МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

Н.В. Бондаренко
В.В. Отрашевська

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Київ 2026

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

Н.В. Бондаренко
В.В. Отрашевська

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Рекомендовано вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури як навчальний посібник для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань 19 «Архітектура та будівництво» за спеціальностями G19 «Будівництво та цивільна інженерія» та G18 «Геодезія та землеустрій»

Київ 2026

УДК 517.9
Б 81

Рецензенти: *О.М. Станжицький*, д.-р. фіз.-мат. наук, професор,
Київський національний університет імені
Тараса Шевченка;

І.А. Бондар, канд. фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник
Інститут математики НАН України

А.А. Кириченко, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Київський національний університет будівництва і архітектури

Затверджено на засіданні вченої ради Київського національного університету будівництва і архітектури, протокол № 34 від 27 червня 2025 року.

Бондаренко Н.В.

Б81 Диференціальні рівняння / Н.В. Бондаренко, В.В. Отрашевська. – Київ: КНУБА, 2026. – 116 с.

ISBN 978-966-627-285-3

Викладено розділ «Диференціальні рівняння» курсу «Вища математика», який включає такі теми: диференціальні рівняння першого порядку, диференціальні рівняння вищих порядків, системи диференціальних рівнянь. Містить теоретичні відомості, приклади розв'язання основних задач та вправи для самостійної роботи.

Призначено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань 19 «Архітектура та будівництво» спеціальностей G19 «Будівництво та цивільна інженерія» та G18 «Геодезія та землеустрій».

УДК 517.9

ISBN 978-966-627-285-3

Зміст

Вступ

Тема "Диференціальні рівняння" є важливою частиною курсу вищої математики. Диференціальні рівняння широко застосовуються для вирішення задач природничих, технічних та економічних наук.

У сучасному світі, де активно розвиваються технології проєктування, моделювання та управління складними інженерними системами, для майбутніх фахівців у галузі будівництва і цивільної інженерії надзвичайно важливим є розвинення математичного мислення та володіння фундаментальними математичними знаннями. Особливе значення має розуміння та засвоєння математичних методів та способів складання і розв'язання диференціальних рівнянь, які дозволяють математично описувати та аналізувати динамічні процеси в реальних інженерних і природних системах, що змінюються в часі або просторі. Диференціальні рівняння забезпечують можливість побудови динамічних математичних моделей досліджуваних реальних явищ або процесів.

Диференціальні рівняння широко використовуються в задачах будівельної галузі, зокрема, при моделюванні процесів теплопровідності, деформацій і коливань будівельних конструкцій, розрахунків навантажень, фільтрації ґрунтових вод, змін рельєфу місцевості, при знаходженні геодезичних ліній, у геодезичних вимірюваннях та багатьох інших задачах, які вирішуються фахівцями будівельної та геопросторової галузей. Розуміння сутності цих рівнянь та вміння їх розв’язувати дає змогу не лише виконувати розрахунки, але й формулювати висновки щодо подальшої поведінки об’єктів і процесів у часі та просторі.

Метою навчального посібника є формування у студентів системного уявлення про основні поняття, методи та прийоми розв’язування диференціальних рівнянь різних типів та систем диференціальних рівнянь, необхідні для успішного засвоєння загальних теоретичних та спеціальних дисциплін, передбачених навчальними програмами будівельних спеціальностей.

Навчальний посібник складається з трьох розділів: диференціальні рівняння першого порядку, диференціальні рівняння вищих порядків та системи диференціальних рівнянь. У кожному розділі подано теоретичний матеріал, який охоплює основні поняття теми, означення, твердження та теореми. Для кожної теми наведено приклади розв'язування типових задач та вправи для самостійного опрацювання, що сприяє розвитку математичного мислення, навичок системного аналізу та здатності до практичного застосування набутих знань.

У результаті вивчення розділу «Диференціальні рівняння» дисципліни «Вища математика» студенти повинні

знати:

- основні поняття та означення теорії диференціальних рівнянь першого порядку;
- поняття диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними та однорідних диференціальних рівнянь першого порядку;
- методи розв'язання лінійних диференціальних рівнянь першого порядку, рівнянь Бернуллі та рівнянь в повних диференціалах;
- формулювання задачі Коші для диференціальних рівнянь першого порядку;
- основні поняття, означення та властивості диференціальних рівнянь вищих порядків, зокрема лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків;
- метод розв'язання однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами;
- методи розв'язання лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь;
- основні поняття та властивості систем диференціальних рівнянь, зокрема лінійних систем диференціальних рівнянь;
- метод Ейлера розв'язання лінійних однорідних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

уміти:

- розв'язувати диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними та однорідні диференціальні рівняння;

- застосовувати метод Лагранжа та метод Бернуллі до розв’язання лінійних диференціальних рівнянь першого порядку та рівнянь Бернуллі;
- розв’язувати диференціальні рівняння в повних диференціалах та диференціальні рівняння, що зводяться до них з використанням інтегрувального множника;
- розв’язувати задачу Коші для диференціальних рівнянь першого порядку;
- застосовувати методи зниження порядку до диференціальних рівнянь вищих порядків, які допускають таке зниження;
- розв’язувати лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами та лінійні неоднорідні диференціальні рівняння;
- розв’язувати задачі Коші для диференціальних рівнянь першого та вищих порядків;
- розв’язувати системи лінійних диференціальних рівнянь методом виключення;
- застосовувати метод Ейлера до розв’язання лінійних однорідних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Розділ 1. Диференціальні рівняння першого порядку

1.1. Загальні відомості про диференціальні рівняння

Дослідження різноманітних природних явищ, розв'язання прикладних задач фізики, механіки, біології, економіки та інших наук часто потребує формального подання та аналізу динаміки змін тих чи інших величин. Наприклад, може досліджуватися зміна положення або температури тіла з часом, коливання рівня рідини у резервуарі, розвиток популяції певного виду бактерій, зміна вартості акцій, або перебіг інших процесів. Для математичного моделювання процесів використовуються рівняння, які встановлюють функціональний зв'язок між незалежною змінною (наприклад, часом), невідомою функцією, яка описує стан або поведінку досліджуваної системи, та похідними цієї функції, які характеризують швидкість, прискорення та інші зміни системи.

Означення. *Диференціальним рівнянням* називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну x, шукану функцію $y = y(x)$ та її похідні $y', y'', ... y^{(n)}$. Диференціальне рівняння записується у вигляді

$$F(x, y, y', y'', ... y^{(n)}) = 0. \qquad (1)$$

Якщо шукана функція $y = y(x)$ є функцією однієї змінної, то таке диференціальне рівняння називається *звичайним диференціальним рівнянням*. Якщо шукана функція є функцією кількох змінних і рівняння зв'язує незалежні змінні, функцію та її частинні похідні, то таке рівняння називається *диференціальним рівнянням у частинних похідних*. У подальшому розглядатимемо звичайні диференціальні рівняння і називатимемо їх *диференціальними рівняннями*.

Означення. *Порядком диференціального рівняння* називається порядок найвищої похідної, що міститься в цьому рівнянні.

Наприклад,

$y' - 4xy = x^2$ – диференціальне рівняння першого порядку,

$y'' + y' = 0$ – диференціальне рівняння другого порядку.

Означення. *Розв'язком диференціального рівняння* (1) порядку n називається n разів диференційовна функція $y = \varphi(x)$, яка, будучи підставленою в це рівняння, перетворює його в тотожність.

Наприклад, розв'язками диференціального рівняння $y'' + y = 0$ є функції $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, де C_1 і C_2 – довільні константи.

Процес знаходження розв’язку диференціального рівняння називається його *інтегруванням*, а графік розв’язку диференціального рівняння – *інтегральною кривою*.

Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь

Задача 1. Тіло, що має масу m, сповільнює свій рух під дією сили опору середовища, яка пропорційна квадрату швидкості v руху тіла. Знайти залежність швидкості руху тіла від часу, якщо швидкість тіла на початку сповільнення руху $v_0 = 10$ м/с. Знайти швидкість тіла через 4 с після початку сповільнення руху, якщо через 2 с після початку сповільнення руху швидкість тіла дорівнює 5 м/с.

Розв’язання. За незалежну змінну виберемо час t, який відраховується від початку сповільнення руху тіла. Тоді швидкість тіла v є функцією змінної t, тобто $v = v(t)$.

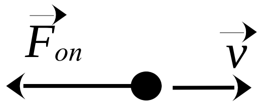


Рис. 1

Нехай F_{on} – сила опору середовища, що діє на тіло під час руху. За умовою $F_{on} = -kv^2$, де k – коефіцієнт пропорційності (знак мінус вказує на те, що швидкість тіла зменшується), v –

швидкість точки в даний момент часу (рис. 1). Згідно з другим законом Ньютона, результуюча сила F, що діє на тіло в напрямку руху тіла, дорівнює $F = m \cdot a$, де $a = v'(t)$ – прискорення рухомого тіла. Отже, маємо

$$ma = -kv^2;$$

$$m\,v'(t) = -kv^2(t); \qquad (2)$$

$$m\,\frac{dv}{dt} = -kv^2; \quad \frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m}dt;$$

$$\int \frac{dv}{v^2} = -\int \frac{k}{m}dt; \quad -\frac{1}{v} = -\frac{k}{m}t + C,\ C \in \mathbf{R}.$$

Отримали диференціальне рівняння (2), розв'язком якого є функція залежності швидкості руху тіла від часу

$$v(t) = \frac{1}{\frac{k}{m} \cdot t + C},\ C \in \mathbf{R}.$$

Знайдемо константу C та $\dfrac{k}{m}$, використовуючи умови $v(0) = v_0 = 10$ та $v(2) = 5$:

$$v(0) = \frac{1}{C} = 10,\ \ C = \frac{1}{10};$$

$$v(2) = \frac{1}{2\frac{k}{m} + \frac{1}{10}} = 5, \quad 2\frac{k}{m} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}, \quad \frac{k}{m} = \frac{1}{20}.$$

Отже, залежність швидкості тіла від часу задається функцією

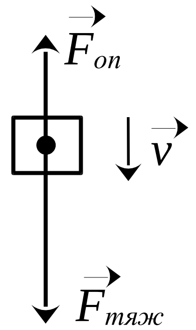
$$v(t) = \frac{20}{t+2}.$$

Швидкість тіла через 4 с після сповільнення руху дорівнює

$$v(4) = \frac{20}{4+2} \approx 3{,}33 \text{ м/с}.$$

Задача 2. Маса парашутиста з парашутом дорівнює m. Парашутист стрибає з гелікоптера з початковою швидкістю v_0. Опір повітря під час спуску парашутиста пропорційний його швидкості з коефіцієнтом пропорційності k. Визначити залежність швидкості спуску парашутиста від часу.

Розв'язання. За незалежну змінну виберемо час t, який відраховується від моменту стрибка парашутиста. Тоді його швидкість спуску v є функцією змінної t, тобто $v = v(t)$.



Під час спуску парашутиста на нього діють сила тяжіння $F_{тяж} = mg$ (напрямлена вниз) та сила опору середовища $F_{оп} = -kv$ (беремо її зі знаком мінус, бо сила напрямлена вгору, рис. 2). Тоді рівнодійна цих сил, що діє в напрямку руху парашутиста, дорівнює

Рис. 2

$$F = F_{тяж} - F_{оп} = mg - kv.$$

Згідно з другим законом Ньютона $F = ma$, де $a = v'(t)$ – прискорення парашутиста.

