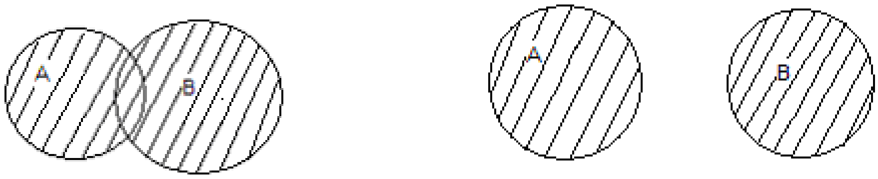
Практичне завдання №2
Операції над множинами. Вирішення задач за допомогою діаграм Ейлера-Венна

Операції над множинами

1. **Об`єднання (сума)** множин А і В позначається $A \cup B$:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}$$



2. **Перетин (добуток)** множин А і В позначається $A \cap B$:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}$$

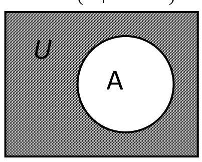
$$A \cap B = \varnothing$$

3. **Різниця множин А і В** (відносне доповнення множини В до множини А) поозначається $A \setminus B$:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}$$

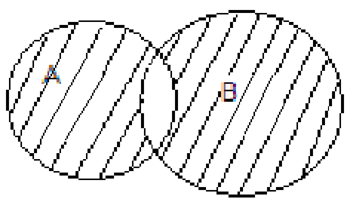
4. **Заперечення** множини А (абсолютне доповнення множини А) позначається $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$



5. **Симетрична різниця** множин А і В позначається $A \oplus B$:

$$A + B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B \text{ и } x \notin A \cap B\}$$



Основні тотожності алгебри множин

1. $A \cup A = A$ 1′. $A \cap A = A$

ідемпотентність

2. $A \cup B = B \cup A$ 2′. $A \cap B = B \cap A$

комутативність

3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ 3′. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

асоціативність

3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

дистрибутивність

5. $A \cup \varnothing = A$ 5′. $A \cap \varnothing = \varnothing$
6. $A \cup \overline{A} = U$ 6′. $A \cap \overline{A} = \varnothing$
7. $A \cup U = U$ 7′. $A \cap U = A$
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 8′. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

закони де Моргана

9. $A \cup (A \cap B) = A$ 9′. $A \cap (A \cup B) = A$

закони поглинання

10. $\overline{U} = \varnothing$ 10′. $\overline{\varnothing} = U$

11. $A \setminus \varnothing = A$
12. $A \setminus A = \varnothing$
13. $U \setminus A = \overline{A}$
14. $A \setminus U = \varnothing$
15. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
16. $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Приклад 1.3. $\{a,b\} \cup \{c,d\} = \{a,b,c,d\}$, $\{a,c\} \cup \varnothing = \{a,c\}$, $\{a,b,c\} \cup \{a,c,d,e\} = \{a,b,c,d,e\}$.

Приклад 1.4. $\{a,b,c\} \cap \{a,c,d,e\} = \{a,c\}$, $\{a,b\} \cap \{c,d\} = \varnothing$.

Кажуть, що A і B не перетинаються, якщо $A \cap B = \varnothing$.

Приклад 1.5. $\{b,c\} \setminus \{a,d,c\} = \{b\}$, $\{a,c,d,e\} \setminus \{a,b,c\} = \{d,e\}$, $\{a,b\} \setminus \varnothing = \{a,b\}$, $\{a,b\} \setminus \{a,b,c,d\} = \varnothing$.

Приклад 1.6. $\{a,b,c\} \oplus \{a,c,d,e\} = \{b,d,e\}$, $\{a,b\} \oplus \{a,b\} = \varnothing$, $\{a,b\} \oplus \varnothing = \{a,b\}$.

Приклад 1.7. Якщо як універсальну множину взяти множину N всіх натуральних чисел, то доповненням P множини P всіх парних натуральних чисел буде множина всіх непарних натуральних чисел.

Наведу також інші корисні теоретико-множинні тотожності:

$A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup U = U$, $A \cap U = A$,

$A \cup \overline{A} = U$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $\overline{U} = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = U$.

Окремо запишемо властивості операції симетричної різниці:

$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$;

$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ - асоціативність;

$A \oplus B = B \oplus A$- комутативність;

$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$ - дистрибутивність перетину;

$A \oplus A = \varnothing$; $A \oplus U = \overline{A}$; $A \oplus \varnothing = A$.

