Практичне заняття №7
Графи.

У разі потреби подавання в наочній формі системи взаємопов'язаних об'єктів звертаються до такої побудови: на площині чи у просторі обирають кілька точок і певні пари з цих точок поєднують лініями. Об'єкт, здобутий у наслідок такої побудови, називається ***графом***.
За приклади графів можуть слугувати блок-схема алгоритму, з'єднання в електричній схемі, мережа шляхів поміж населеними пунктами. Одну й ту саму систему об'єктів та зв'язків між ними можна відобразити по-різному, застосовуючи наведену вище побудову: у різні способи розміщувати точки, за їхні з'єднувальні лінії брати ті чи інші криві тощо. Більш того, можна взагалі не зображати, а зазначити систему зв'язків об'єктів у якій завгодно іншій формі, наприклад у словесній. Це міркування засвідчує, що потрібне визначення графа як певного формального об'єкта, який можна подавати наочно у всілякі способи.

Визначення графа

Стверджуватимемо, що задано ***скінченний неорієнтований граф***, якщо задано такі два об'єкти:
1) скінчена не порожня множина $\boldsymbol{X = \{x1, x2, \ldots, xn\}}$; елементи цієї множини називають ***вершинами графа***;
2) деяка множина ***невпорядкованих*** пар елементів з $\boldsymbol{X}$; ця множина позначається $\boldsymbol{U}$, її елементи називають ***ребрами.*** Той факт, що граф означується парою множин $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{U}$, записують у вигляді $\boldsymbol{G = (X, U)}$.
За наочного подавання графа вершини зображуються ***точками***, ребра – ***лініями***, які з'єднують точки.
П р и к л а д. $\boldsymbol{G = (X, U)}$, де $\boldsymbol{X = \{x1, x2, x3, x4, x5\}}$;
$\boldsymbol{U = \{\{x1, x2\}, \{x2, x3\}, \{x3, x4\}, \{x4, x5\}\}}$.

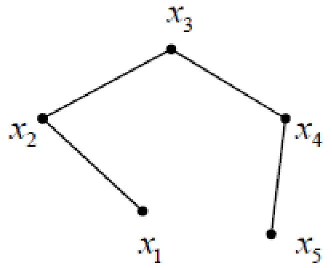


Рисунок 3.1.
Приклад графа

Наочно цей граф зображено на рис. 3.1.
ЗАУВАЖЕННЯ. Якщо $\boldsymbol{u1 = \{x1, x2\}}$ – ребро графа, то стверджують, що ребро $\boldsymbol{u1}$ з'єднує вершини $\boldsymbol{x1}$ та $\boldsymbol{x2}$.
Поряд із наведеним визначенням графа можливі й інші визначення графа.

Термін "граф" неоднозначний, це легко відмітити, порівнюючи визначення, що приводяться в різних книгах. Проте у всіх цих визначеннях є дещо загальне. У будь-якому випадку граф складається з двох множин – множини вершин і множини ребер, причому для кожного ребра вказана пара вершин, які це ребро сполучає. Вершини і ребра називаються елементами графа. Тут розглядатимуться тільки скінченні графи, тобто такі, у яких обидві множини скінченні. Щоб отримати закінчене визначення графа того або іншого типу, необхідно уточнити ще три моменти.

1. Орієнтований або неорієнтований?

Перш за все, потрібно домовитися, чи рахуємо ми пари (a, b) і (b, a) різними. Якщо так, то говорять, що розглядаються впорядковані пари (порядок елементів в парі важливий), якщо ні – невпорядковані. Якщо ребро e сполучає вершину a з вершиною b і пара (a, b) вважається впорядкованою, то це ребро називається ***орієнтованим***, вершина a –його ***початком***, вершина b –***кінцем***. Якщо ж ця пара вважається невпорядкованою, то ребро називається ***неорієнтованим***, а обидві вершини – його ***кінцями***. Найчастіше розглядають графи, в яких всі ребра мають один тип, – або орієнтовані, або неорієнтовані. Відповідно і весь граф називають орієнтованим або неорієнтованим. На рисунках орієнтацію ребра (напрям від початку до кінця) указують стрілкою. На рис. 1.2 – орієнтовані.

2. Кратні ребра.

Наступний пункт, що вимагає уточнення, – чи можуть різні ребра мати однакові початки і кінці? Якщо так, то говорять, що в графі допускаються ***кратні ребра***. Граф з кратними ребрами називають також ***мультиграфом***. На рис. 1.2 зображено два графи, лівий є орієнтованим мультиграфом, а правий – орієнтованим графом без кратних ребер.

3. Петлі.

Ребро, якому поставлена у відповідність пара вигляду (a, a),тобто ребро, що сполучає вершину a з нею ж самою, називається ***петлею***. Якщо такі ребра не допускаються, то говорять, що розглядаються ***графи без петель***.

Рис. 1.2.