Отже, маємо диференціальне рівняння відносно невідомої функції $v(t)$

$$mv' = mg - kv;$$

Розв'язком диференціального рівняння є функція

$$v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k},\ C \in \mathbf{R}.$$

На початку руху, коли $t = 0$, парашутист мав швидкість $v = v_0$. Знайдемо константу C:

$$v(0) = C + \frac{mg}{k} = v_0, \quad C = v_0 - \frac{mg}{k}.$$

Таким чином, отримали залежність швидкості спуску парашутиста від часу

$$v(t) = (v_0 - \frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}.$$

Задача 3. Графік функції $y = f(x)$ проходить через точку $(1;2)$. Кожна дотична до графіка перетинає пряму $y=1$ у точці з абсцисою, що дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику. Знайти функцію.

Розв'язання.

Нехай $M(x;y)$ – довільна точка на кривій, що задана рівнянням $y = f(x)$ (рис. 3). Рівняння дотичної, проведеної до цієї кривої в точці M, має вигляд

$$Y - y = f'(x)\cdot(X - x),$$

де X, Y – координати довільної точки прямої.

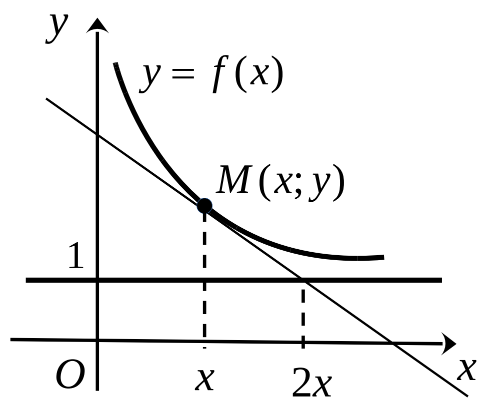


Рис. 3

За умовою, дотична перетинає пряму $y=1$ у точці з абсцисою $2x$. Отримаємо диференціальне рівняння:

$$1 - y = \frac{dy}{dx}(2x - x); \qquad x\frac{dy}{dx} = 1 - y; \qquad \frac{dy}{y-1} = -\frac{dx}{x}.$$

Розв'язком цього рівняння є функція $y - 1 = \dfrac{C}{x}$, $C \in \mathbf{R}$.

Крива проходить через точку $(1;2)$, тому $C=1$. Отже, шукана функція задається рівнянням

$$y = \frac{1}{x} + 1.$$

Контрольні запитання

1. Яке рівняння називають диференціальним?
2. Що називають порядком диференціального рівняння?
3. Яку функцію називають розв'язком диференціального рівняння?
4. Що називають інтегральною кривою диференціального рівняння?

1.2. Диференціальні рівняння першого порядку. Основні поняття та означення

Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$F(x, y, y') = 0.$$

Якщо це рівняння можна записати у вигляді

$$y' = f(x, y), \tag{3}$$

то кажуть, що воно *розв'язане відносно першої похідної*.

Для таких рівнянь справедлива теорема Коші *про існування і єдиність розв'язку диференціального рівняння*. Нехай функція $f(x, y)$ визначена в деякій відкритій області $D \subseteq \mathbf{R}^2$ зміни своїх аргументів x та y.

Теорема 1 (про існування і єдиність розв'язку). Якщо в рівнянні $y' = f(x, y)$ функція $f(x, y)$ та її частинна похідна $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ неперервні в деякій відкритій області D площини Oxy, то для довільної точки $(x_0; y_0) \in D$ існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння, визначений у деякому околі точки x_0, який задовольняє умову $\varphi(x_0) = y_0$ (або пишуть $y\big|_{x=x_0} = y_0$). Ця умова називається *початковою умовою*.

Геометричний зміст теореми 1 полягає в тому, що в разі виконання її умов через кожну внутрішню точку $(x_0; y_0)$ області D проходить єдина інтегральна крива.

Задача знаходження розв’язку $y = y(x)$ диференціального рівняння, який задовольняє початкову умову

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

називається *задачею Коші*.

Нехай D – область на площині Oxy, у кожній точці якої задача Коші для рівняння (3) має єдиний розв'язок.

Означення. *Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку* в області D називається диференційовна функція $y = \varphi(x, C)$, яка залежить від однієї довільної сталої *C* і задовольняє такі умови:

1) вона задовольняє диференціальне рівняння за будь-якої сталої *C*;

2) яка б не була початкова умова $y(x_0) = y_0$, існує єдине значення сталої $C = C_0$ таке, що розв'язок $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє цю початкову умову. Вважається, що точка $(x_0; y_0)$ належить області *D,* де справджується теорема про існування і єдиність розв'язку.

Якщо загальний розв'язок рівняння отримано у неявному вигляді $\Phi(x, y, C) = 0$, то такий розв'язок називається *загальний інтеграл*.

Означення. *Частинним розв'язком диференціального рівняння першого порядку* називається будь-яка функція $y = \varphi(x, C_0)$, яка отримана із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$ за деякого числового значення константи $C = C_0$. Якщо частинний розв'язок знайдений у неявному вигляді $\Phi(x, y, C_0) = 0$, то це *частинний інтеграл диференціального рівняння першого порядку*.

Геометрично загальний інтеграл визначає сімейство інтегральних кривих на площині *Oxy*, яке залежить від однієї сталої *C*. Частинному інтегралу відповідає одна з кривих цього сімейства, що визначається певним значенням сталої $C = C_0$ та проходить через деяку задану точку площини.

Означення. Точки $(x_0; y_0)$, в яких розв'язок диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ не існує або існує, але не єдиний, називаються *особливими*. Через особливу точку або не проходить жодна інтегральна крива, або проходить більше ніж одна інтегральна крива.

Означення. Якщо кожна точка інтегральної кривої є особливою, то така крива називається *особливою інтегральною кривою*, а розв'язок, який відповідає цій інтегральній кривій, – *особливим розв'язком*.

Для знаходження особливих точок визначається множина точок, в яких порушуються умови теореми Коші про існування і єдиність розв'язку. Умови теореми є достатніми для існування і єдиності розв'язку диференціального рівняння, але не є необхідними, тобто не кожна точка, в якій порушені умови теореми, обов'язково є особливою.

Особливий розв'язок не можна отримати із загального розв'язку за жодного значення довільної сталої C. Можливість появи таких розв'язків має враховуватися при перетвореннях у процесі інтегрування диференціального рівняння.

Нехай функція $f(x, y)$ визначена і неперервна в деякій області D на площині Oxy. Диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y) \tag{4}$$

встановлює зв'язок між координатами точки $M(x; y) \in D$ і кутовим коефіцієнтом $k = tg\alpha = y'$ дотичної до інтегральної кривої, що проходить через цю точку (рис. 4).

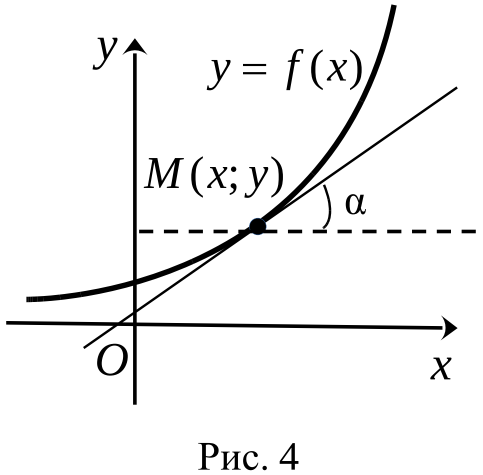


Рис. 4

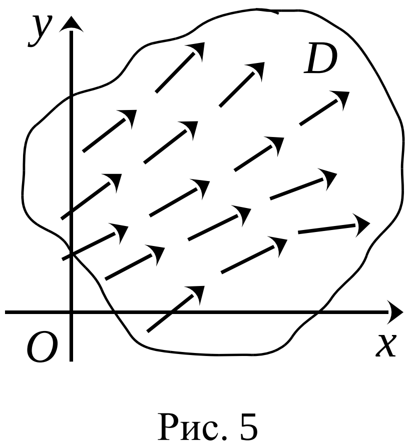


Рис. 5

Тобто диференціальне рівняння кожній точці $(x; y) \in D$ ставить у відповідність напрямок, який визначається кутом $\alpha = arctg\ y' = arctg\ f(x, y)$. Цей напрямок можна зобразити одиничним вектором з початком у точці $(x;y)\in D$. Отже, диференціальне рівняння (4) визначає сукупність напрямків, інакше кажучи, *поле напрямків* на площині Oxy (рис. 5).

Якщо в деякій точці $(x_0;y_0)$ функція $f(x,y)$ перетворюється на невизначеність $\frac{0}{0}$, то її довизначають за неперервністю, або вважають, що в точці $(x_0;y_0)$ поле напрямків невизначене, якщо функцію $f(x,y)$ не можна довизначити. Наприклад, диференціальне рівняння $y'=\frac{\sin x}{x}$ у точці $(0;0)$ породжує напрям такий, що $tg\alpha=1$, а для диференціального рівняння $y'=\frac{x+y}{x-y}$ напрям поля невизначений у точці $(0;0)$.

Інтегральна крива в кожній своїй точці дотикається до одного з векторів поля напрямків диференціального рівняння (4). Тому геометрично інтегрування диференціального рівняння полягає у знаходженні кривих, дотичні до яких у кожній своїй точці збігаються з напрямком поля.

Означення. Крива на площині Oxy, у кожній точці якої напрямок поля однаковий, називається *ізокліною*.

Дотичні прямі усіх інтегральних кривих диференціального рівняння, які перетинають ізокліну, у точках перетину утворюють з віссю абсцис один і той самий кут. Ізокліни використовують для побудови поля напрямків диференціального рівняння, за яким можна наближено побудувати інтегральні криві.

Для диференціального рівняння (4) рівняння ізоклін має вигляд $y'=C$, тобто

$$f(x,y)=C,\ C\in\mathbf{R}.$$

Різним значенням сталої C відповідають на площині Oxy різні ізокліни. Напрям поля в кожній точці ізокліни визначається кутом $\alpha=arctg\,C$.

Приклад 1. Розглянемо диференціальне рівняння
$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\ . \tag{5}$$
Ізоклінами диференціального рівняння є сімейство прямих
$$\frac{y}{x}=C\text{, або } y=Cx.$$
Якщо $C=1$, то ізокліною є пряма $y=x$, напрям поля цієї ізокліни визначається кутом $arctg\,1=\frac{\pi}{4}$. Якщо $C=\sqrt{3}$, маємо ізокліну $y=\sqrt{3}\,x$, напрям поля визначається кутом $arctg\,\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$ і т.д.

На рис. 6 стрілками зображено поле напрямків, що визначається заданим рівнянням. У початку координат $O(0;0)$ напрямок поля невизначений. Інтегральними кривими рівняння будуть прямі $y=Cx$, $x\neq 0$, $C\in\mathbf{R}$ (рис. 7), оскільки напрямки цих прямих всюди співпадають з напрямками поля.

