Практичне заняття №3

Декартів (прямий добуток) множин. Бінарні відношення. Способи задання бінарних відношень.

Перш, ніж розпочати нову тему, хочу більш докладно зупинитися на прикладах, в яких необхідно довести тотожність, бо студенти роблять дуже багато помилок в своїх індивідуальних роботах, а саме в прикладах на доведення тотожностей. Отже:

Приклад 1.1. Нехай A та B – довільні множини. Довести, що співвідношення рівні між собою, тобто зі справедливості одного з них випливає справедливість усіх інших: $A \subseteq B, \overline{B} \subseteq \overline{A}, A \cup B = B, A \cap B = A, A \setminus B = \varnothing$.

Нехай $A \subseteq B$. Доведемо $\overline{B} \subseteq \overline{A}$. Розглянемо довільний елемент $x \in \overline{B}$, тоді $x \notin B$. З умови матимемо $x \notin A$, отже $x \in \overline{A}$. Нехай $\overline{B} \subseteq \overline{A}$. Доведемо рівність $A \cup B = B$, тобто два відповідні включення. Для доведення першого включення візьмемо $x \in A \cup B \Rightarrow ((x \in A) або (x \in B)) \Rightarrow ((x \notin \overline{A}) або (x \in B)) \Rightarrow ((x \notin \overline{B}) або (x \in B)) \Rightarrow ((x \in B) або (x \in B)) \Rightarrow x \in B$

З іншого боку, якщо $x \in B$, то за властивістю операції об`єднання $x \in A \cup B$. Для доведення того, що з $A \cup B = B$ випливає $A \cap B = A$, візьмемо $x \in A \cap B \Rightarrow ((x \in A)$ і $(x \in B)) \Rightarrow x \in A$. Навпаки, якщо $x \in A$, то $x \in A \cup B$, тому, за умовою $x \in B$. З $x \in A$ і $x \in B$ за означенням операції перетину маємо $x \in A \cap B$. Нехай виконується рівність $A \cap B = A$. Доведемо, що $A \setminus B = \varnothing$. Застосуємо метод доведення від супротивного. Припустімо, що існує елемент $x \in A \setminus B \Rightarrow ((x \in A) i (x \notin B)) \Rightarrow ((x \in A) i (x \notin A \cap B)) \Rightarrow ((x \in A) i (x \notin A))$. Прийшли до суперечності. Отже, припущення, що множина $A \setminus B$ не порожня неправильне. Нарешті, нехай $A \setminus B = \varnothing$. Доведемо включення $A \subseteq B$. Розглянемо елемент $x \in A$. Якщо припустити, що $x \notin B$, то отримаємо $x \in A \setminus B$, що суперечить умові. Отже, $x \in B$. Таким чином доведено рівносильність всіх п`яти відношень.

Декартів (прямий) добуток. ***Декартовим добутком*** множин A і B (позначається $A \times B$) називається множина всіх пар *(a,b)*, у яких перша компонента належить множині A ($a \in A$), а друга – множині B ($b \in B$), тобто $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Декартів добуток можна природно узагальнити для довільної скінченної сукупності множин. Якщо $A_1, A_2, ..., A_n$ - множини, то їх декартовим добутком називається множина $D = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}$, яка складається з усіх наборів $(a_1, a_2, ..., a_n)$, у кожному з яких i-й член, що називається ***i-тою координатою*** , або ***i-тою компонентою*** набору, належить множині $A_i, i = 1,2,...,n$. Декартів добуток позначають $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.

Щоб відрізняти набір $(a_1, a_2, ..., a_n)$ від множини, що складається з елементів $a_1, a_2, ..., a_n$, його записують не у фігурних, а в круглих дужках і називають ***кортежем***, ***вектором*** або ***впорядкованим набором***.

Довжиною кортежу називають кількість його координат.

Два кортежі $(a_1, a_2, ..., a_n)$ і $(b_1, b_2, ..., b_n)$ однакової довжини вважають ***рівними*** тоді і тільки тоді, коли рівні відповідні їх координати, тобто $a_i = b_i, i = 1,2,...,n$. Отже, кортежі *(a,b,c)* і *(a,c,b)* різні, а множини $\{a,b,c\} i \{a,c,b\}$ - рівні між собою.

Декартів добуток множини A на себе n разів, тобто множину $A \times A \times ... \times A$ називають ***n-м декартовим (прямим) степенем*** множини A та позначають A^n. Вважають, що $A^0 = \varnothing (n = 0)$ й $A^1 = A (n = 1)$.

Приклад 2.1. Якщо $A = \{a,b\}$ та $B = \{b,c,d\}$, то $A \times B = \{(a,b),(a,c),(a,d),(b,b),(b,c),(b,d)\}$; $A^2 = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$.

Якщо R – множина дійсних чисел, або множина точок координатної прямої, то R^2 - це множина пар *(a,b)* , де $a, b \in R$, або множина точок координатної площини.

