Практичне заняття №1
Поняття множини. Способи задання множин.

Канторівський вираз «Множина - це зібрання в єдине ціле певних об`єктів, чітко розрізнюваних нашою інтуїцією чи нашою думкою», - безумовно, не можна вважати строгим математичним означенням. Це, скоріше, пояснення поняття множини.

Прикладами множини можуть бути множини десяткових цифр, літер українського алфавіту, мешканців Києва, парних чисел, розв`язків якогось рівняння тощо.

На письмі множини позначають зазвичай великими літерами. Для деяких множин у математиці використовують сталі позначення, наприклад: Z – множина цілих чисел, N – множина натуральних чисел, Q – множина раціональних чисел, R – множина дійсних чисел.

Об`єкти, з яких складається задана множина, називаються її ***елементами.*** Елементи множини позначаємо малими літерами латинського алфавіту. Той факт, що об`єкт a є елементом множини M, записують так: $a \in M$(читають: «а належить множині М» або» а – елемент множини М»). ***Знак належності*** елемента множини ∈ - це стилізація першої літери грецького слова бути. Те, що елемент а не належить множині М,позначають так: $a \notin M$.

Запис $a, b, c, ... \in M$ використовують для скорочення запису $a \in M, b \in M, c \in M$ …

Множину називають ***скінченною,*** якщо кількість її елементів скінченна, тобто існує натуральне число k , що є кількістю елементів цієї множини. В іншому разі, множина є ***нескінченною***. Кількість елементів скінченної множини A традиційно позначають $|A|$.

Для ***задання множини***, утвореної з будь-яких елементів, будемо використовувати такі способи. В основі двох таких способів лежить позначення множини за допомогою фігурних дужок.

1. Якщо $a_1, a_2, ..., a_n$ - якісь об`єкти, то їх множину позначають як $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, де у фігурних дужках міститься перелік усіх елементів відповідної множини. Порядок запису елементів множини в такому позначенні неістотний.

Приклад 1.1 Множину всіх десяткових цифр записують $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, множину всіх основних математичних операцій $\{+,-,\times \div\}$, множину розв`язків нерівності $(x-1)^2 \le 0 - \{1\}$.

Одна з основних ідей канторівської теорії множин – розгляд множини як нового самостійного об`єкта математичного дослідження. Тому потрібно розрізняти такі два різні об`єкти, як елемент а та множина $\{a\}$, що складається з єдиного елемента а. Зокрема, множини можуть бути елементами якоїсь іншої множини. Наприклад, множина $D = \{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$ всіх можливих пар з елементів a,b,c складається з трьох елементів, і її задано цілком коректно.

Другий спосіб задання множин ґрунтується на зазначенні загальної властивості чи породжувальної процедури для всіх об`єктів, що утворюють описувану множину.

В загальному випадку задання множини M має вигляд $M = \{a \text{I} P(a)\}$. Цей вираз слід читати так: «M- це множина всіх тих і тільки тих елементів a, для яких виконується умова P». Через P(a) позначено або властивість, яку мають елементи множини M, або якусь породжувальну процедуру, що описує спосіб отримання елементів множини M з уже відомих її елементів чи інших об`єктів. Замість вертикальної риски іноді пишуть двокрапку.

Приклад1.2. $S = \{n\,|, n - \text{непарнечисло}\}$ або $S = \{n \mid n = 2k+1, k \in Z\}, X = \{x \mid x = \pi k, k \in Z\}, F = \{f_i \mid f_{i+2} = f_{i+1} + f_i, i \in N, f_1 = f_2 = 1\}$.

Другий спосіб задання множин більш загальний. Наприклад, уведену вище множину D всіх пар з елементів a,b,c можна задати так:

$$D = \{\{x, y\} \mid x \in \{a,b,c\}, y \in \{a,b,c\}, x \ne y\}. \tag{1.1}$$

Для зручності й одностайності виконання математичних викладок вводять поняття множини, яка не містить жодного елемента. Наприклад, якщо досліджують множину об`єктів, які мають задовольнити певні властивості, і з`ясовують, що таких об`єктів не існує, то зручніше сказати, що шукана множина порожня, ніж оголосити її такою, якої немає. Порожню множину можна означати за допомогою будь-якої суперечливої властивості, наприклад, $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$ тощо. Водночас твердженням «множина М не порожня» можна замінити рівносильне йому твердження «існує елемент, що належить множині М».