Приклад 1.8. Покажемо істинність однієї з наведених тотожностей – правила де Моргана.

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}. \qquad (1.1)$$

Доведемо спочатку, що

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B} \qquad (1.2)$$

Нехай елемент $x \in \overline{A \cup B}$. Тоді $x \in U \setminus (A \cup B)$, тобто $x \notin A$та $x \notin B$. Звідси випливає, що $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Тому має місце включення (1.2).

Доведемо обернене включення

$$\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B} \qquad (1.3)$$

Припустимо, що $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Це означає, що $x \in \overline{A}$ та $x \in \overline{B}$., тобто $x \notin A$ та $x \notin B$. Тому $x \notin A \cup B$, отже $x \in \overline{A \cup B}$. Зі справедливості обох включень (1.2) і (1.3) випливає істинність рівності (1.1).

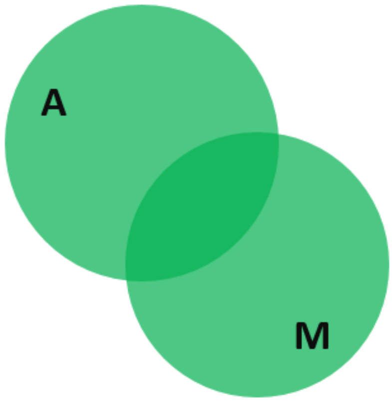
При вирішенні багатьох задач, пов`язаних з множинами, незамінним виявляється прийом, що заснований на використанні так званих «діаграм Ейлера-Венна». Ці діаграми вперше з`явилися в роботах одного з величніших математиків в історії Леонарда Ейлера. Використання кіл Ейлера додає наочності при вирішенні складних задач, роблячи деякі речі буквально очевидними. Пропоную вам в цьому впевнитись самостійно на прикладі вирішення наступної задачі.

Приклад вирішення задачі за допомогою діаграм Ейлера-Венна

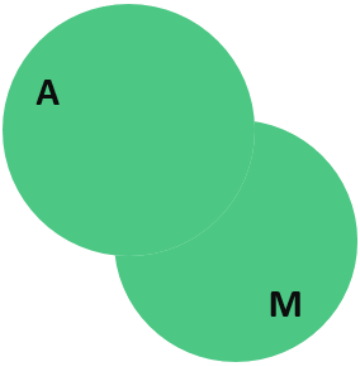
58 людей щоденно добираються на роботу міським транспортом: на автобусі, на трамваї або на метро. Кожен користується хоча б одним з видів транспорту. 42 людини з них користуються метро, 32 – трамваєм, 44 – автобусом. 21 людина з них користується метро і трамваєм, 31 – метро і автобусом, 22 – трамваєм і автобусом. Скільки серед них людей, які використовують всі три види транспорту, щоб добратися на роботу?

Тут треба розуміти, що якщо сказано, що «42 людини користуються метро», то це зовсім не означає, що окрім метро вони не користуються ніяким іншим видом транспорту. Хто-небудь з них може і користується. Може бути ще якийсь один вид транспорту, трамвай або автобус. А може одразу і обидва! Вирішення задачі як раз і складається з того, щоб порахувати людей, які користуються всіма трьома видами транспорту.

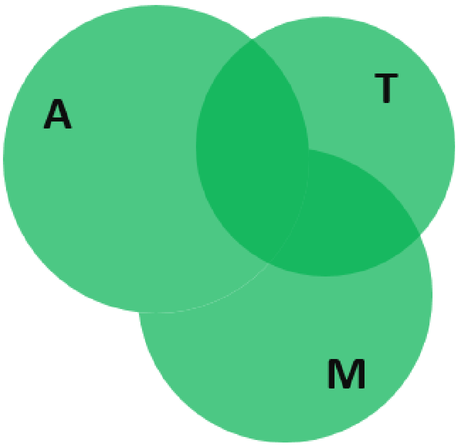
З першого погляду незрозуміло, з чого починати рішення. Але якщо подумати, стає ясно, що діяти треба за наступним алгоритмом. Будемо намагатися розписати всіх людей (58) через відомі з умови дані. Нам відомо, що автобусом користуються 44 людини. Додамо до цієї кількості людей, які користуються метро. Їх всього 42 людини. За допомогою діаграм Ейлера-Венна цю операцію можна зобразити наочно в наступному вигляді:



Тобто поки що ми маємо діло з виразом 58 = 44 + 42… Знак «…» означає, що вираз ще не закінчений. Проблема в тому, що ми порахували людей на перетині цих кіл двічі. Відповідна область на діаграмі виділена темно-зеленим кольором. Тому один раз їх треба відняти. Це люди, які користуються автобусом і метро. Їх, як відомо, 31. Тобто наш «незакінчений» вираз приймає вигляд: 58 = 44 + 42 — 31… І на діаграмі при цьому зникає темно-зелений колір:

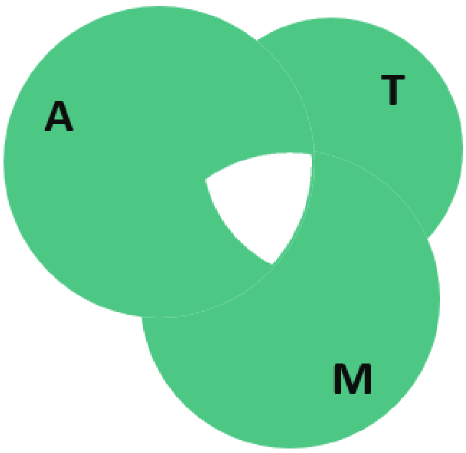


Поки все добре. Додаємо тепер людей, які їздять на трамваї. Таких людей 32. Вираз приймає вигляд: 58 = 44 + 42 — 31 + 32… Діаграма з колами Ейлера, в свою чергу, стає наступною:

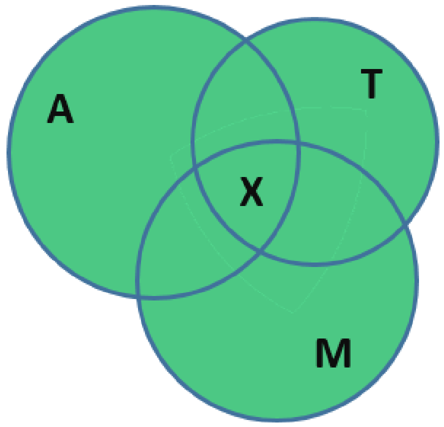


Проблема в тому, що знову ми схопили зайвого. Люди, яких ми знову порахували двічі, відмічені на діаграмі темно-зеленим кольором. Ця область знаходиться на перетині множин, які ми отримали на попередньому етапі, і множини людей, що користуються трамваєм.

Треба відняти людей, яких ми порахували двічі. Але як це зробити? Єдине, що ми можемо зробити, — це разом відняти людей, які користуються трамваєм і автобусом (їх 22 людини), а також трамваєм і метро (таких людей 21). Після цього наш незакінчений вираз для загальної кількості людей приймає вигляд: 58 = 44 + 42 — 31 + 32 — 22 — 21…, а діаграма з колами Ейлера виявиться з діркою в центрі, тому що центральну частину ми відняли двічі:



На щастя в незафарбованій області як раз і знаходяться ті люди, число яких нам потрібно порахувати. Дійсно, ці бідолахи користуються щоденно всіма трьома видами транспорту для того, щоб дістатися до роботи, бо вони знаходяться на перетині всіх трьох множин. Позначимо кількість цих бідолах за x. Тоді діаграма прийме наступний вигляд:



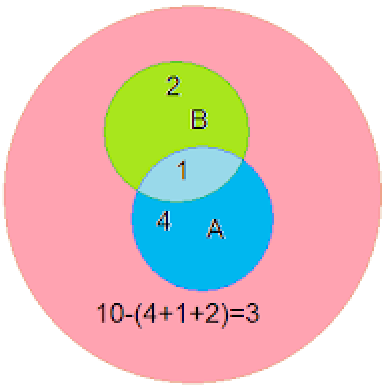
А рівняння стане наступним:

$$58 = 44 + 42 - 31 + 32 - 22 - 21 + x.$$

Розрахунки дають $x = 14$. Це і є відповіддю задачі. Стільки людей користуються всіма трьома видами транспорту кожного дня, щоб дістатися до роботи.

Ось таке просте рішення. Фактично, в одне рівняння. Просто чудово, чи не правда?! А тепер уявіть, як прийшлося б вирішувати цю задачу без використання кіл Ейлера. Це був би жах. Так що в черговий раз пересвідчуємося, що будь-які методи візуалізації дуже корисні при вирішенні задач з математики. Використовуйте їх, це допоможе вам в вирішенні складних задач як на олімпіадах.