Операція декартового добутку неасоціативна і не комутативна, тобто множини $(A \times B) \times C, A \times (B \times C)$, а також множини $A \times B$ та $B \times A$, узагалі кажучи, різні.

Зв`язок декартового добутку з іншими теоретико-множинними операціями виражають такі тотожності:

$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$;
$(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$;
$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$;
$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

Проекцією на і-ту вісь (і-тою проекцію) кортежу $w=(a_1,a_2,...,a_n)$ називається і-та координата a_i кортежу *w*б позначається $\Pr_i w$.

Прекцією кортежу $w=(a_1,a_2,...,a_n)$ на осі з номерами $i_1,i_2,...,i_n$ називається кортеж $(a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_n})$; позначається $\Pr_{i_1,i_2,...i_n} w$.

Нехай *V* – множина кортежів однакової довжини. Проекцією множини *V* на і-ту вісь (позначається $\Pr_i V$) називається множина проекцій на і-ту вісь усіх кортежів множини *V*: $\Pr_i V=\{\Pr_i v \mid v\in V\}$.

Приклад 2.2. $\Pr_{i_1,i_2,...i_n}(A_1\times A_2\times...\times A_n)=A_{i_1}\times A_{i_2}\times...\times A_{i_n}$. Якщо $V=\{(a,b,c),(a,c,d),(a,b,d)\}$, то $\Pr_1 V=\{(a)\}$, $\Pr_2 V=\{(b,c)\}$, $\Pr_3 V=\{(c,d)\}$, $\Pr_{1,3} V=\{(a,c),(a,d)\}$, $\Pr_{2,3} V=\{(b,c),(c,d),(b,d)\}$.

Фундаментальним поняттям дискретної математики є поняття «***відношення***», яке використовують для позначення зв`язку між об'єктами або поняттями.

Наприклад, властивість елементу а належати $(a\in A)$ множині А. На множині людей можна задати родинні відношення, наприклад « х сестра у». Причому, якщо взяти конкретних людей і підставляти їх імена замість х і у, то отримаємо або справедливе відношення, або хибне.

Нехай задано декартовий добуток не порожніх множин $A_1\times A_2\times...\times A_n$. Підмножина $\rho\subset A_1\times A_2\times...\times A_n$, називається n-місним відношенням на множині $A_1\times A_2\times...\times A_n$ або кортежем. Інакше кажучи, $a_1\in A_1, a_2\in A_2,...,a_n\in A_n$ перебувають у відношенні ρ, якщо $(a_1,a_2,...,a_n)\in\rho$.

При n=1, відношення ρ являються підмножинами множини А, їх називають ***одномісними*** або ***унарними***. Властивості унарного відношення ρ - це властивості самої підмножини А, тому термін відношення при n=1 вживається рідко. Якщо n=2, то відношення називають ***бінарним***. Бінарні відношення називаються основними і використовуються найчастіше.

Бінарні відношення. Відношення між парами об`єктів називають двомісними або ***бінарними***. Наприклад «х дільник у», «х студент групи у».

Бінарним відношенням між елементами множин $a\in A$ та $b\in B$ називають підмножину ρ множини $A\times B(\rho\subset A\times B)$. Позначають: $a\rho b$ або $(a,b)\in\rho$. Читається «а находиться у відношенні з в».

Областю визначення відношення ρ (позначається D_ρ) називають множину перших координат(а) елементів із ρ, ***областю значень*** (позначаються μ_ρ) називають множину других координат (в) елементів з ρ.

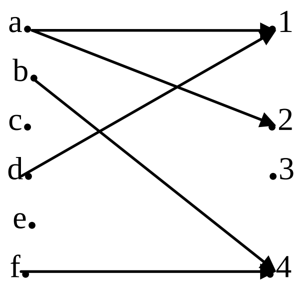
Приклад 2.3. Розглянемо відношення ρ на множинах $A=\{1,7,8,9\}$ та $B=\{5,6,10\}$, ρ - відношення « а більше за в $(a>b)$. Тоді $\rho=\{(7,5),(7,6),(8,5),(8,6),(9,5),(9,6)\}$. $D_\rho=\{7,8,9\}$. $\mu_\rho=\{5,6\}$

Способи задання відношень. Оскільки бінарні відношення є множинами, то для їх задання можна використовувати ті самі способи, що і для множин. Крім того, якщо бінарні відношення задані на скінченних множинах, то їх можна задавати за допомогою ***матриць відношень*** **та** ***графів*** (діаграм) відношень.

При ***матричному способі задання відношення*** елементам множини *A* ставляться у відповідність рядки матриці *M* (*R*) , елементам множини *B* — стовпці. Якщо пара (*a*,*b*) перебуває у відношенні *R*, то на перетині відповідного їм рядка та стовпця матриці записується одиниця, інакше — нуль.