1.2. Підмножини

Дві множини А і В називають ***рівними*** (записують А=В), якщо вони складаються з тих самих елементів.

Множину А називають ***підмножиною*** множини В (записують $A \subseteq B$ чи $B \supseteq A$) тоді і тільки тоді, коли кожний елемент множини А належить також множині В. Знаки $\subseteq i \supseteq$ називають ***знаками включення***.

Неважко переконатися, що А=В тоді й тільки тоді, коли одночасно виконуються два включення: $A \subseteq B$та $B \subseteq A$. Крім того, якщо $A \subseteq B$ та $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$. Останні два факти часто використовують у доведеннях тверджень про рівність двох заданих множин.

Якщо $A \subseteq B$, однак $A \neq B$, то пишуть $A \subset B$ і називають множину А ***власною*** (строгою або істинною) ***підмножиною*** множини В. Знаки $\subset i \supset$, на відміну від знаків $\subseteq i \supseteq$ називають ***знаками строгого включення***.

Очевидно, що для будь-якої множини А виконується включення $A \subseteq A$. Крім того, вважають, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини А, тобто $\varnothing \subseteq A$ (зокрема, $\varnothing \subseteq \varnothing$).

Слід чітко розуміти різницю між знаками $\in i \subseteq$ і не плутати ситуації їх використання. Якщо $\{a\} \subseteq M, тоa \in M$, і навпаки. Однак із включення $\{a\} \subseteq M$,взагалі кажучи, не випливає $\{a\} \in M$. Для будь-якого об`єкта х виконується $x \notin \varnothing$. Наприклад, для множини D(1.1) і її елементів виконуються такі співвідношення: $\{a,b\} \in D, \{\{a,b\},\{b,c\}\} \subseteq D, a \in \{a,b\}, \{c\} \notin \{a,c\}, \{a\} \subseteq \{a,b\}$.

Множину всіх підмножин множини А і позначають $\beta(A)$. Для булана множини А використовують також інші позначення $2^A, p(A), M(A)$.

Наприклад, для множини $A = \{a,b\}$ маємо $\beta(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$, а для множини $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \beta(A) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

3.Третій спосіб задання множин носить назву діаграми Ейлера-Венна.
З визначення витікає, що рівні множини і відношення з множинами зручно ілюструвати за допомогою графічних схем, в яких множини представляються у вигляді кіл, овалів або будь-яких інших геометричних фігур і передбачається, що в цих геометричних фігурах заключені всі елементи даної множини. Такі геометричні фігури називаються ***колами Ейлера***, від імені німецького математика Леонарда Ейлера, який в 1762 році застосував цю геометричну фігуру для логічних цілей.

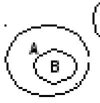

Рис.1

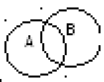

Рис.2

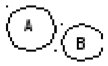

Рис.3

Наприклад, відношення включення між множинами А ={a, b, c, d, e} і В = {c, e, d} можна зобразити за допомогою кіл Ейлера так як на рисунку 1. Множини А ={a, b, c, d, e} і В = {b, d, k, e} перетинаються, але жодне з них не є підмножиною іншого, тому за допомогою діаграми Ейлера-Венна вони зображаються так як на рисунку 2.

Неперетинаємі множини зображають за допомогою двох кіл, що не мають спільних точок (Рис. 3).

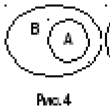

Рис.4

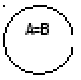

Рис.5

З`ясуємо, наприклад, як пов`язані між собою множини А парних чисел і множина В чисел, що кратні 4. В якому з випадків, представлених на рисунках, відношення між даними множинами зображені вірно?

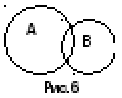

Рис.6

З рисунку 4 слідує, що всі парні числа діляться на 4, що не вірно: можна назвати числа, що не діляться на 4, наприклад 14. Цей контрприклад одразу робить неможливим рівність даних множин, тобто випадок, представлений на наступному рисунку 5.

Наступний рисунок 6 говорить про те, що серед чисел, кратних 4, є парні, але є й такі, які не діляться на 2, що не вірно: неважко довести, що будь-яке число, кратне 4, парне.