Комбінуючи ці три ознаки, можна отримати різні варіанти визначення поняття графа. Особливо часто зустрічаються неорієнтовані графи без петель і кратних ребер. Такі графи називають ***звичайними***. Якщо в графі немає кратних ребер, то можна просто ототожнити ребра з відповідними парами вершин – вважати, що ребро це і є пара вершин. Щоб виключити петлі, досить обумовити, що вершини, які утворюють ребро, повинні бути різні. Це приводить до наступного визначення звичайного графа.

Визначення. ***Звичайним графом*** називається пара $G = (V, E)$де V–скінченна множина E –множина невпорядкованих пар різних елементів з V. Елементи множини V називаються ***вершинами*** графа, елементи множини E –його ***ребрами***.

Злегка модифікуючи це визначення, можна отримати визначення інших типів графів без кратних ребер: якщо замінити слово "невпорядкованих" словом "впорядкованих", вийде визначення орієнтованого графа без петель, якщо прибрати слово "різних", вийде визначення графа з петлями. Орієнтований граф часто називають ***орграфом***.

Надалі термін "граф" ми використовуватимемо в сенсі "звичайний граф", а розглядаючи інші типи графів, будемо спеціально це обумовлювати.

Множину вершин графа G позначатимемо через VG множину ребер – EG число вершин – $n(G)$число ребер – $m(G)$.

З визначення видно, що для задання звичайного графа досить перерахувати його вершини і ребра, причому кожне ребро повинне бути парою вершин. Візьмемо, наприклад $VG = \{a, b, c, d, e, f\}$,$EG=\{(a, c), (a, f), (b, c), (c, d), (d, f)\}$. Тим самим заданий граф G з $n(G)=6$,$m(G) = 5$. Якщо граф не дуже великий, то наочніше представити його можна за допомогою рисунка, на якому вершини зображуються кружками або іншими значками, а ребра – лініями, що сполучають вершини. Заданий вище граф G показаний на рисунку 1.3. Ми часто користуватимемося саме цим способом представлення графа, при цьому позначення вершин іноді поміщатимуться усередині кружків, що зображають вершини, іноді поряд з ними, а іноді, коли імена вершин неістотні, і зовсім пропускатимуться.

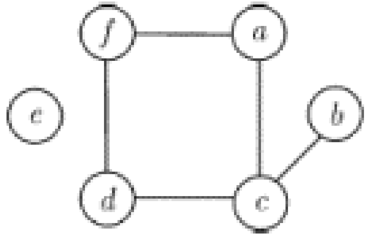


Рис. 1.3.

Іноді виникає потреба розглядати графи. в яких одну й ту саму пару вершин з’єднує кілька ребер. Такі графи називаються ***мультиграфами*** (рис. 3.2).
Можливі також графи, в яких певні ребра можуть мати збіжні кінці. Такі ребра називають ***петлями*** (рис. 3.3).
У більшості додатків теорії графів можна відкидати петлі й замінювати кратні ребра на одне ребром. Тому надалі подане вище визначення буде головним і словом ***„граф”*** позначатимемо ***скінченний неорієнтований граф без петель і кратних ребер*** (його ще називають ***простим***, або ***звичайним***) (рис. 3.4).
Граф з петлями і кратними ребрами називається ***псевдографом*** (рис. 3.5).

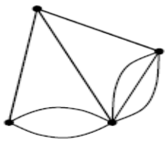


Рисунок 3.2.
Мультиграф

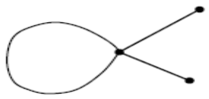


Рисунок 3.3.
Граф з петлею

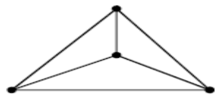


Рисунок 3.4.
Простий граф

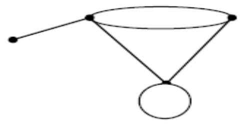


Рисунок 3.5.
Псевдограф

Орієнтовані графи

Поняття ***орієнтованого*** графа (***орграфа***) виникає, якщо ребрам графа надати напрямок (тобто орієнтацію) в такий спосіб, що один з кінців ребра буде початком, а інший – кінцем.
Стверджуватимемо, що задано орієнтований граф, якщо зазначено два об’єкти:
1) не порожня скінчена множина ***X*** – вершини графа;
2) множина ***U***, утворена з ***впорядкованих*** пар вершин. Елементи множини ***U*** називають ***дугами***. Дуга орієнтованого графа зображується відрізком із зазначенням напрямку (стрілкою) (рис. 3.6).

Рисунок 3.6. Зображення орієнтації дуг

П р и к л а д орієнтованого графа. ***G* = (*X*, *U*)**, де ***X* = {*x*1, *x*2, *x*3, *x*4, *x*5}**; ***U* = {(*x*1, *x*2), (*x*2, *x*3), (*x*3, *x*4), (*x*4, *x*5)}**. Граф ***G*** зображено на рис. 3.7.