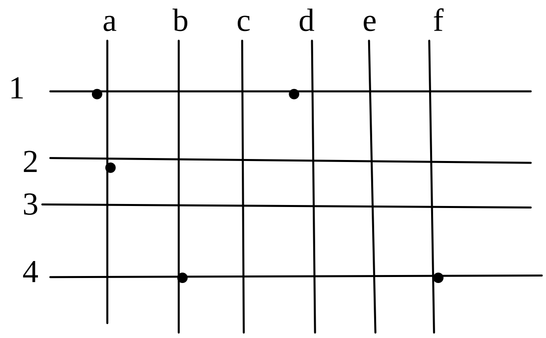
При ***графічному способі задання відношень*** елементам множин *A* та *B* ставляться у відповідність точки на площині. Якщо пара (a,b) перебуває у відношенні, то точка, яка відповідає елементу a, з'єднується направленим відрізком із точкою, яка відповідає елементу b. Проілюструємо матричний та графічний спосіб задання відношень на прикладі відношення $\rho = \{(a,1),(a,2),(b,4),(d,1),(f,4)\}$, заданого на множинах $A = \{a,b,c,d,e,f\}$ та $B = \{1,2,3,4\}$. Тоді матриця відношення ρ має вигляд:

$$M(\rho) = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline a & 1 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$



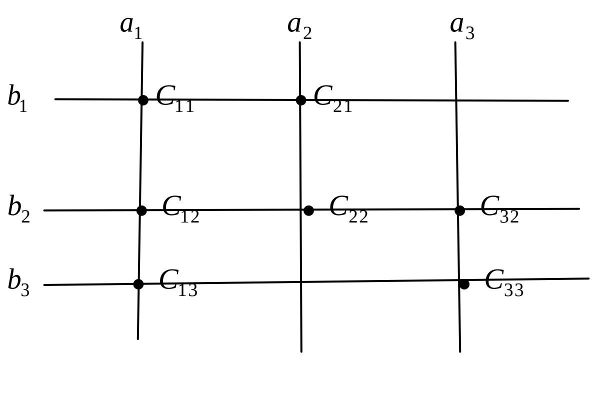
Граф відношення ρ

При ***табличному способі задання відношення*** відношення $\rho \subset A \times B$ проводять вертикалі, кожну з яких позначають деяким елементом з множини A та горизонталі, позначаючи їх елементами із множини B. Потім жирними точками позначають перетин тих прямих, які задовольняють відношенню ρ



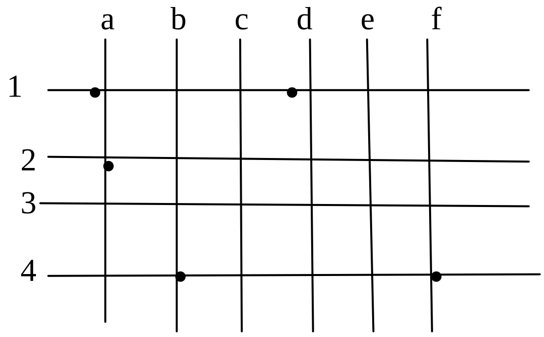
Перетини та проекції. Нехай $\alpha = (a,b)$ елемент множини $A \times B$. Елемент а називають проекцією елемента α на множину A.

Якщо $C \subset A \times B$, то проекцією C на A називають множину тих елементів з A, які є проекціями елементів із C на A. Перетином x=a множини C називають множину елементів $b_i \in B$, для яких $(a,b_i) \in C$. Наприклад:



Тоді, проекцією, наприклад $C_{13}=(a_1,b_3)$ на А буде a_1, проекцією $C_{22}=(a_2,b_2)$ на А буде a_2 Проекцією С на А є множина $\{a_1,a_2,a_3\}$. Перетином $x=a_1$ множини С є множина $\{b_1,b_2,b_3\}$, перетином $x=a_3-\{b_2,b_3\}$

Розглянемо наше відношення $\rho=\{(a,1),(a,2),(b,4),(d,1),(f,4)\}$, заданого на множинах $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ та $B=\{1,2,3,4\}$. Множина перетинів відношення ρ називається **фактор-множиною** і повністю визначає ρ.



Запишемо під кожним елементом множини А відповідний перетин множини ρ, тоді другий рядок дасть нам фактор множину В по ρ:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ \{1,2\} & \{4\} & \{\varnothing\} & \{1\} & \{\varnothing\} & \{4\} \end{pmatrix}$$

Завдання і вправи.

1.Довести тотожності $(A\cap B)\cup A=(A\cup B)\cap A=A$.

2. Для заданих множин $A=\{1,2\}, B=\{2,3,4\}$ визначити

(а) $A\times B$; (в) B^2; (д) $A\times B\times A$;

(б) $B\times A$; (г) $(B\setminus A)\times A$; (е) $A\times(A\cup B)$.

3. Довести $(A\times B)\cap(B\times A)=(A\cap B)\times(A\cap B)$.

4. Довести, що коли $B=\varnothing$, то $\Pr_1(A\times B)=A$.

5. Задати бінарне відношення всіма можливими способами:

(а) $A=\{2,4,6,8,10\}, B=\{1,3,5,7,9,11\}, R=\{(a,b)\,|\,a\in A, b\in B, a^2<b^2\}$.