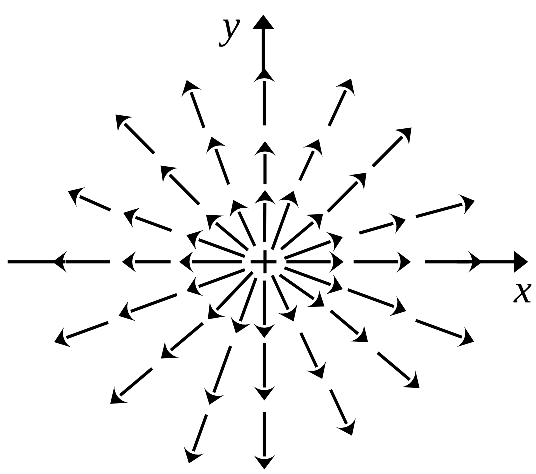


Рис. 6

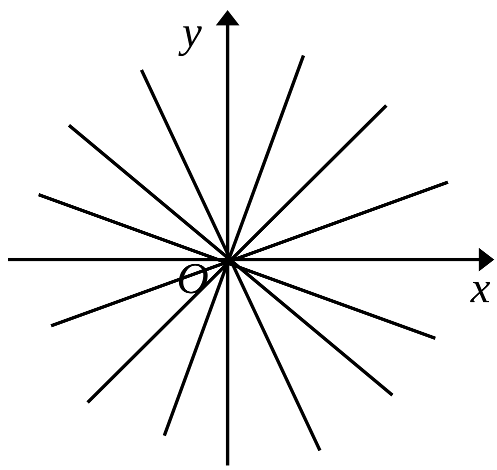


Рис. 7

Права частина рівняння (5) $f(x,y)=\frac{y}{x}$ та її частинна похідна $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{1}{x}$ неперервні при $x\neq 0$. Отже, на всій площині Oxy, крім осі Oy, права частина рівняння задовольняє умови теореми Коші про існування та єдиність розв'язку. Через кожну точку площини Oxy, що не лежить на осі Oy, проходить єдина пряма (інтегральна крива). Оскільки через початок координат $O(0;0)$ проходить нескінченна кількість інтегральних кривих, то точка O є особливою точкою, яка називається *вузлом*. Через інші точки, які лежать на осі Oy і відмінні від точки O, не проходить жодна інтегральна крива.

Приклад 2. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Зазначимо, що кутовий коефіцієнт дотичної до інтегральних кривих цього рівняння дорівнює $k_1 = -\frac{x}{y}$ та кутовий коефіцієнт дотичної $k_2 = \frac{x}{y}$ до інтегральних кривих прикладу 1 в кожній точці задовольняє умову ортогональності

$$k_1 \cdot k_2 = -\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} = -1.$$

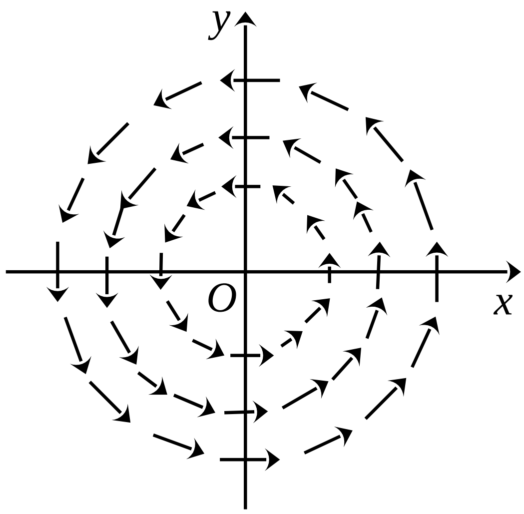


Рис. 8

Отже, поле напрямків (рис. 8), визначене розглядуваним диференціальним рівнянням, ортогональне полю напрямків, зображеному на рис. 6.

Інтегральними кривими рівняння $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ є кола з центром у початку координат $x^2 + y^2 = C^2$ (точніше – це півкола $y = \sqrt{C^2 - x^2}$ і $y = -\sqrt{C^2 - x^2}$).

У точках, які лежать на осі Ox порушуються умови теореми Коші про існування та єдиність розв'язку, оскільки функції $f(x, y) = -\frac{x}{y}$ та $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{x}{y^2}$ у точках прямої $y = 0$ мають розриви. Проте, через кожну точку осі Ox проходить єдина інтегральна крива.

Точка O є особливою точкою, яка називається *центром*. Окіл такої особливої точки заповнений сім'єю замкнених інтегральних кривих.

Зауважимо, що теорема Коші про існування та єдиність розв'язку дає лише достатні умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші, а отже, може існувати єдиний розв'язок задачі Коші, що проходить через точку $(x_0; y_0)$, навіть тоді, коли в точці $(x_0; y_0)$ не виконується одна або обидві умови теореми.

Диференціальне рівняння вважається таким, що інтегрується в квадратурах, якщо його розв'язок можна звести до обчислення скінченного числа операцій інтегрування, диференціювання відомих функцій та алгебраїчних перетворень. Зазначимо, що розв'язки диференціальних рівнянь, інтегровних у квадратурах, не завжди є елементарними функціями. Значна частина диференціальних рівнянь взагалі не піддається інтегруванню ані в елементарних функціях, ані в квадратурах. Проте, для окремих типів диференціальних рівнянь існують методи інтегрування в квадратурах, що має важливе теоретичне та прикладне значення.

Контрольні запитання

1. Яке диференціальне рівняння першого порядку називають розв'язаним відносно похідної?
2. Сформулюйте теорему про існування і єдиність розв'язку диференціального рівняння першого порядку.
3. Що називають задачею Коші?
4. Що називають загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку?
5. Який розв'язок диференціального рівняння першого порядку називають частинним розв'язком?
6. Який розв'язок диференціального рівняння першого порядку називають особливим?
7. Що називають полем напрямків диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної?
8. Яку криву називають ізокліною диференціального рівняння першого порядку?

1.3. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння першого порядку, розв'язане відносно похідної (3), можна також подати у вигляді

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \tag{6}$$

Диференціальне рівняння першого порядку, яке можна подати у вигляді

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0 \tag{7}$$

називається *рівнянням з відокремлюваними змінними*. За умови, що $Q_1(y)P_2(x) \neq 0$, поділивши ліву та праву частини рівняння на цей вираз, отримаємо *рівняння з відокремленими змінними*

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0. \tag{8}$$

У рівнянні (8) змінні відокремлені в тому розумінні, що dx множиться на функцію, що залежить тільки від *x*, а dy − на функцію, що залежить тільки від *y*, і ліва частина рівняння є сумою двох диференціалів. Загальний інтеграл рівняння має вигляд

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = C,\ C \in \mathbf{R}.$$

У разі $Q_1(y)P_2(x) = 0$ диференціальне рівняння (7) може мати як частинні розв’язки так і особливі розв'язки. Якщо розв’язки рівняння $Q_1(y)P_2(x) = 0$ є розв'язками рівняння (7) і не можуть бути отримані із загального інтеграла за жодного значення константи C, то це особливі розв’язки диференціального рівняння.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\sqrt{1-y^2}dx+(1+x^2)dy=0.$$

Розв’язання. Поділивши на добуток $\sqrt{1-y^2}\cdot(1+x^2)\neq 0$, дістанемо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dx}{(1+x^2)}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0; \qquad \int\frac{dx}{(1+x^2)}+\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0.$$

Звідки $arctgx+\arcsin y=C$ – загальний інтеграл рівняння.

Рівняння $\sqrt{1-y^2}\cdot(1+x^2)=0$ має розв’язки $y=1$ та $y=-1$, які є також розв’язками заданого диференціального рівняння. Ці розв’язки описуються загальним інтегралом диференціального рівняння.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(xy^2+y^2)dx+(x^2-x^2y)dy=0.$$

Розв’язання. Після перетворень маємо рівняння

$$y^2(x+1)dx+x^2(1-y)dy=0.$$

Розділимо змінні, поділивши на $y^2x^2\neq 0$

$$\frac{x+1}{x^2}dx+\frac{1-y}{y^2}dy=0.$$

Після інтегрування отримаємо загальний інтеграл рівняння:

$$\int\frac{x+1}{x^2}dx+\int\frac{1-y}{y^2}dy=0,$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dy}{y^2}-\int\frac{dy}{y}=C,$$

$$\ln x-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\ln y=C, \quad \ln\frac{x}{y}-\frac{x+y}{xy}=C.$$

Зауважимо, що при діленні на y^2x^2 були втрачені два розв'язки $x=0$ і $y=0$, які не можна отримати із загального інтеграла за жодного значення сталої *C*.

Приклад 5. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\frac{yy'}{x}+e^{y}=0,\ \ y(1)=0\,.$$

Розв'язання. Запишемо похідну y' у вигляді відношення диференціалів $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx}+e^{y}=0\,.$$

Розділимо змінні та проінтегруємо

$$ydy+e^{y}xdx=0\,;$$

$$ye^{-y}dy+xdx=0\,;$$

$$\int ye^{-y}dy+\int xdx=C\,.$$

Перший з інтегралів проінтегруємо частинами, позначивши

$$u=y,du=dy\,;\quad dv=e^{-y}dy\,,\ v=-e^{-y}\,.$$

$$-ye^{-y}-\int -e^{-y}dy+\frac{x^{2}}{2}=C\,;$$

$$-ye^{-y}-e^{-y}+\frac{x^{2}}{2}=C\ -\text{загальний інтеграл.}$$

Використовуючи початкову умову $y(1)=0$, знайдемо константу C:

$$0\cdot e^{0}-e^{0}+\frac{1}{2}=C\,;\ \ C=-\frac{1}{2}\,.$$

Отже, розв'язок задачі Коші

$$-ye^{-y}-e^{-y}+\frac{x^{2}}{2}=-\frac{1}{2}\,.$$

Рівняння, що зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними

Деякі диференціальні рівняння можна звести до рівнянь з відокремлюваними змінними за допомогою заміни змінних. Наприклад, рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c), \tag{9}$$

де a, b, c – дійсні числа, зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними заміною $z = ax + by + c$. Дійсно, для нових змінних x та z

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx},$$

отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z).$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, дістанемо

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx, \quad a + bf(z) \neq 0,$$

$$x = \int \frac{dz}{a + bf(z)} + C, \; C \in \mathbf{R}.$$

Після знаходження інтеграла, повернувшись до змінної y, отримаємо загальний інтеграл диференціального рівняння.

Приклад 6. Розв’язати диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = 4x + y - 1.$$

Розв’язання. Зробимо заміну $z = 4x + y - 1$:

$$\frac{dz}{dx} = 4 + \frac{dy}{dx}, \qquad \frac{dz}{dx} = 4 + z,$$

$$\frac{dz}{z + 4} = dx, \qquad \int \frac{dz}{z + 4} = \int dx,$$

$$\ln|z+4| = x + \ln|C_1|, \ C_1 \neq 0,$$

$$|z+4| = |C_1|\, e^x.$$

Враховуючи розв’язок $z=-4$, втрачений під час відокремлення змінних, отримаємо загальний розв’язок

$$z = -4 + Ce^x, \quad C \in \mathbf{R}.$$

Повернемось до змінної y:

$$4x + y - 1 = -4 + Ce^x, \quad y = -4x - 3 + Ce^x.$$

Отже, загальний розв’язок диференціального рівняння має вигляд

$$y = -4x - 3 + Ce^x, \ C \in \mathbf{R}.$$

1.4. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Означення. Функція $f(x,y)$ називається *однорідною функцією n-го виміру (порядку)* відносно змінних x та y, якщо для будь-якого числа $\lambda \neq 0$ виконується рівність

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y).$$

Наприклад, $f(x,y) = xy^2 - y^3$ – однорідна функція виміру три, $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ – однорідна функція нульового виміру.

Означення. Диференціальне рівняння $y' = f(x,y)$ називається *однорідним*, якщо $f(x,y)$ є однорідною функцією нульового виміру.

Зауважимо, що диференціальне рівняння

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

буде однорідним, якщо $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ – однорідні функції однакового виміру.

Однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними заміною $y = z \cdot x$ або $z = \dfrac{y}{x}$, де $z = z(x)$ – невідома функція.