Отже, множина чисел, кратних 4, є підмножиною множини парних чисел. Цей зв`язок зображений на останньому рисунку.

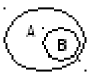

Рис.7

Обов`язкові завдання

1. Які з наведених співвідношень правильні?
   (а) $\{1,2,3\}=\{1,2,2,3\}$; (в) $\{1,2,3\}=\{1,3,2\}$;
   (б) $\{1,2,3\}=\{1,\{2\},3\}$; (г) $\{1,2,3\}=\{(1,2),(2,3)\}$ю
2. З яких елементів складається множина В, якщо $A=\{1,2,3\}$?
   (а) $B=\{y \mid y=x+z, x,z\in A\}$; (в) $B=\{y \mid y=xz, x,z\in A\}$.
   (б) $B=\{y \mid x=y+z, x,z\in A\}$;
3. Які з наведених співвідношень правильні?
   (а) $\varnothing=\{0\}$; (в) $\{1,\varnothing\}=\{1\}$; (д) $|\{\varnothing\}|=0$; (є) $|\{\varnothing,\{\varnothing\}\}|=2$;
   (б) $\varnothing=\{\ \}$; (г) $|\varnothing|=0$; (е) $|\{\varnothing\}|=1$; (ж) $|\{\{\varnothing\}\}|=2$.
4. Які з наведених співвідношень правильні?
   (а) $1\in\{1,2,3\}$; (в) $\{1\}\in\{1,2,3\}$; (д) $\{1,2\}\in\{1,2,3\}$; (є) $\{1,2\}\in\{\{1,2\}\}$; (з) $a\in\{a\}$;
   (б) $1\in\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$; (г) $\{1\}\in\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$; (е) $\{1,2\}\in\{1,2\}$; (ж) $\{1,2\}\in\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$.
5. Які з наведених співвідношень правильні?
   (а) $0\in\varnothing$; (в) $\varnothing\in\{1\}$; (д) $\varnothing\in\{\{\varnothing\}\}$;
   (б) $\varnothing\in\varnothing$; (г) $\varnothing\in\{\varnothing\}$; (е) $\{\varnothing\}\in\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.
6. Які з наведених співвідношень правильні?
   (а) $1\subseteq\{1,2,3\}$; (в) $\{1,2,3\}\subseteq\{1,2,3\}$; (д) $\{1,2\}\subseteq\{\{1\},\{1,2\}\{3\}\}$;
   (б) $\{1\}\subseteq\{1,2,3\}$; (г) $\{1\}\subseteq\{\{1\},\{2,3\}\}$; (е) $\varnothing\subseteq\{1,2,3\}$ю
7. Нехай $A=\{1,2,\{1\}\}$. Які з наведених співвідношень правильні?
   (а) $1\in A$; (б) $\{1\}\in A$; (в) $\{\{1\}\}\in A$; (г) $\{1\}\subseteq A$;
   (д) $\{\{1\}\}\subseteq A$; (ж) $\{\{2\}\}\subseteq A$; (і) $\varnothing\subseteq A$; (к) $\{\varnothing\subseteq A\}$;
   (е) $\{2\}\in A$; (з) $\{1,2\}\in A$; (ї) $\varnothing\subseteq A$; (л) $\{\varnothing,1\}\subseteq A$;
   (є) $\{2\}\subseteq A$; (и) $\{1,2\}\subseteq$ A; (й) $\{\varnothing\}\in A$; (м) $\{\varnothing,\{1\}\}\subseteq A$.
8. Які з наведених співвідношень правильні?
   (а) $\varnothing\subseteq\varnothing$; (г) $\{\varnothing\}\subseteq\{\{\varnothing\}\}$; (є) $\{\{\varnothing\}\}\subseteq\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$;
   (б) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$; (д) $\varnothing\subseteq\{1\}$; (ж) $\{\{\varnothing\}\}\subseteq\{\varnothing\}$;
   (в) $\{\varnothing\}\subseteq\varnothing$; (е) $\{\varnothing\}\subseteq\{\varnothing\}$; (з) $\{\{\varnothing\}\}\subseteq\{\{\{\varnothing\}\}\}$.
9. Чи існує така одноелементна множина В, що для якоїсь множини А одночасно виконуються співвідношення $A\in B$ і $A\subseteq B$?
10. Для множини А побудувати множину всіх її підмножин, тобто булеан Р(А):
   (а) $A=\{1,2,3\}$; (в) $A=\{1,\{2\},\{1,2\}\}$;
   (б) $A=\{\varnothing\}$; (г) $A=\{\varnothing,\{1,2\}\}$.
11. Визначити множину:
   (а) $\beta(\beta(\{1,2\}))$; (б) $\beta(\beta(\beta(\varnothing)))$.