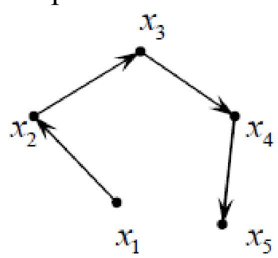


Рисунок 3.7.
Зображення орграфа ***G***

ЗАУВАЖЕННЯ. Якщо ***u*1** = (***x*1** , ***x*2**) – дуга орграфа, то стверджують, що дуга ***u*1** виходить з вершини ***x*1** і закінчується у вершині ***x*2** .

Найпростіші поняття теорії графів

Нехай задано граф ***G* = (*X*, *U*)**. Про ребро ***u* = {*x*, *y*}** цього графа стверджують, що воно з’єднує вершини ***x*** та ***y***. Дві вершини, з’єднані ребром, називаються ***суміжними***, якщо вони є кінцями одного ребра. Про ребро ***u* = {*x*, *y*}** та вершину ***x*** стверджують, що вони є і***нцидентні***.
Те ж саме можна сказати й про ребро ***u* = {*x*, *y*}** та вершину ***y***. ***Далі позначатимемо*** кількість вершин графа − літерою ***n***, а кількість ребер графа − літерою ***m***: **|*X*| = *n*, |*U*| = *m*.** Це основні ***числові характеристики*** *графа*.
Кількість ребер, інцидентних до певної вершини ***x***, називається ***степенем*** цієї вершини і позначається δ**(*x*)**, або **deg(*x*)**.
Вершина, в якої степінь дорівнює 0, називається ***ізольованою*** (вершина ***x*** рис. 3.8). Вершини, які мають степінь 1, називаються ***висячими***, або ***кінцевими*** (вершина ***x*** рис. 3.9).

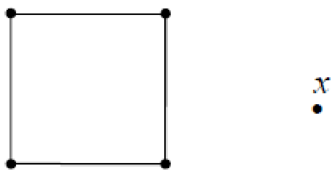


Рисунок 3.8.
Граф з ізольованою вершиною x

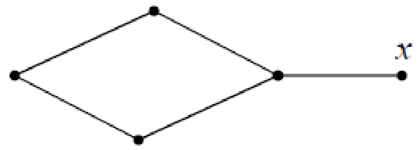


Рисунок 3.9.
Граф з висячою вершиною x

Справедливими є два такі простих твердження.
Теорема 1. Сума степенів усіх вершин графа дорівнює подвоєній кількості ребер.
Д о в е д е н н я
Кожне ребро двічі входить до суми, звідки й випливає твердження.
Теорема 2. У кожному графові число вершин, які мають непарний степінь, є парне.
Для орієнтованих графів замість степеня вершини $\boldsymbol{x}$ вводять поняття ***півстепенів:*** додатні $\delta+(\boldsymbol{x})$ й від'ємні $\delta-(\boldsymbol{x})$ півстепені вершини $\boldsymbol{x}$.
$\delta+(\boldsymbol{x})$ − число дуг, які входять до вершини $\boldsymbol{x}$;
$\delta-(\boldsymbol{x})$ − число дуг, які виходять з вершини $\boldsymbol{x}$.
Граф, який не має ребер ($\boldsymbol{U} = \varnothing$), називається ***порожнім***. Усі вершини порожнього графа є ***ізольовані***. Граф, в якому кожна пара вершин з'єднана ребром, називається ***повним.***
Повний $\boldsymbol{n}$-вершинний граф позначається $\boldsymbol{Kn}$; для кожної його вершини $\boldsymbol{x}$
маємо $\delta(\boldsymbol{x}) = n - 1$ (рис. 3.10).

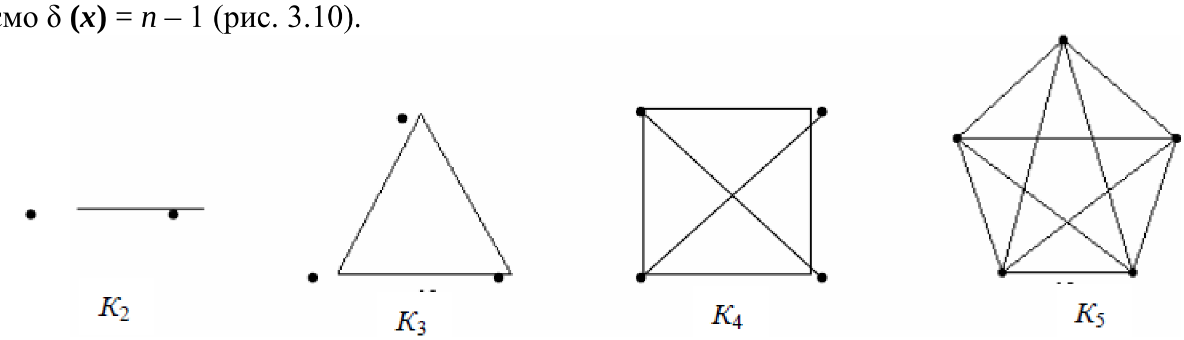
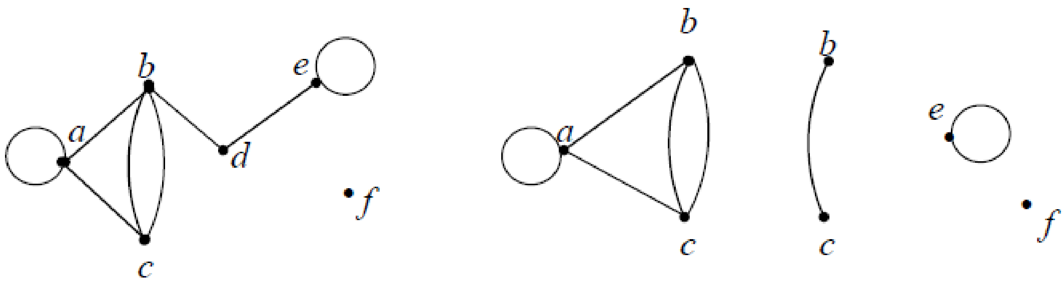