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2 + y^2}{4x^2}.$$

Розв’язання. Функція

$$f(x, y) = \frac{4x^2 + y^2}{4x^2}$$

у правій частині рівняння є однорідною функцією нульового порядку. Дійсно,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{4(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}{4(\lambda x)^2} = \frac{4x^2 + y^2}{4x^2} = f(x, y).$$

Отже, маємо однорідне диференціальне рівняння. Зробимо заміну

$$y = z \cdot x, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \cdot x + z.$$

Після підстановки і перетворень дістанемо:

$$\frac{dz}{dx} \cdot x + z = \frac{4x^2 + z^2 x^2}{4x^2},$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot x = \frac{4 + z^2}{4} - z, \qquad \frac{dz}{dx} \cdot x = \frac{(z-2)^2}{4}.$$

Розділимо змінні, вважаючи $x \neq 0$ та $z \neq 2$:

$$\frac{4dz}{(z-2)^2} = \frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{4dz}{(z-2)^2} = \int \frac{dx}{x}.$$

$$-\frac{4}{z-2} = \ln|x| + \ln|C_1|, \;\; C_1 \neq 0,$$

$$\ln|C_1x| = -\frac{4}{\frac{y}{x}-2}, \quad Cx = e^{\frac{4x}{2x-y}},\ C \in \mathbf{R}\setminus\{0\}.$$

Отже, $Cx = e^{\frac{4x}{2x-y}}$, $C \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ – загальний інтеграл диференціального рівняння.

При відокремленні змінних ми ділили на $x \neq 0$ та $z \neq 2$. Точки, у яких $x = 0$, не входять в область визначення правої частини заданого диференціального рівняння, тому пряма $x = 0$ не є інтегральною кривою.

Нехай $z = 2$, тобто $y = 2x$. Функція $y = 2x$ перетворює дане рівняння в тотожність, тому є його розв’язком.

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$xy' = y\cdot\left(1+\ln\frac{y}{x}\right) \tag{10}$$

і його частинний розв'язок, що задовольняє початкову умову

$$y(1) = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Розв’язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$y' = \frac{y}{x}\cdot\left(1+\ln\frac{y}{x}\right).$$

Функція у правій частині рівняння залежить від $\frac{y}{x}$ і є однорідною функцією нульового порядку. Зробимо заміну:

$$y = z\cdot x,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}\cdot x + z.$$

Після підстановки отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dz}{dx}\cdot x + z = z(1+\ln z), \tag{11}$$

$$\frac{dz}{z\ln z}=\frac{dx}{x}, \qquad \int\frac{dz}{z\ln z}=\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|\ln z| = \ln|x| + \ln|C_1|, \;\; C_1 \neq 0,$$

$$|\ln z| = |xC_1|.$$

Враховуючи, що $z=0$ та $z=1$ є розв’язками диференціального рівняння (11) маємо загальний інтеграл

$$\ln z = Cx, \; C \in \mathbf{R}.$$

Підставивши $y = z\cdot x$, отримаємо:

$$\ln\frac{y}{x} = Cx,$$

$y = xe^{Cx}$ – загальний розв’язок рівняння (10).

Для знаходження частинного розв'язку підставимо в загальний розв'язок початкову умову $y(1)=e^{-\frac{1}{2}}$ і визначимо константу C: $e^{-\frac{1}{2}} = e^{C}$, $C = -\frac{1}{2}$.

Отже, шуканий частинний розв'язок $y = xe^{-\frac{1}{2}x}$.

Диференціальні рівняння, що зводяться до однорідних диференціальних рівнянь або до рівнянь з відокремлюваними змінними

Розглянемо рівняння вигляду

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right), \tag{12}$$

де $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ – відомі сталі, f – неперервна функція.

Якщо $\frac{a_1}{b_1}\neq\frac{a_2}{b_2}$, то рівняння (12) зводиться до однорідного заміною $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, де α, β – корені визначеної системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0; \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0. \end{cases}$$

Після такої заміни рівняння (12) буде однорідним диференціальним рівнянням.

Якщо $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$, то заміною $z = a_1 x + b_1 y$ або $z = a_2 x + b_2 y$ рівняння (12) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 9. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' = \frac{2x + y - 4}{x - 2y + 3}.$$

Розв'язання. Маємо рівняння вигляду (12), у якого $\dfrac{a_1}{b_1} \neq \dfrac{a_2}{b_2}$.

Система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0; \\ x - 2y + 3 = 0. \end{cases}$$

має розв'язок $x = 1,\ y = 2$.

У диференціальному рівнянні застосуємо заміну $x = u + 1,\ y = v + 2$:

$$v' = \frac{2u + 2 + v + 2 - 4}{u + 1 - 2v - 4 + 3}, \qquad v' = \frac{2u + v}{u - 2v}.$$

Отримали однорідне диференціальне рівняння. Зробимо заміну $v = z \cdot u,\ z = z(u)$:

$$\frac{dz}{du} u + z = \frac{2u + zu}{u - 2zu} = \frac{2 + z}{1 - 2z};$$

$$\frac{dz}{du} u = \frac{2 + z}{1 - 2z} - z;$$

$$\frac{dz}{du}u=\frac{2+z-z+2z^2}{1-2z}=\frac{2+2z^2}{1-2z}.$$

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними. Розділимо змінні та проінтегруємо рівняння:

$$\frac{1-2z}{2+2z^2}dz=\frac{du}{u};$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{1-2z}{z^2+1}dz=\int\frac{du}{u};$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{z^2+1}dz-\frac{1}{2}\int\frac{2z}{z^2+1}dz=\int\frac{du}{u};$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{z^2+1}dz-\frac{1}{2}\int\frac{d(z^2+1)}{z^2+1}=\int\frac{du}{u};$$

$$\frac{1}{2}arctgz-\frac{1}{2}\ln(z^2+1)=\ln|u|+C.$$

Підставивши $z=\frac{v}{u}$, отримаємо рівняння

$$\frac{1}{2}arctg\frac{v}{u}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{v^2}{u^2}+1\right)=\ln|u|+C.$$

Після підстановки $u=x-1, v=y-2$ дістанемо загальний інтеграл вихідного диференціального рівняння

$$\frac{1}{2}arctg\frac{y-2}{x-1}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(y-2)^2}{(x-1)^2}+1\right)=\ln|x-1|+C,\ C\in\mathbf{R}$$

Приклад 10. Розв’язати диференціальне рівняння

$$y'=\frac{2x+2y-1}{x+y-2}.$$

Розв’язання. Маємо рівняння вигляду (12), у якого $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$.

Зробимо заміну $z = x + y$, $y = z - x$:

$$\frac{dz}{dx} - 1 = \frac{2z - 1}{z - 2};$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2z - 1}{z - 2} + 1 = \frac{2z - 1 + z - 2}{z - 2} = \frac{3z - 3}{z - 2};$$

$$\frac{dz}{dx} = 3\frac{z - 1}{z - 2}.$$

Отримали рівняння з відокремлюваними змінними.

Відокремимо змінні в отриманому рівнянні:

$$\frac{z - 2}{3(z - 1)} dz = dx; \qquad \frac{1}{3}\int \frac{z - 2}{z - 1} dz = \int dx;$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{z - 1 - 1}{z - 1} dz = \int dx; \qquad \frac{1}{3}\int (1 - \frac{1}{z - 1}) dz = \int dx;$$

$$\frac{1}{3}(z - \ln|z - 1|) = x + C; \qquad z - \ln|z - 1| = 3x + C,$$

Підставимо $z = x + y$ та отримаємо загальний інтеграл рівняння

$$x + y - \ln|x + y - 1| = 3x + C,\ C \in \mathbf{R}.$$

Безпосередньою перевіркою можна переконатись, що функція $y = 1 - x$ є розв'язком диференціального рівняння. Вона не утворюється із загального інтеграла за жодного значення константи C.

Контрольні запитання

1. Яке диференціальне рівняння першого порядку називають рівнянням із відокремлюваними змінними? Вкажіть метод його інтегрування.

2. Дайте означення однорідного диференціального рівняння.

3. Вкажіть метод знаходження загального розв'язку однорідного диференціального рівняння першого порядку.

1.5 Лінійні диференціальні рівняння першого порядку та рівняння, які зводяться до лінійних

Означення. *Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку* називається рівняння лінійне відносно невідомої функції $y(x)$ та її похідної $y'(x)$. Лінійне рівняння першого порядку має вигляд

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{13}$$

де $P(x)$, $Q(x)$ – відомі неперервні на деякому числовому проміжку I функції.

Розглянемо два методи розв'язання лінійних рівнянь першого порядку – метод Бернуллі і метод Лагранжа.

Метод Бернуллі. Згідно з цим методом розв'язок рівняння шукається у вигляді добутку двох функцій

$$y(x) = u(x) \cdot v(x),$$

де $u = u(x)$, $v = v(x)$ – невідомі функції, причому одна з цих функцій довільна, але не рівна нулю, а інша визначається рівнянням (13). Дійсно довільну функцію $y(x)$ можна подати у вигляді

$$y(x) = \frac{y(x)}{v(x)} \cdot v(x) = u(x) \cdot v(x),$$

де $v(x) \neq 0$ – довільна функція, а $u(x) = \dfrac{y(x)}{v(x)}$.

Тоді

$$y' = u'v + uv'.$$

Підставляючи y та y' у рівняння (13), дістанемо

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x),$$

або

$$u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x). \tag{14}$$

Оскільки одну з функцій $u(x)$ або $v(x)$ можна обрати довільною, оберемо $v(x)$ такою, щоб вираз у дужках у рівнянні (14) дорівнював нулю, тобто

$$v' + P(x)v = 0.$$

Розділимо змінні і проінтегруємо:

$$\frac{dv}{v} = -P(x)dx;$$

$$\ln|v| = -\int P(x)dx + \ln|C_1|,\ C_1 \neq 0;$$

$$v(x) = Ce^{-\int P(x)dx},\ C \in \mathbf{R}.$$

Оскільки вибір функції $v(x)$ довільний, можна вважати $C = 1$. Тоді

$$v(x) = e^{-\int P(x)dx}.$$

Підставивши знайдену функцію $v(x)$ у рівняння (14), дістанемо

$$u'e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Звідки

$$u' = Q(x)e^{\int P(x)dx} \quad \text{і} \quad u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

Отже, загальний розв'язок лінійного рівняння (13)

$$y = u \cdot v = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right) \cdot e^{-\int P(x)dx},\ C \in \mathbf{R}.$$

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа). Для лінійного рівняння (13) розглянемо відповідне однорідне рівняння

$$y' + P(x)y = 0. \qquad (15)$$

Відокремивши змінні, дістанемо:

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx; \qquad \ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C_1|,\ C_1 \neq 0;$$

$$y(x) = Ce^{-\int P(x)dx},\ C \in \mathbf{R}.$$

Метод варіації довільної сталої полягає в тому, що розв'язок неоднорідного лінійного рівняння (13) шукається у вигляді

$$y(x)=C(x)e^{-\int P(x)dx}\ , \tag{16}$$

де $C(x)$ – невідома функція. Для визначення $C(x)$ розв'язок (16) підставляється у рівняння (13):

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int P(x)dx}-C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}+C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)\ ,$$

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int P(x)dx}=Q(x)\ ,$$

$$dC=Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\ ,$$

$$C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_1.$$

Далі, підставивши визначену функцію $C(x)$ у функцію (16), отримаємо загальний розв'язок рівняння (13):

$$y=\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_1\right)\cdot e^{-\int P(x)dx},\ C_1\in\mathbf{R}.$$

Приклад 11. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння

$$y'+2xy=2x^2e^{-x^2}\ . \tag{17}$$

Розв'язання. Розв'яжемо лінійне диференціального рівняння двома методами – методом Бернуллі та методом варіації довільної сталої.