12. Назвіть три елементи множини: а) навчальних предметів, що вивчаються в початковій школі; б) парних натуральних чисел; в) чотирикутників.

13. В – множина парних чисел. Запишіть за допомогою символів наступні висловлювання: 1) число 20 парне; 2) число 17 не є парним.
14. Запишіть, використовуючи символи: а) Число 14 – натуральне; б) Число – 7 не є натуральним; в) Число 0 – раціональне; г) $\sqrt{7}$ - число дійсне.
15. Надані числа: 325, 0, - 17, -3,8, 7. Встановіть, які з них належать множині: 1) натуральних чисел; 2) цілих чисел; 3) раціональних чисел; 4) дійсних чисел.
16. Прочитайте наступні висловлювання і вкажіть серед них істинні: 1) $100 \in N$; 2) $-8 \in Z$; 3) $-8 \notin N$; 4) $5{,}36 \in Q$; 5) $102 \notin R$; 6) $\sqrt{2} \in Q$; 7) $-7 \in R$; 8) $\frac{3}{4} \in N$; 9) $0 \in Z$.
17. Р – множина натуральних чисел, більших за 7 і менших за 14. З`ясуйте, які з чисел 13, 10, 5, 7, 14 йому належать, а які не належать. Відповідь запишіть, використовуючи знаки $\in$ і $\notin$.
18. А – множина рішень рівняння $x^2 + 1 = 0$. Чи вірно, що А – порожня множина? Наведіть приклади рівняння, множина рішень якого складається з: а) одного елементу; б) двох елементів; в) трьох елементів.
19. Запишіть за допомогою знаку дорівнює і фігурних дужок речення: 1) Х – множна чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5; 2) У - множина літер в слові «математика».
20. Множина С складається з квадрату, кола і трикутника. Чи належить цій множині діагональ квадрата?
21. Перерахуйте елементи наступної множини: А – множина непарних однозначних чисел; В - множина натуральних чисел, не менших за 5; С – множина двозначних чисел, що діляться на 10.
22. Вкажіть характеристичну властивість елементів множини: а) {а, е, е, і, о, у, є, ю, я, и}; б) {23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15 }; в) {11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99}.
23. А - множина двозначних чисел, запис яких закінчується цифрою 1. Чи належить цій множині числа 28, 31, 321, 61?
24. Надана множина А = {5, 10, 15, 25}. Вкажіть дві підмножини, що рівні множині А.
25. Відомо, що елемент а міститься в множині А і в множині В. Чи випливає з цього, що: 1) $A \subset B$; 2) $B \subset A$; 3) $A = B$?
26. Відомо, що кожен елемент множини А міститься в множині В. Чи вірно, що : 1) $A \subset B$; 2) $A = B$?
27. З множини К = {216, 546, 153, 171, 234} випишіть числа, які: 1) діляться на 3; 2) діляться на 9; 3) не діляться на 4; 4) не діляться на 5. Чи є серед отриманих підмножин таке, яке дорівнює множині К?
28. Зобразіть за допомогою діаграм Ейлера-Венна відношення між множинами А і В, якщо: 1) А – множина парних чисел, В – множина чисел, що кратні 3; 2) А - множина квадратів, В- множина прямокутників; 3) А – множина квадратів, В – множина прямокутних трикутників; 4) А – множина квадратів, В – множина прямокутників з однаковими сторонами.
29. Зобразіть за допомогою діаграм Ейлера-Венна відношення між множинами А, В і С, якщо відомо, що: 1) $A \subset B$ і $B \subset A$; 2) $A \subset B$, С перетинається з В, але не перетинається з А; 3) А, В і С перетинаються, але жодна не є підмножиною іншої.