Рисунок 3.10. Повні графи

Підграфи
Нехай задано граф $\boldsymbol{G = (X, U)}$.
В и з н а ч е н н я. Граф $\boldsymbol{G1 = (X1, U1)}$ називається ***підграфом*** графа $\boldsymbol{G = (X, U)}$, якщо $\boldsymbol{X1 \subseteq X}$ та $\boldsymbol{U1 \subseteq U}$.

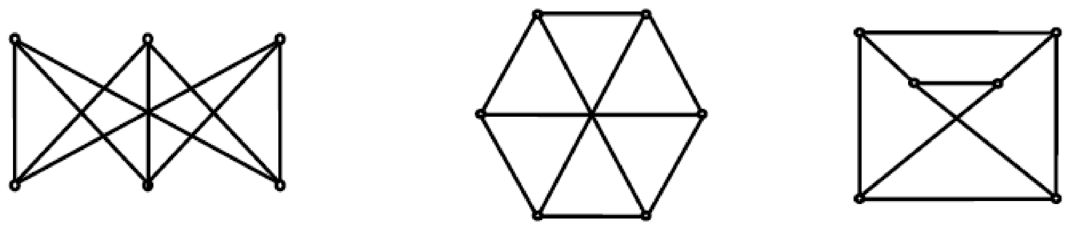


Граф G; підграф G_1; підграф G_2.

Рисунок 3.11. Підграфи графа G

Якщо вилучити з графа певні ребра та вершини, дістанемо підграфи вихідного графа.
Операція вилучення вершини v з графа $G = (V, E)$ полягає у вилученні з множини V елемента v, а з множини E -всіх ребер, інцидентних v.
Операція вилучення ребра e з графа $G = (V, E)$ - це вилучення елемента e з множини E. При цьому всі вершини зберігаються
Граф $\boldsymbol{G1 = (X1, U1)}$ називається ***кістяковим підграфом графа*** $\boldsymbol{G = (X, U)}$, якщо $\boldsymbol{X1 = X}$ та

$\boldsymbol{U1 \subseteq U}$.
Кістяковий підграф здобудемо, якщо в графі $\boldsymbol{G}$ вилучимо частину ребер, не зачіпаючи вершин. Відокремимо в графі $\boldsymbol{G}$ певну підмножину вершин $\boldsymbol{A \subseteq X}$. Нехай $\boldsymbol{UA}$ означує множину ребер графа $\boldsymbol{G}$, обидва кінці яких належать до множини $\boldsymbol{A}$. Підграф $\boldsymbol{GA = (A, UA)}$ називають підграфом, породженим множиною вершин $\boldsymbol{A}$.
Графи $G1=(V1,E1)$ і $G2=(V2,E2)$ називаються ***ізоморфними***, якщо існує таке взаємно однозначне відображення φ множини вершин $V1$ на множину вершин $V2$, що ребро $(v,w) \in E1$ тоді і тільки тоді, коли ребро $(\varphi(v), \varphi(w)) \in E2$. Відображення φ називається ***ізоморфним відображенням*** або ***ізоморфізмом*** графа $G1$ на граф $G2$.
Таким чином, ізоморфні графи відрізняються фактично лише ідентифікаторами (іменами) своїх вершин. З точки зору теорії графів ця відмінність не є суттєвою, тому звичайно ізоморфні графи ототожнюють і, зображаючи графи у вигляді діаграм, або зовсім не ідентифікують їхні вершини, або нумерують вершини натуральними числами.
Ізоморфне відображення графа G на себе називається ***автоморфізмом*** графа G.
Автоморфізм φ графа $G=(V,E)$, при якому для кожної вершини $v \in V$ виконується $\varphi(v)=v$, називається ***тривіальним автоморфізмом***.
Приклад 3.6. Пропонуємо переконатись, що всі графи, зображені на рис.3.11.2, ізоморфні між собою, а графи на рис.3.11.3 не є ізоморфними.