Метод Бернуллі. Розв'язок шукаємо у вигляді $y=u\cdot v$. Тоді $y'=u'v+uv'$. Підставимо y та y' у рівняння

$$u'v+uv'+2xuv=2x^2e^{-x^2},$$

$$u'v+u(v'+2xv)=2x^2e^{-x^2}\ . \tag{18}$$

$$v'+2xv=0, \tag{19}$$

$$\frac{dv}{v}=-2xdx,\ \ \ln|v|=-x^2+\ln|C_1|,\ C_1\neq 0.$$

Оскільки $v=0$ також є розв'язком рівняння з відокремлюваними змінними (19) (19), то його загальний розв'язок має вигляд $v=Ce^{-x^2}$, $C\in\mathbf{R}$.

Покладемо $C=1$. Тоді $v(x)=e^{-x^2}$. Підставимо $v(x)$ в рівняння (18)

$$u'e^{-x^2}=2x^2e^{-x^2},\quad u'=2x^2,\quad u=\frac{2}{3}x^3+C.$$

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y=e^{-x^2}\left(\frac{2}{3}x^3+C\right),\ C\in\mathbf{R}.$$

Метод Лагранжа. Знайдемо розв'язок однорідного рівняння (17)

$$y'+2xy=0,$$

$$\frac{dy}{dx}=-2xy,\qquad \frac{dy}{y}=-2xdx,$$

$$\ln|y|=-x^2+\ln|C_1|,\ C_1\neq 0,$$

$$y=Ce^{-x^2},\ C\in\mathbf{R}.$$

Загальний розв'язок рівняння шукаємо у вигляді $y=C(x)e^{-x^2}$, де $C(x)$ – невідома функція.

$$\frac{dC}{dx}e^{-x^2}-2xC(x)e^{-x^2}+2xC(x)e^{-x^2}=2x^2e^{-x^2},$$

$$\frac{dC}{dx}=2x^2,\quad dC=2x^2dx,$$

$$C(x)=\frac{2}{3}x^3+C_1,\ C_1\in\mathbf{R}.$$

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y=e^{-x^2}\left(\frac{2}{3}x^3+C_1\right),\ C_1\in\mathbf{R}.$$

Рівняння Бернуллі

Диференціальне рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x) \cdot y^n, \tag{20}$$

де $P(x)$, $Q(x)$ – відомі неперервні на деякому числовому проміжку I функції, $n \in \mathbf{R}$, $n \neq 0$, $n \neq 1$, називається *рівнянням Бернуллі.*

Рівняння Бернуллі зводиться до лінійного рівняння. Розділивши рівняння на $y^n \neq 0$, дістанемо

$$y^{-n}y' + P(x)y^{-n+1} = Q(x).$$

Зробимо заміну

$$u = y^{-n+1}; \;\; u' = (1-n)y^{-n} \cdot y'.$$

Після підстановки отримаємо лінійне диференціальне рівняння:

$$\frac{1}{1-n}u' + P(x)u = Q(x),$$

або

$$u' + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x).$$

Тобто, рівняння Бернуллі зводиться до лінійного диференціального рівняння за допомогою заміни $u = y^{-n+1}$.

Зауважимо, що рівняння Бернуллі можна також розв'язувати за методом Бернуллі, тобто безпосередньо за допомогою заміни $y = u(x) \cdot v(x)$. Зазначимо, що у випадку $n > 0$, крім розв'язку $y = u(x) \cdot v(x) \neq 0$, рівняння Бернуллі має розв'язок $y = 0$.

Приклад 12. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y' + \frac{y}{x} = x^2 y^2.$$

Розв'язання. Дане рівняння є рівнянням Бернуллі. Зведемо його до лінійного. Поділимо обидві частини на y^2:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = x^2, \qquad y'y^{-2} + \frac{1}{x} \cdot y^{-1} = x^2.$$

Зробимо заміну

$$z = y^{-1}, \qquad z' = -y^{-2}y'.$$

Маємо

$$z' - \frac{1}{x}z\cdot = -x^2.$$

Отримали лінійне рівняння першого порядку відносно функції $z(x)$. Розв'яжемо його методом Бернуллі.

$$z = uv, \quad z' = u'v + uv'.$$

Підставляючи z і z' у рівняння, дістанемо

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv\cdot = -x^2, \quad \text{або} \quad u'v + u\left(v' - \frac{1}{x}v\right) = -x^2 \qquad (21)$$

Знайдемо функцію $v(x)$ таку, щоб вираз в дужках дорівнював нулю:

$$v' - \frac{1}{x}v = 0 \ \text{ або } \ v' = \frac{1}{x}v.$$

Розділимо змінні та проінтегруємо рівняння:

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{x}dx\ ; \qquad \ln|v| = \ln|x| + \ln|C|, C \neq 0 \Rightarrow \ v = x.$$

Підставивши функцію $v = x$ в рівняння (21), дістанемо

$$u'x = -x^2, \quad u' = -x,$$

$$du = -xdx, \qquad \int du = -\int xdx, \qquad u = -\frac{x^2}{2} + C.$$

Отже, загальний розв'язок лінійного рівняння

$$z = uv = \left(C - \frac{x^2}{2}\right)x = Cx - \frac{x^3}{2}.$$

Оскільки $z = y^{-1}$, маємо

$$\frac{1}{y} = \frac{2Cx - x^3}{2}\ .$$

Звідси загальний розв’язок рівняння Бернуллі

$$y=\frac{2}{2Cx-x^3},\ C\in\mathbf{R}.$$

Розв’язком рівняння Бернуллі також є функція $y=0$.

Приклад 13. Проінтегрувати диференціальне рівняння

$$y'-xy=-y^3e^{-x^2}.$$

Розв’язання. Це рівняння є рівнянням Бернуллі, у якого $n=3$. Зробимо заміну

$$y(x)=u(x)\cdot v(x); \quad y'=u'v+uv'.$$

Дістанемо

$$u'v+uv'-xuv=-u^3v^3e^{-x^2},$$

або

$$u'v+u\left(\frac{dv}{dx}-xv\right)=-u^3v^3e^{-x^2}. \tag{22}$$

Знайдемо функцію $v(x)$ таку, щоб $\frac{dv}{dx}-xv=0$.

Маємо

$$\frac{dv}{v}=xdx; \qquad \ln|v|=\frac{x^2}{2}+\ln|C_1|,\ C_1\neq 0;$$

$$v=Ce^{\frac{x^2}{2}},C\in\mathbf{R}.$$

Частинний розв'язок цього рівняння за значення $C=1$ буде $v=e^{\frac{x^2}{2}}$. Підставимо знайдену функцію $v(x)$ у рівняння (22):

$$e^{\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{du}{dx}=-u^3\cdot e^{\frac{3x^2}{2}}\cdot e^{-x^2},$$

або

$$\frac{du}{dx}=-u^3.$$

Розділимо змінні та проінтегруємо:

$$\frac{du}{u^3} = -dx; \qquad -\frac{1}{2u^2} = -x + C; \qquad u^2 = \frac{1}{2(x+C)}.$$

Отже,

$$y^2 = u^2 v^2 = \frac{e^{x^2}}{2(x+C)}$$

і $2y^2(x+C) = e^{x^2}$, $C \in \mathbf{R}$ – загальний інтеграл диференціального рівняння.

Розв'язком диференціального рівняння також є функція $y = 0$.

Рівняння Ріккаті

Рівняння виду

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x), \tag{23}$$

де $p(x), q(x), r(x)$ – задані неперервні на деякому числовому проміжку I функції, називається *рівнянням Ріккатті*.

У загальному випадку рівняння (23) не інтегрується в квадратурах. Розглянемо деякі випадки, коли це рівняння можна проінтегрувати.

1. Якщо p, q, r – сталі, то рівняння (23) є рівнянням із відокремлюваними змінними

$$y' = r - py - qy^2; \quad \frac{dy}{r - py - qy^2} = dx,$$

$$\int \frac{dy}{r - py - qy^2} = x + C, \; C \in \mathbf{R}.$$

2. Якщо $q(x) \equiv 0$, то рівняння (23) є лінійним диференціальним рівнянням.

3. Якщо $r(x) \equiv 0$, то рівняння (23) є рівнянням Бернуллі.

4. Якщо відношення $\dfrac{q(x)}{p(x)}$, $\dfrac{f(x)}{p(x)}$ – сталі, то, позначивши

$\dfrac{q(x)}{p(x)} = a$, $\dfrac{f(x)}{p(x)} = -b$, де $a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, рівняння (23) є рівнянням з відокремлюваними змінними вигляду

$$\frac{dy}{dx} + p(y^2 + ay + b) = 0.$$

5. Якщо відомий один частинний розв'язок рівняння Ріккаті $y_1 = y_1(x)$, то заміною $y = y_1(x) + z$ рівняння Ріккаті зводиться до рівняння Бернуллі.

6. Спеціальне рівняння Ріккаті

$$\frac{dy}{dx} + a\frac{y}{x} + by^2 = \frac{c}{x^2}, \quad b \neq 0,\ c \neq 0. \tag{24}$$

має частинний розв'язок $y_1 = \dfrac{k}{x}$ за деякого значення сталої $k \neq 0$ і заміною $y = \dfrac{k}{x} + z$ зводиться до рівняння Бернуллі. Якщо у рівнянні коефіцієнт $a = 0$, то заміною $y = \dfrac{z}{x}$ рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 14. Розв'язати рівняння Ріккаті

$$y' + 2\sin x \cdot y - y^2 = \cos x + \sin^2 x.$$

Розв'язання. Безпосередньою підстановкою функції $y_1(x) = \sin x$ в задане рівняння переконуємося, що вона є розв'язком рівняння.

Зробимо у диференціальному рівнянні заміну $y = \sin x + z$:

$$\cos x + \frac{dz}{dx} + 2\sin x(\sin x + z) - (\sin x + z)^2 = \cos x + \sin^2 x;$$

$$\cos x + \frac{dz}{dx} + 2\sin^2 x + 2\sin x \cdot z - \sin^2 x - 2\sin x \cdot z - z^2 = \cos x + \sin^2 x;$$

$$\frac{dz}{dx}=z^2; \quad \frac{dz}{z^2}=dx;$$

$$-\frac{1}{z}=x+C;$$

$$z=-\frac{1}{x+C}, \ C\in\mathbf{R}.$$

Функція $z=0$ також є розв'язком рівняння з відокремлюваними змінними.

Таким чином, всі розв'язки рівняння Ріккаті:

$$y=\sin x \ \text{та} \ y=\sin x-\frac{1}{x+C}, \ C\in\mathbf{R}.$$

Приклад 15. Розв'язати рівняння Ріккаті

$$y'+y^2=\frac{2}{x^2}.$$

Розв'язання. Маємо рівняння Ріккаті виду (24), у якого коефіцієнт $a=0$. Зробимо у диференціальному рівнянні заміну $y=\dfrac{z}{x}$:

$$\frac{1}{x}\frac{dz}{dx}-\frac{z}{x^2}+\frac{z^2}{x^2}=\frac{2}{x^2}; \qquad \frac{dz}{dx}=\frac{z}{x}-\frac{z^2}{x}+\frac{2}{x};$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z-z^2+2}{x}; \qquad \frac{dz}{z^2-z-2}=-\frac{dx}{x};$$

$$\int\frac{dz}{(z-2)(z+1)}=-\int\frac{dx}{x};$$

$$\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z+1}\right)dz=-\int\frac{dx}{x};$$

$$\frac{1}{3}(\ln|z-2|-\ln|z+1|)=-\ln|x|+C;$$

$$\ln\left|\frac{z-2}{z+1}\right| = -3\ln|x| + C,\ C \in \mathbf{R}.$$

Функції $z = -1$, $z = 2$ також є розв'язками диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.