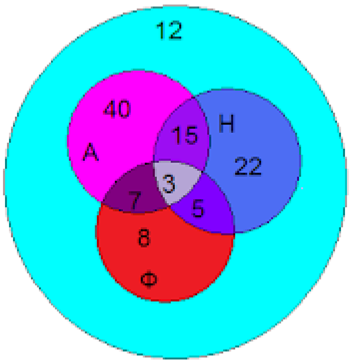
Задача 2. Скільки натуральних чисел з першого десятку не діляться ані на 2, ані на 3?



Рішення. Для вирішення задачі зручно скористуватися колами Ейлера. В нашому випадку три кола: велике коло – це множина чисел від 1 до 10, всередині великого – два менших кола, що перетинаються один з іншим. Нехай множина чисел, що кратні 2– це множина А, а множина чисел, що кратні 3 – множина В. Розмірковуємо. На 2 ділиться кожне друге число. Значить, таких чисел буде 10:2=5. На 3 діляться 3 числа (10:3). На 2 і 3 діляться ті числа, що діляться на 6. Таке число тільки одне. Тому множина А складається з 5-1=4 чисел, множина В – 3-1=2 чисел. Звідси слідує, що в першому десятку міститься 10-(4+1+2)=3 числа.

Задача 3. За допомогою кіл Ейлера можна відповісти на безліч питань, що поставлені до однієї умови задачі.

Нехай коло А відображає всіх учнів, що говорять англійською, коло Н – що говорять німецькою мовою, коло Ф – що говорять французькою. *Скільки учнів говорять: а) всіма трьома мовами? б) англійською і німецькою? в) французькою? Скільки всього учнів, що розмовляють іноземними мовами? Скільки з них не говорять французькою? Скільки з них не говорять німецькою? Скільки з них не говорять іноземними мовами?*



Відповідь: а) На всіх трьох мовах говорять 3 учні; б) Англійською і німецькою – 15 учнів; в) тільки французькою – 8 учнів. Всього 100 (40+7+3+15+5+22+8) дітей, що розмовляють іноземними мовами. Французькою не говорять 77учнів (100-(8+5+7+3).

Задачі і вправи

1. Нехай $A=\{1,3,5,6\}, B=\{1,2,3,5,7\}, C=\{2,4,7\}$. Обчислити

(а) $A\cup B$; (в) $A\cap B\cap C$; (д) $A\oplus B$;
(б) $(A\cup C)\setminus B$; (г) $(A\setminus C)\cup(B\setminus A)$; (е) $(B\setminus C)\cap(A\setminus B)$.

2. За допомогою діаграм Ейлера-Венна перевірити такі теоретико-множинні рівності:

(а) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$; (б) $(A\cap B)\cup A=(A\cup B)\cap A=A$;
(в) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$; (г) $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$;
(д) $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$; (е) $A\oplus B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

3.Що можна сказати про множини А та В, якщо

(а) $A\cup B=A\cap B$; (б) $A\setminus B=B\setminus A$; (в) $A\subseteq\overline{B}$ та $\overline{A}\subseteq B$;
(г) $A\cup B=\varnothing$; (д) $A\setminus B=A$; (е) $A\setminus B=\varnothing$;
(є) $A\setminus B=B$; (ж) $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=A\cup B$.

4. Що можна сказати про множини А та В, якщо

(а) $A\oplus B=A$; (в) $A\oplus B=\varnothing$; (д) $(A\setminus B)\oplus(B\setminus A)=\varnothing$;
(б) $A\oplus B=\overline{A}$; (г) $A\oplus B=U$; (е) $(A\cup B)\oplus A=B$

5. Шестикласники заповнювали анкету з питаннями про їхні улюблені мультфільми. Виявилося, що більшості з них подобається «Білосніжка і семеро гномів», «Губка Боб Квадратні Штані» і «Вовк і теля». В класі 38 учнів. «Білосніжка і семеро гномів» подобається 21 учню. Причому трьом з них подобається ще і «Вовк і теля», шістьом - «Губка Боб Квадратні Штані», а одна дитина однаково любить всі три мультфільми. У «Вовка і теля» 13 фанатів, п`ятеро з яких назвали в анкеті два мультфільми. Треба визначити, скільком шестикласникам подобається «Губка Боб Квадратні Штані».