G_1 G_2 G_3

Рис.3.11.2

H_1 H_2

Рис.3.11.3

Способи задання графів
1) ***Скінченний граф може бути задано переліком його елементів***, тобто ***за визначенням*** (елементи позначаються латинськими літерами з індексами або просто натуральними числами).
П р и к л а д задання графа переліком його елементів.
$\boldsymbol{G = (X, U)}$; $\boldsymbol{X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}}$;
$\boldsymbol{U = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{6, 6\}, \{6, 7\}\}}$.
Такий метод не є наочний, що утруднює виявлення характеристик графа.
2) ***Геометричне задання графа***
Кожен граф може бути задано геометрично у тривимірному просторі, але не завжди його можна зобразити на площині так, щоб ребра перетинались тільки в вершинах. Граф, який може бути зображено на площині, називається ***планарним*** (рис. 3.12).

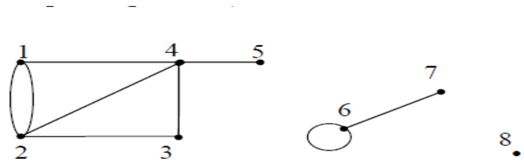


Рисунок 3.12. Планарний граф

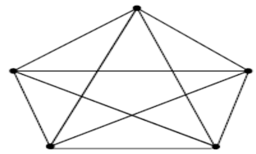


Рисунок 3.13. Непланарний граф

Не є планарним повний граф з п’ятьма вершинами (рис. 3.13).

3) ***Матричне задання графа***

Не завжди зручно задавати граф у тому вигляді, як це зазначено вище.

Наприклад, при опрацюванні графа на комп’ютері його зручно зображати в матричній формі.

1) Розглянемо $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U})$ – орграф, де $\boldsymbol{X} = \{x1, x2, \ldots, xn\}$; $\boldsymbol{U} = \{u1, u2, \ldots, um\}$.

Скінченний орієнтований граф задається матрицями суміжності та інцидентності.

Матрицею ***суміжності*** орграфа $\boldsymbol{G}$ називається квадратна матриця $A(\boldsymbol{G}) = [aij]$ порядку n, в якої:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) \in \boldsymbol{U}; \\ 0, \text{ якщо } (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) \notin \boldsymbol{U}. \end{cases}$$

Матрицею ***інцидентності*** (або матрицею ***інциденцій***) орграфа $\boldsymbol{G}$ називається матриця $B(\boldsymbol{G}) = [bij]$ порядку $n \times m$, в якої елементи:

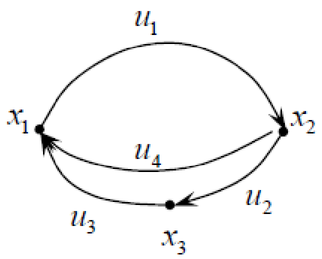


Рисунок 3.14.
Орграф $\boldsymbol{G}$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо вершина } \boldsymbol{x}_i \text{ є кінцем дуги } \boldsymbol{u}_j; \\ -1, \text{ якщо вершина } \boldsymbol{x}_i \text{ є початком дуги } \boldsymbol{u}_j; \\ 0, \text{ якщо вершина } \boldsymbol{x}_i \text{ не є інцидентна до дуги } \boldsymbol{u}_j. \end{cases}$$

П р и к л а д. Розглянемо орграф $\boldsymbol{G}$, який задано геометрично.

Для нього матриця суміжності матиме вигляд

$$A(\boldsymbol{G}) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Матриця інцидентності матиме вигляд

$$B(\boldsymbol{G}) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

2) Розглянемо $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U})$ – скінченний неорієнтований граф, де $\boldsymbol{X} = \{x1, x2, \ldots, xn\}$; $\boldsymbol{U} = \{u1, u2, \ldots, um\}$. Матрицею ***суміжності*** графа $\boldsymbol{G}$ називається квадратна матриця $A(\boldsymbol{G}) = [aij]$ порядку n, в якої:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) \in \boldsymbol{U}; \\ 0, \text{ якщо } (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) \notin \boldsymbol{U}. \end{cases}$$

Матрицею ***інцидентності*** графа $\boldsymbol{G}$ називається матриця $B(\boldsymbol{G}) = [\boldsymbol{bij}]$, порядку $n \times m$, в якої:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо вершина } \boldsymbol{x}_i \text{ є інцидентна до ребра } \boldsymbol{u}_j; \\ 0, \text{ якщо вершина } \boldsymbol{x}_i \text{ не є інцидентна до ребра } \boldsymbol{u}_j. \end{cases}$$

П р и к л а д. Розглянемо граф **G1**, заданий геометрично (рис. 3.15).
Тоді матриця суміжності *A*(**G1**) матиме вигляд

$$A(\boldsymbol{G}_1)=\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

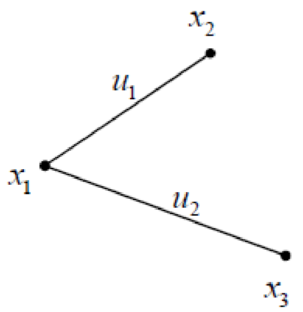


Рисунок 3.15. Граф $\boldsymbol{G}_1$

Матриця інцидентності матиме вигляд

$$B(\boldsymbol{G}_1)=\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Матрицю суміжності можна визначити і для псевдографів.
Тоді в разі орієнтованого (неорієнтованого) псевдографа *aij* = *k*, де *k* – кратність дуги **(*xi, xj*)** (ребра **{*xi, xj*}**) у цьому псевдографі.
Визначення матриці інцидентності без змін переносяться і на довільні мультиграфи (орієнтовані й неорієнтовані) і навіть на неорієнтовані псевдографи.
П р и к л а д. Нехай задано геометрично орієнтований псевдограф ***G*** (рис. 3.16).
Тоді матриця суміжності *A*(***G***) матиме вигляд