Таким чином, всі розв'язки рівняння Ріккаті:

$$y = -\frac{1}{x},\ y = \frac{2}{x},\ \ln\left|\frac{xy-2}{xy+1}\right| = -3\ln|x| + C,\ C \in \mathbf{R}.$$

1.6. Рівняння в повних диференціалах

Вираз виду

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

називається *повним диференціалом*, якщо існує функція двох змінних $u(x,y)$, для якої

$$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Нагадаємо, що диференціал функції $u = u(x,y)$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Означення. Диференціальне рівняння

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{25}$$

у якому вираз у лівій частині є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, називається *рівнянням у повних диференціалах*.

Рівняння в повних диференціалах можна записати у вигляді

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

і його загальний інтеграл має вигляд $u(x,y) = C$, де C – довільна стала. Інтегрування цього рівняння зводиться до знаходження функції за її повним диференціалом.

Твердження 1. Для того, щоб вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, де функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ та їхні частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в деякій області *D* площини *Oxy*, був повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$ необхідно і достатньо виконання умови

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (26)$$

Доведення. *Необхідність.* Якщо $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ є повним диференціалом, то існує така функція $u(x,y)$, що

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

Тоді

$$P(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x} \text{ і } Q(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Диференціюючи ці рівності за змінними *y* та *x* відповідно, дістанемо

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \text{ і } \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

Із неперервності мішаних частинних похідних другого порядку випливає

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Достатність. Нехай в області *D* функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ мають неперервні частинні похідні й виконується рівність $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Доведемо, що існує така функція $u(x,y)$, що

$$du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

Функція $u(x,y)$ має задовольняти умови:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y). \qquad (27)$$

Знайдемо функцію $u(x,y)$ шляхом інтегрування першої рівності $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$ за змінною x:

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y),$$

де $\varphi(y)$ – довільна функція, яка залежить тільки від змінної y, оскільки при інтегрування за змінною x стала інтегрування може бути функцією від змінної y.

Далі, використовуючи другу з рівностей (27) знайдемо функцію $\varphi(y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right) + \varphi'(y) = Q(x,y),$$

$$\varphi'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right). \qquad (28)$$

Оскільки за умовою виконується рівність $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то права частина рівності (28) не залежить від змінної x і функція $\varphi(y)$ визначається шляхом інтегрування за змінною y. Дійсно продиференціюємо праву частину рівності (28) за змінною x і покажемо, що ця похідна дорівнює нулю.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\int P(x,y)dx\right)\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Остаточно функція $u(x,y)$ має вигляд

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y),$$

де

$$\varphi(y)=\int\left(Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right)\right)dy+C, C\in\mathbf{R}. \qquad \blacksquare$$

Згідно з твердженням загальний інтеграл рівняння в повних диференціалах (25) має вигляд

$$u(x,y)=\int P(x,y)dx+\int\left(Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right)\right)dy+C,\ C\in\mathbf{R}.$$

Для розв'язання рівняння у повних диференціалах (25) спочатку перевіряється виконання умови (26). Потім, використовуючи одне з рівнянь (27), знаходиться функція $u(x,y)$ з точністю до невідомої функції $\varphi(y)$ або $\varphi(x)$. Ця невідома функція визначається із другого з рівнянь (27).

Зауваження. Функцію $u(x,y)$ також можна визначити за її повним диференціалом $du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, взявши криволінійний інтеграл від виразу $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ між деякою фіксованою точкою $(x_0;y_0)$ та точкою зі змінними координатами $(x;y)$ за будь-яким шляхом

$$u(x,y)=\int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

За шлях інтегрування зручно брати ламану, що складається з двох відрізків, паралельних осям координат (рис. 9).

Загальний інтеграл рівняння в повних диференціалах (25) має вигляд

$$u(x,y)=\int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y_0)}P(x,y)dx+\int\limits_{(x;y_0)}^{(x;y)}Q(x,y)dy=C.$$

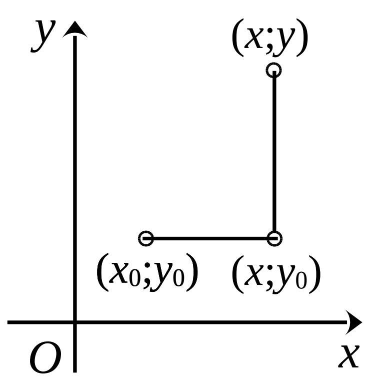


Рис. 9

Приклад 16. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$e^{-y}dx+(1-xe^{-y})dy=0.$$

Розв'язання. У цьому рівнянні

$$P(x,y)=e^{-y},\quad Q(x,y)=1-xe^{-y}.$$

Оскільки

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-e^{-y} \quad \text{і} \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-e^{-y},$$

то умова $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ виконується, тобто диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах і ліва частина рівняння є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, причому

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)=e^{-y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=1-xe^{-y}. \tag{29}$$

Інтегруючи перше з рівнянь (29) за змінною x (вважаючи y сталою), знайдемо функцію $u(x,y)$ з точністю до довільної диференційовної функції $\varphi(y)$:

$$u(x,y)=\int e^{-y}dx+\varphi(y),\qquad u(x,y)=xe^{-y}+\varphi(y).$$

Функцію $\varphi(y)$ знайдемо із другого з рівнянь (29):

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-xe^{-y}+\varphi'(y)=1-xe^{-y}.$$

Звідси

$$\varphi'(y)=1 \;\text{ і }\; \varphi(y)=y+C_1.$$

Отже, отримали

$$u(x,y)=xe^{-y}+y+C_1.$$

Загальний інтеграл диференціального рівняння має вигляд $xe^{-y}+y+C_1=C_2$, або, позначивши $C=C_2-C_1$, остаточно дістанемо

$$xe^{-y}+y=C,\; C\in\mathbf{R}.$$

Рівняння, що зводяться до рівнянь у повних диференціалах

Якщо для рівняння $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ умова (26) $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ не виконується, то у деяких випадках таке рівняння можна звести до рівняння в повних диференціалах множенням його на так званий *інтегрувальний множник* $m(x,y)$

$$m(x,y)P(x,y)dx+m(x,y)Q(x,y)dy=0. \tag{30}$$

Для того, щоб після множення отримане рівняння (30) стало рівнянням у повних диференціалах, має виконуватись рівність

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(m(x,y)P(x,y)\big)=\frac{\partial}{\partial x}\big(m(x,y)Q(x,y)\big).$$

Тобто

$$\frac{\partial m}{\partial y}P+m\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial m}{\partial x}Q+m\frac{\partial Q}{\partial x};$$

$$m\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=Q\frac{\partial m}{\partial x}-P\frac{\partial m}{\partial y}. \tag{31}$$

В окремих випадках з рівності (31) можна знайти інтегрувальний множник рівняння (30). Розглянемо деякі такі випадки.

1. Якщо інтегрувальний множник залежить тільки від x, тобто $m=m(x)$, тоді для знаходження інтегрувального множника потрібно розв'язати рівняння:

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{\partial x}=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}; \tag{32}$$

$$m(x)=\exp\left(\int\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx\right). \qquad (33)$$

Із рівняння (32) випливає, що для існування інтегрувального множника $m=m(x)$, який залежить тільки від x, необхідно, щоб вираз

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$$

був функцією лише від x.

2. Якщо інтегрувальний множник залежить тільки від y, тобто $m=m(y)$, тоді для знаходження інтегрувального множника потрібно розв'язати рівняння

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{\partial y}=\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{-P}; \qquad (34)$$

$$m(y)=\exp\left(\int\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial y}-\dfrac{\partial P}{\partial x}}{P}dx\right). \qquad (35)$$

Із рівняння (34) випливає, що для існування інтегрувального множника $m=m(y)$, який залежить тільки від y, необхідно, щоб вираз

$$\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial y}-\dfrac{\partial P}{\partial x}}{P}$$

був функцією лише від y.

3. Якщо інтегрувальний множник є функцією вигляду

$m = m(\omega(x, y))$, де $\omega(x, y)$ – деяка відома функція, то його можна знайти з рівняння

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{\partial\omega} = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q\dfrac{\partial\omega}{\partial x} - P\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}. \qquad (36)$$

Приклад 17. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(x^2 - \sin^2 y)dx + x\sin 2y dy = 0 \qquad (37)$$

Розв’язання. Перевіримо, чи є дане рівняння рівнянням у повних диференціалах

$$P(x, y) = x^2 - \sin^2 y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -2\sin y\cos y = -\sin 2y;$$

$$Q(x, y) = x\sin 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \sin 2y; \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Отже, дане рівняння не є рівнянням у повних диференціалах.

Оскільки вираз

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{-2\sin 2y}{x\sin 2y} = -\frac{2}{x}$$

залежить тільки від x, то існує інтегрувальний множник, який знаходимо за формулою (33):

$$m(x) = \exp\left(\int \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx\right) = e^{-2\int \frac{1}{x}dx} = e^{-2\ln|x|} = \frac{1}{x^2}.$$

Домноживши рівняння (37) на $\dfrac{1}{x^2}$, отримаємо рівняння в повних диференціалах

$$(1-\frac{\sin^2 y}{x^2})dx+\frac{\sin 2y}{x}dy=0.$$

Далі маємо:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=1-\dfrac{\sin^2 y}{x^2},\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\sin 2y}{x};\end{cases}$$

$$u=x+\frac{\sin^2 y}{x}+\varphi(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2\sin y\cos y}{x}+\varphi'(y).$$

$$\frac{\sin 2y}{x}=\frac{\sin 2y}{x}+\varphi'(y), \quad \varphi'(y)=0, \qquad \varphi(y)=C_1,\ C_1\in\mathbf{R}.$$

Отже, загальний інтеграл диференціального рівняння (37) має вигляд

$$x+\frac{\sin^2 y}{x}=C,\ C\in\mathbf{R}.$$

Приклад 18. Розв’язати диференціальне рівняння

$$ydx-(x+x^2+y^2)dy=0. \tag{38}$$

Розв’язання. Маємо $P(x,y)=y$, $Q(x,y)=-x-x^2-y^2$.

Знайдемо інтегрувальний множник у вигляді $m(x,y)=m(x^2+y^2)$, $\omega=x^2+y^2$. Розв’яжемо рівняння (36)

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{\partial\omega}=\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-P\dfrac{\partial\omega}{\partial y}};$$

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{\partial\omega}=\frac{1+1+2x}{-(x+x^2+y^2)\cdot 2x-y\cdot 2y}=-\frac{x+1}{x^2+y^2+x(x^2+y^2)}.$$

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{\partial\omega}=-\frac{1}{\omega}; \qquad \frac{dm}{m}=-\frac{\partial\omega}{\omega},$$

$$\ln|m| = -\ln|\omega| + \ln|C_1|,\, C_1 \neq 0, \quad m = C_1\omega^{-1}.$$

Поклавши $C_1 = 1$, отримаємо інтегрувальний множник

$$m = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Домноживши диференціальне рівняння (38) на $\dfrac{1}{x^2 + y^2}$, отримаємо рівняння в повних диференціалах

$$\frac{y}{x^2 + y^2}dx - \frac{x + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}dy = 0.$$

Далі маємо:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2 + y^2}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{x + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}; \end{cases}$$

$$u = arctg\frac{x}{y} + \varphi(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2} + \varphi'(y).$$

$$-\frac{x + x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = -\frac{x}{x^2 + y^2} + \varphi'(y),$$

$$-\frac{x}{x^2 + y^2} - 1 = -\frac{x}{x^2 + y^2} + \varphi'(y),$$

$$\varphi'(y) = -1, \quad \varphi(y) = -y + C_2,\ C_2 \in \mathbf{R}.$$

Отже, загальний інтеграл диференціального рівняння (38) має вигляд

$$arctg\frac{x}{y} - y = C,\ C \in \mathbf{R}.$$

Контрольні запитання

1. Яке рівняння називають лінійним диференціальним рівнянням першого порядку? У чому суть методу Бернуллі та методу Лагранжа розв'язання лінійного диференціального рівняння першого порядку?

