	1	0	0	1	0
v_5	1	1	1	1	0

Це шляхи, наприклад, з v_1 у v_2 (v_1, v_2, v_3, v_1, v_2); з v_5 у v_3 $(v_5, v_3, v_1, v_2, v_3)$ і т.д.

Наявність одиниць на головній діагоналі свідчить про те, що є цикл завдовжки 4.
Цей цикл містить вершини v_1, v_2, v_3, v_4.

Завдання і вправи.

1. У графі, заданому на рисунку визначити маршрут, ланцюг і простий ланцюг.



2.

Завдання.

Вважаючи даний граф неорієнтованим, позначити його вершини і ребра різними символами і визначити.

1.1 Локальні степені кожної вершини.
1.2 Побудувати матриці сміжності і інцидентності;
1.3 Показати підграф, що складається з трьох вершин;
1.4 Навести приклади циклічного маршруту, ланцюга, простого ланцюга.

Вважаючи граф орієнтованим, визначити:
2.1 Степені вершин;
2.2 Матриці інцидентнсті і суміжності;
2.3 Навести приклади шляху, орієнтованого ланцюга, простого ланцюга, контура, цикла і простого цикла.