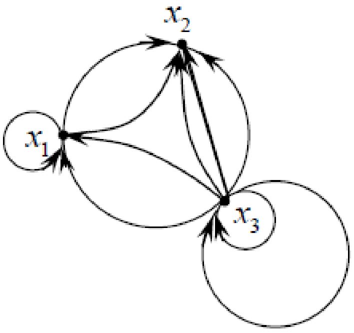


Рисунок 3.16.
Орієнтований псевдограф

$$A(G)=\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Матриця суміжності для звичайних графів і матриця інцидентності для будь-яких графів задає граф однозначно. Нескладно з'ясувати, що матриця *A*(***G***) є симетричною для кожного неорієнтованого графа ***G***. Матриця *A*(***G***), де ***G*** – орграф, у загальному випадку не є симетричною.

За допомогою матриць зручно задавати графи (орграфи) для опрацювання на комп'ютері. Однак слід зазначити, що за великої кількості вершин матриця суміжності стає громіздкою. Те саме можна сказати і про матрицю інцидентності, причому її розміри залежать, окрім того, й від кількості ребер (дуг) графа.

Операції над графами

Для графів можна означити операції об'єднання, перетину і доповнення.

Об'єднанням графів $G1=(V1,E1)$ і $G2=(V2,E2)$ називається граф $G=(V1\cup V2,E1\cup E2)$; позначається $G=G1\cup G2$. Об'єднання $G=G1\cup G2$називається ***прямою сумою*** графів $G1$ і $G2$, якщо $V1\cap V2=\varnothing$.

Перетином і ***різницею*** графів $G1=(V,E1)$ і $G2=(V,E2)$ з однаковими множинами вершин називаються графи $G'=(V,E1\cap E2)$ і $G''=(V,E1\backslash E2)$ відповідно; позначаються $G'=G1\cap G2$ і $G''=G1\backslash G2$.

Доповненням графа $G=(V,E)$ називається граф $\overline{G}=(V,V^{(2)})\backslash E)$. Отже, граф $\overline{G}$ має ту саму множину вершин *V*, що і граф *G*, а вершини графа $\overline{G}$ суміжні тоді і лише тоді, коли вони несуміжні в *G*.

Для графа *G* з *n* вершинами виконується $\overline{G}=Kn\backslash G$.

Таким чином можна означити алгебру графів $A=\langle \Gamma, \{ \cup, \cap, \overline{\ } \} \rangle$, носієм якої є множина Γ всіх графів. Існують й інші операції для графів, отже, сигнатуру алгебри A можна розширювати. Неважко переконатись у справедливості такого твердження.

Приклад. Об`єднання графів $G_1$ і $G_2$ ,що позначається як $G_1 \cup G_2$, представляє такий граф $G_3 = (X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$, що множина його вершин є об`єднанням X_1 і X_2 , а множина ребер – об`єднанням $A_1$ і $A_2$ . Граф $G_3$ , що отриманий за допомогою операції об`єднання графів G_1і G_2 , показаний на рис. 2.1,д, а його матриця суміжності – на рис. 2.1,е. Матрицю суміжності результуючого графу отримуємо за допомогою операції поелементного логічного ддавання матриць суміжності вхідних графів G_1 і G_2 .