2. Що називають диференціальним рівнянням Бернуллі і в чому суть методу його розв’язання?

3. Яке диференціальне рівняння називають рівнянням у повних диференціалах?

4. Наведіть основні типи диференціальних рівнянь першого порядку, які можна звести до рівнянь у повних диференціалах за допомогою інтегрувального множника?

Вправи

1. Розв’яжіть диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

а) $y^3dx + xdy = 0$;

б) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$;

в) $(xy - x)^2 dy + y(1-x)dx = 0$;

д) $y' - xy^2 = 2xy$;

г) $xyy' = 1 - x^2$;

е) $(5 + e^x)yy' = e^x$;

ж) $xy(1 + x^2)y' = 1 + y^2$;

з) $(1 + y^2)dx + xydy = 0$;

и) $xy' = y\ln y$;

к) $(x-2)yy' = e^{-y^2}$;

л) $y^3dx + x(\ln x + 1)dy = 0$;

м) $y\sin x dx + \cos^2 x \ln y dy = 0$;

н) $xy(1 + x^2)y' = 1 + y^2$;

о) $\sqrt{1 - x^2}\, y' + xy^2 + x = 0$;

п) $\cos y e^x dx + (1 + e^{2x})\sin y dy = 0$;

р) $2(x^2y + y)dy + \sqrt{1 + y^2}dx = 0$;

с) $y' = (3y + 2)ctgx$;

т) $y'\cos x = (y+1)\sin x$.

2. Розв’яжіть однорідні диференціальні рівняння.

а) $(x-y)dx+(x+y)dy=0$;

б) $(x^2+y^2)y'=2xy$;

в) $(x^2-xy)dy+y^2dx=0$;

г) $x^2y'=y^2+xy$;

д) $(y^2-2xy)dy+x^2dx=0$;

ж) $xy'\cos\frac{y}{x}=x\cos\frac{y}{x}-x$;

з) $y'=\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}$;

и) $xy'-y=xtg\frac{y}{x}$;

к) $xy'-y=xtg\frac{y}{x}$;

л) $xy'+2\sqrt{xy}=y$;

м) $(x^2-2xy+y^2)y'+y^2=0$;

н) $(y^2-2xy)dy+x^2dx=0$;

о) $x^2y'+y^2=xyy'$;

п) $xy'-y=xctg\frac{y}{x}$;

р) $6xy+y^2=x(x+y)y'$.

3. Розв’яжіть задачу Коші.

а) $(x^2-1)y'+2xy^2=0,\ \ y(0)=1$;

б) $x^2y'+y=0,\ \ y(1)=2$;

в) $(1+x^2)dx=xydy,\ y(2)=1$;

г) $(1-e^x)yy'=e^x,\ \ y(0)=1$;

д) $x+xy+y'(y+xy)=0,\ \ y(0)=1$;

и) $xy'=y\ln\frac{y}{x},\ y(1)=1$;

к) $y'=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x},\quad y(1)=\frac{\pi}{2}$;

л) $(x-y)dx+xdy=0,\ y(1)=2$;

м) $y'ctgx+y=2,\ \ y(0)=-1$;

н) $y'\sin x-y\cos x=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$;

е) $e^{y}(y'+1)=1,\ \ y(2)=0$;

о) $y-xy'=5(1+x^{2}y'),\ y(1)=6$;

ж) $y'tgx=y,\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$;

п) $y'=9+\frac{y}{x}+\frac{y^{2}}{x^{2}},\ y(1)=2$;

з) $xy^{2}dy=(x^{3}+y^{3})dx,\ y(1)=3$;

р) $xy'=xe^{\frac{y}{x}}+y,\ y(1)=0$.

4. Розв’яжіть диференціальні рівняння.

а) $(2x+y-2)dx-(2x+2y-1)dy=0$;

б) $(x+2y+1)dx-(2x-3)dy=0$;

в) $(x+y+2)dx+(y-x-1)dy=0$;

г) $(2x+2y-2)dx-(x+y+8)dy=0$;

д) $(x-3y-1)dx-(5x-y+1)dy=0$;

е) $(x+2y+1)dx-(2x+4y+3)dy=0$;

є) $(x+y+2)dx-(2x+y-4)dy=0$;

ж) $(-2x+3y+1)dx-(x+y-2)dy=0$;

з) $(2x+3y+2)dx-(6x+9y-3)dy=0$;

и) $(5x+4y-3)dx-(6x-4y-1)dy=0$;

к) $(x+6y-1)dx-(5x-y+7)dy=0$;

л) $(x-y-1)dx-(2x-2y+3)dy=0$;

м) $(4x+3y-1)dy-(5y+x+5)dx=0$;

о) $(x+8y-9)dx-(10x-y-9)dy=0$;

п) $(x+2y+2)dx-(2x+4y-3)dy=0$;

р) $(7x-y-6)dx-(x+5y-6)dy=0$.

5. Розв’яжіть лінійні диференціальні рівняння першого порядку.

а) $xy'+2y=e^{-x^2}$;

б) $y'+2y=x^2+2x$;

в) $x\ln x\, y'+y=2\ln x$;

г) $(1-x^2)y'+2xy=x$;

д) $y'+\dfrac{y}{x}=2\ln x+1$;

е) $y'+ytgx=\cos^2 x$;

ж) $(2x+1)y'+y=x$;

з) $y'+2xy=2xe^{-x^2}$;

и) $y'-\dfrac{y}{1-x^2}=1+x$;

к) $y'-\dfrac{y}{1-x^2}=1+x$;

л) $xy'+y=x\cos x$;

м) $y'-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^3$;

н) $y'-y\,ctgx=tg^2x$;

о) $y'+y=e^{-x}$;

п) $y'-ytgx=\dfrac{1}{\cos^3 x}$;

р) $y'-2xy=\dfrac{xe^{x^2}}{x+2}$;

с) $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$.

6. Розв'яжіть рівняння Бернуллі.

а) $y'-y\sin x=y^2\sin x$;

б) $y'-y=xy^2$;

в) $y'-ytgx+y^2\cos x=0$;

и) $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$;

к) $y'+2xy=2x^3y^3$;

л) $xy'-4y-x^2\sqrt{y}=0$;

г) $y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln^2 x$;

д) $xy' + 2\sqrt{xy} = y$;

е) $y' - y = y^2 e^{-x}$;

ж) $2xy' + y = x^2 y^{-1}$;

з) $y' + 4xy = 2xe^{x^2}\sqrt{y}$;

м) $y' + \frac{2}{x} y = \frac{2}{\cos^2 x}\sqrt{y}$;

н) $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$;

о) $xy' + y = y^2 \ln x$;

п) $y' + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}$;

р) $y' - ytgx = y^4 \cos x$.

7. Розв'яжіть рівняння в повних диференціалах.

а) $(2y-3)dx + (2x+3y^2)dy = 0$;

б) $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$;

в) $(x\cos 2y + 1)dx - x^2 \sin 2y dy = 0$;

г) $(x^2 + y)dx + (x-2y)dy = 0$;

д) $2x\cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0$;

е) $3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1)dy = 0$;

ж) $(\sin x + y)dx + (y\cos y^2 + x)dy = 0$;

з) $(x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)dy = 0$;

и) $(3x^2 y + \cos x)dx + (x^3 + 2y)dy = 0$;

к) $ydx + (x - y^3)dy = 0$;

л) $(2x + 3y^2)dx + (6xy - y + 1)dy = 0$;

м) $yx^{y-1}dx + x^y \ln x\, dy = 0$;

о) $(y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0$;

п) $(x^2+y^2+x)dx+(2xy-e^y+1)dy=0$;

р) $(e^y+ye^x+3)dx=(2-e^yx-e^x)dy$.

8. Розв'яжіть диференціальні рівняння, звівши їх до рівняння в повних диференціалах за допомогою інтегрувального множника.

а) $(x^2+y^2+y)dx-xdy=0$;

б) $(3x^2\cos y-\sin y)\cos ydx-xdy=0$;

в) $y(x+y)dx+(xy+1)dy=0$;

г) $y(y^2+1)dx+x(y^2-x+1)dy=0$;

д) $(x-y)dx+(x^2y^2+x)dy=0$;

е) $(2x^2y^2-2y)dx+(x^3y-x)dy=0$;

ж) $(x^2-x+y)dx-x(1-3xy)dy=0$;

з) $y(1-\ln x-\ln y)dx-xdy=0$;

и) $(x^2-2x\sin y)dx+(x^2+1)\cos ydy=0$;

к) $(y+2)dx-x(y^2+4y+3)dy=0$.

9. Розв'яжіть задачі.

а) Матеріальна точка рухається прямолінійно під дією сили, що прямо пропорційна часу від початку руху і обернено пропорційна швидкості руху. Встановити зв'язок між швидкістю v і часом t, якщо $t=0$, $v=0$ і $t=2$с, $v=8$ м / с.

б) У кімнаті за температури 20^0С деяке тіло охололо за 20 хв від 100^0 до 60^0С. Через скільки хвилин воно охолоне до 30^0С, якщо швидкість охолодження пропорційна різниці температур тіла і середовища?

в) Визначити шлях, пройдений тілом за час t, якщо відомо, що швидкість руху в кожний момент часу пропорційна пройденому шляху. Тіло проходить 30 м за 1 хв і 90 м за 2 хв.

г) Моторний човен рухається в стоячій воді зі швидкістю 5 м/с. На повному ходу двигун вимкнули, і через 40 с швидкість човна зменшилась до 2 м/с. Вважаючи силу опору, що діє на човен з боку води, пропорційною швидкості руху човна, визначити швидкість човна через 2 хв після вимкнення двигуна.

д) Швидкість випаровування речовини пропорційна її наявному об'єму. Якщо початковий об'єм речовини дорівнює V_0, а через одну годину він зменшиться вдвічі, то яка кількість речовини залишиться через три години після початку випаровування?

е) Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $(1;0)$, дотична до якої відтинає на осі абсцис відрізок у два рази більший ординати точки дотику.

ж) Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $(1;0)$, причому ордината точки перетину дотичної до кривої з віссю ординат на п'ять одиниць більша за абсцису точки дотику.

з) Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $(1;1)$, причому ордината точки перетину дотичної з віссю ординат дорівнює добутку координат точки дотику.

и) Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $(1;0)$, причому кутовий коефіцієнт довільної дотичної до неї дорівнює відношенню суми абсциси та ординати точки дотику до абсциси точки дотику.

к) Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $(3;1)$, дотична до якої відтинає на осі Ox відрізок, у три рази більший за ординату точки дотику.

10. Розв'яжіть рівняння Ріккаті.

а) $y' + 2xy - y^2 = 1 + x^2$, $y_1 = x$;

б) $y' + 2xy - 3y^2 = 1 - x^2$, $y_1 = x$;

в) $xy' - (5x+1)y + y^2 = -4x^2$, $y_1 = x$;

г) $y' - 2e^x y + y^2 = e^x - e^{2x}$, $y_1 = e^x$;

д) $y' + 4\cos x \cdot y - 2y^2 = 2\cos^2 x - \sin x$, $y_1 = \cos x$;

е) $4y' + y^2 + \dfrac{3}{x^2} = 0$, $y_1 = \dfrac{1}{x}$;

ж) $y' + \dfrac{2}{x} y + y^2 = \dfrac{2}{x^2}$, $y_1 = \dfrac{1}{x}$;

з) $y' + \dfrac{1}{x} y + y^2 = \dfrac{4}{x^2}$, $y_1 = \dfrac{2}{x}$.