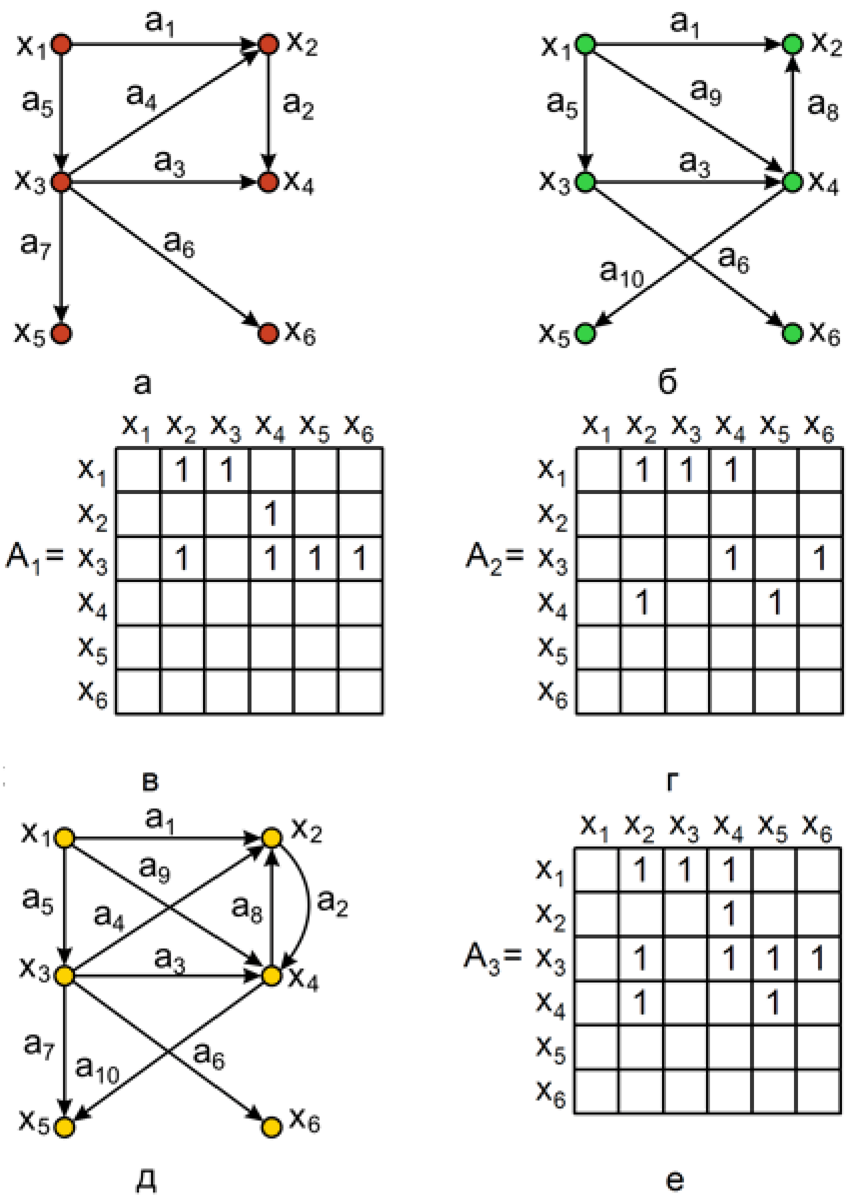


Рис. 2.1.

Перетин графів G_1 і G_2 , що позначається як $G_1 \cap G_2$, представляє собою граф $G_4 = (X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2)$. Таким чином, множина вершин графу G_4 складається з вершин, що присутні одночасно в G_1 і G_2 . Операція перетину графів $G_1 \cap G_2$показана на рис. 2.2,в, а результуючу матрицю суміжності отримуємо за допомогою операції поэлементного логічного добутку матриць суміжності вхідних графів G_1 і G_2, що показано на рис. 2.2.г.

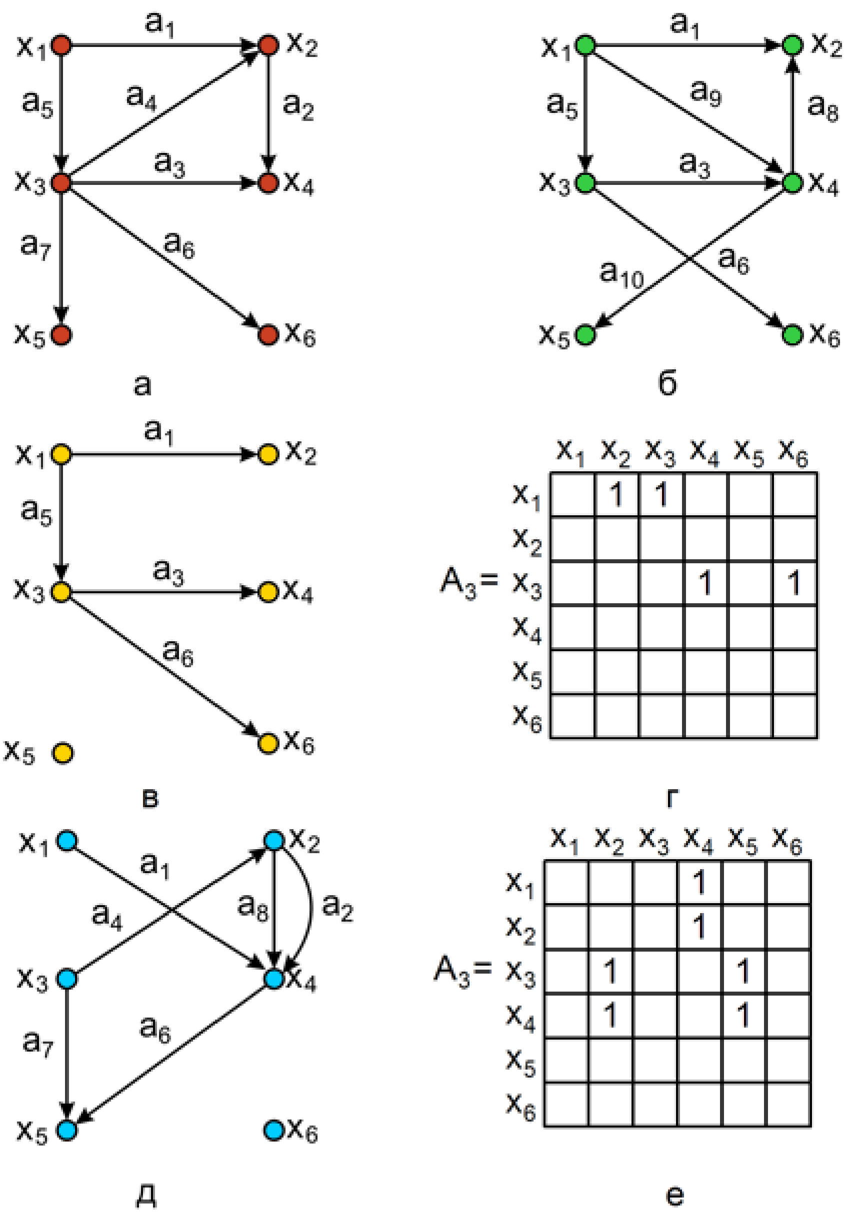


Рис. 2.2.

Рис.2.2. Операція перетину і кільцевої суми: а – граф G_1 ; б – граф G_2 ; в – граф $G_1 \cap G_2$; г – матриця суміжності графа $G_1 \cap G_2$; д – граф $G_1 \oplus G_2$; е – матриця суміжності графа $G_1 \oplus G_2$

Кільцева сума двох графів G_1 і G_2 , що позначається як $G_1 \oplus G_2$, представляє собою граф G_5 , що породжений на множині ребер $A_1 \oplus A_2$. Іншими словами, граф G_5 не має ізольованих вершин і містить тільки ребра, що присутні або в G_1 , або в G_2 , але не в обох одночасно. Кільцева сума графів G_1 і G_2 показана на рис. 2.2,д, а результуючу матрицю суміжності отримують за допомогою операції поелементного логічного додавання за mod 2 матриць суміжності вхідних графів G_1 і G_2 , що показана на рис. 2.2.е.

Легко впевнитися в тому, що три розглянуті операції комутативні тобто $G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1,\ G_1 \cap G_2 = G_2 \cap G_1,\ G_1 \oplus G_2 = G_2 \oplus G_1$, і багатомісні, тобто $G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup \ldots,\ G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4 \cap \ldots$. і так далі.

Теорема 3.2. Графи $G1$ і $G2$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли ізоморфні їхні доповнення $\overline{G1}$ і $\overline{G2}$.

Приклад 3.7. Об’єднання і перетин графів $H1$ і $H2$ з попереднього прикладу зображені на рис.3.17. Доповнення графів $G2$ і $H2$ зображені на рис.3.18.

Рис.3.17

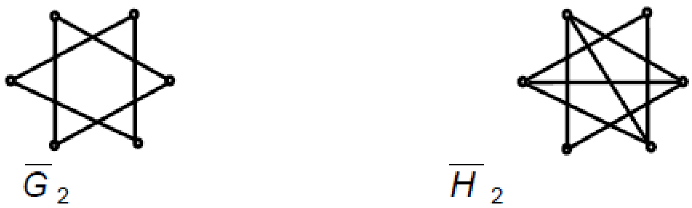


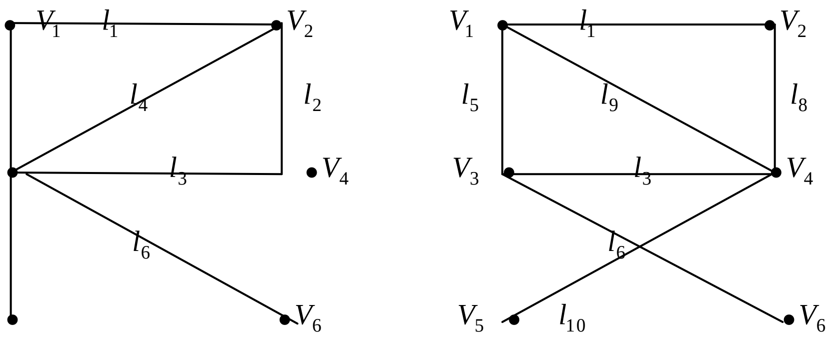
Рис. 3.18

Завдання і вправи.

1.Побудуйте граф відношення «x+y<=7» на множині M={1,2,3,4,5,6}. Визначте його властивості.

2. Нехай задано граф $G = (V, E)$; $V = \{1,2,3,4\}, E = \{(1,3),(2,3),(3,4),(4,1),(4,2)\}$. Побудувати діаграму, матриці суміжності і інцидентності.

3.



$G_1(V_1, E_1)$ $G_2(V_2, E_2)$

Визначити степінь кожної вершини графів G_1, G_2. Побудувати по два підграфи для кожного графу. Побудувати Доповнення до кожного з графів, об`єднання графів, переріз і кільцеву суму графів.