Розділ 2. Диференціальні рівняння вищих порядків

2.1. Основні поняття та означення

Диференціальним рівнянням n-го порядку називається рівняння

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{39}$$

де $x \in (a;b)$ – незалежна змінна, $y = y(x)$ – шукана функція, а функція F – визначена і неперервна в деякій області $G \subseteq \mathbf{R}^{n+2}$, $n \geq 1$, зміни своїх аргументів.

Диференціальне рівняння n-го порядку, розв'язане відносно старшої похідної, має вигляд

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}), \tag{40}$$

де функція f визначена й неперервна в деякій відкритій області $D \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ зміни своїх аргументів.

Для рівнянь, розв'язаних відносно старшої похідної, справедлива теорема Коші *про існування та єдиність розв'язку.*

Теорема 2 (про існування та єдиність розв’язку). Якщо в рівнянні (40) функція $f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$ та її частинні похідні за аргументами $y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ неперервні в деякій відкритій області $D \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$, то для довільної точки $(x_0;\ y_0; y_0'; \ldots ; y_0^{(n-1)}) \in D$ існує єдиний розв'язок рівняння $y = y(x)$, визначений у деякому околі точки $x_0 \in (a;b)$, який задовольняє початкові умови:

$$y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y_0',\ . \ . \ . \ ,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{41}$$

Задачею Коші для рівняння (40) називається задача знаходження розв’язку $y = y(x)$ рівняння (40), який задовольняє початкові умови (41).

Нехай $D \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ – область, у кожній точці якої задача Коші для рівняння (40) має єдиний розв’язок.

Означення. *Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку* в області D називається n разів диференційовна функція $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, яка залежить від n довільних сталих і задовольняє такі умови:

1) вона задовольняє диференціальне рівняння за будь-яких значень сталих $C_1, C_2, ..., C_n$;

2) які б не були початкові умови (41), можна знайти такі єдині значення сталих $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$, що функція $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$ задовольнятиме ці початкові умови. Вважається, що початкові значення $x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$ належать області D, де справджується теорема про існування та єдиність розв'язку диференціального рівняння (40).

Будь-який розв'язок $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$, отриманий із загального розв'язку за певних значень довільних сталих, називається *частинним розв'язком*.

Розв'язок диференціального рівняння, записаний у неявному вигляді $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$, називається *загальний інтеграл,* а частинний розв’язок, записаний у неявному вигляді $\Phi(x, y, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0) = 0$, – *частинний інтеграл.*

2.2. Диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку

1. Рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$.

Загальний розв'язок знаходиться шляхом інтегрування цього рівняння послідовно n разів:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1 x + C_2,$$

$$y^{(n-3)} = \int \left(\int \left(\int f(x)dx \right) dx \right) dx + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

. . . .

$$y(x) = \int \left(\ldots \left(\int f(x)dx \right) \ldots \right) dx + \frac{C_1}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!} x^{n-2} + \ldots + C_n,$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbf{R}$.

Приклад 19. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' = 60x^2.$$

Розв’язання. Інтегруючи послідовно праву та ліву частину рівняння, дістанемо:

$$y'' = \int 60x^2 dx = 20x^3 + C_1,$$

$$y' = \int (20x^3 + C_1)\, dx = 5x^4 + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int (5x^4 + C_1 x + C_2)\, dx = x^5 + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3,\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbf{R}.$$

2. Рівняння, які не містять явно шукану функцію

Розглянемо диференціальне рівняння, яке не містить явно шукану функцію y

$$F(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (42)$$

Заміна $y' = p(x)$, де $p(x)$ – невідома функція, приводить до зниження порядку рівняння (42) на одиницю.

Для рівняння

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (43)$$

яке не містить явно шукану функцію y та деяку кількість ($k-1$, $k \geq 2$) послідовних її похідних, заміна $y^{(k)} = p(x)$ приводить до зниження порядку рівняння на k одиниць, тобто

$$F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0.$$

Приклад 20. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(x-3)y''+y'=0.$$

Розв'язання. Маємо рівняння вигляду (42), яке не містить явно шукану функцію y. Зробимо заміну $y'=p(x)$. Тоді $y''=p'$, і рівняння набере вигляду:

$$(x-3)\frac{dp}{dx}=-p, \qquad \frac{dp}{p}=-\frac{dx}{x-3},$$

$$\int\frac{dp}{p}=-\int\frac{dx}{x-3},$$

$$\ln p=-\ln(x-3)+\ln|C|,\ C\neq 0.$$

Враховуючи, що функція $p=0$ також є розв'язком, маємо

$$p=\frac{C_1}{x-3},\ C_1\in\mathbf{R}.$$

Далі знаходимо:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{C_1}{x-3},$$

$y=C_1\ln(x-3)+C_2,\ C_1,C_2\in\mathbf{R}$ – загальний розв'язок.

Приклад 21. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y^{IV}-x=\frac{1}{x}y'''.$$

Розв'язання. Дане рівняння не містить шукану функцію y та має вигляд (43). Зробимо заміну $y'''=p(x)$. Тоді $y^{IV}=p'(x)$, і рівняння набере вигляду:

$$p'(x)-x=\frac{1}{x}p(x), \qquad p'(x)-\frac{1}{x}p(x)=x.$$

Отримали лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Розв'яжемо його методом Бернуллі, тобто розв'язок будемо шукати у вигляді $p(x)=u(x)\cdot v(x)$, де $u=u(x), v=v(x)$ – невідомі функції.

Рівняння набере вигляду:

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = x,$$

$$u'v + u(v' - \frac{1}{x}v) = x. \qquad (44)$$

Функцію $v = v(x)$ виберемо такою, щоб $v' - \frac{1}{x}v = 0$. Маємо:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}v, \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = \ln|x| + \ln|C_1|, C_1 \neq 0, \ v = Cx, \ C \in \mathbf{R}.$$

Покладемо $C = 1$, тоді $v = x$. Підставимо функцію $v = x$ у рівняння (44):

$$u' \cdot x = x, \quad \frac{du}{dx} = 1, \ du = dx, \ u = x + C_1.$$

Таким чином, отримали функцію

$$p(x) = u(x)v(x) = (x + C_1)x = x^2 + C_1 x.$$

Підставивши $y''' = p(x)$, знайдемо функцію $y = y(x)$:

$$y''' = x^2 + C_1 x,$$

$$y'' = \int (x^2 + C_1 x)dx = \frac{x^3}{3} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2,$$

$$y' = \int (\frac{x^3}{3} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2)dx = \frac{x^4}{12} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2 x + C_3,$$

$$y = \int (\frac{x^4}{12} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2 x + C_3)dx = \frac{x^5}{60} + C_1\frac{x^4}{24} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

Отже, загальний розв’язок має вигляд

$$y = \frac{x^5}{60} + C_1\frac{x^4}{24} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbf{R}.$$

3. Рівняння, які явно не містять незалежну змінну

Розглянемо диференціальне рівняння вигляду

$$F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{45}$$

яке не містить явно незалежну змінну x.

Заміна

$$y' = p(y), \tag{46}$$

де $p = p(y)$ – нова шукана функція, y – нова незалежна змінна, приводить до зниження порядку рівняння на одиницю, оскільки

$$y'' = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p' \cdot p,$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(p' \cdot p) = p'' \cdot \frac{dy}{dx} + p' \cdot p' \frac{dy}{dx} = p(p'' + (p')^2),$$

. . . .

$$y^{(n)} = g(p, p', p'', ..., p^{(n-1)}).$$

Отже, від рівняння (45) n-го порядку переходимо до рівняння $(n-1)$-го порядку відносно шуканої функції p

$$F_1(y, p, p', ..., p^{(n-1)}) = 0.$$

У випадку диференціального рівняння другого порядку, яке не містить явно незалежну змінну x

$$F(y, y', y'') = 0, \tag{47}$$

заміна

$$y' = p(y), \quad y'' = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p' \cdot p,$$

де $p = p(y)$ – нова шукана функція, y – нова незалежна змінна, приводить до диференціального рівняння першого порядку

$$F_1(y, p, p') = 0.$$

Зауважимо, що після заміни (46) можлива втрата розв’язків диференціального рівняння виду $y = C$. Безпосередньою підстановкою необхідно перевірити, чи справді рівняння (45) чи його окремий випадок (47) має такі розв'язки.

Приклад 22. Розв'яжіть диференціальне рівняння

$$y'' \cdot y = (y')^2. \tag{48}$$

Розв'язання. Рівняння не містить явно незалежну змінну x. Зробимо заміну:

$$y' = p(y), \quad y'' = p' \cdot p.$$

Рівняння набере вигляду:

$$p' \cdot p \cdot y = p^2, \qquad p' \cdot y = p, \tag{49}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}, \qquad \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y},$$

$$\ln|p| = \ln|y| + \ln|C|, \; C \neq 0,$$

$p = Cy$, $C \neq 0$ – загальний розв'язок.

Функція $p = 0$ є розв'язком рівняння з відокремлюваними змінними (49). Його можна отримати із загального розв'язку, коли $C = 0$. Звідси загальний розв'язок рівняння (49) має вигляд

$$p = C_1 y, \; C_1 \in \mathbf{R}.$$

Далі маємо:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y, \quad \frac{dy}{y} = C_1 dx,$$

$$\ln|y| = C_1 x + \ln|C|, \; C \neq 0 \qquad y = C \cdot e^{C_1 x}, \; C \neq 0.$$

Оскільки функція $y = 0$ є розв'язком диференціального рівняння (48), то загальний розв'язок рівняння

$$y = C_2 \cdot e^{C_1 x}, \; C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Контрольні запитання

1. Яке диференціальне рівняння називають диференціальним рівнянням n-го порядку?

2. Сформулюйте теорему про існування та єдиність розв'язку диференціального рівняння n-го порядку, розв'язаного відносно старшої похідної.

3. Що називають загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку?

4. Наведіть три основні типи диференціальних рівнянь вищих порядків, що допускають зниження порядку.

2.3 Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків. Основні поняття

Означення. *Лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку* називається рівняння, яке лінійне відносно шуканої функції $y(x)$ та її похідних $y', y'', ..., y^{(n)}$, тобто має вигляд

$$b_0(x)y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + ... + b_n(x)y = g(x), \tag{50}$$

де $b_0(x), b_1(x), \dots, b_n(x)$ і $g(x)$ – задані неперервні функції на інтервалі $(a;b)$, причому $b_0(x) \neq 0$.

Функції $b_0(x), b_1(x), \dots, b_n(x)$ називають *коефіцієнтами* диференціального рівняння (50), а функцію $g(x)$ – *правою частиною*. Якщо $g(x) = 0$, маємо *лінійне однорідне диференціальне рівняння* (ЛОДР), якщо $g(x) \neq 0$ – *лінійне неоднорідне диференціальне рівняння* (ЛНДР).

Оскільки $b_0(x) \neq 0$, то на цей коефіцієнт можна поділити праву та ліву частину рівняння (50). Позначивши

$$a_i(x) = \frac{b_i(x)}{b_0(x)},\ i = 1, 2, ..., n, \qquad f(x) = \frac{g(x)}{b_0(x)},$$

дістанемо лінійне диференціальне рівняння n-го порядку вигляду

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x) . \qquad (51)$$

Зважаючи на те, що диференціальне рівняння (50) завжди можна звести до диференціального рівняння (51), у подальшому розглядатимемо лінійні диференціальні рівняння вигляду (51).

Оскільки коефіцієнти рівняння (51) і права частина є неперервними функціями змінної x або сталими, то для цього рівняння справедлива теорема 2 про існування та єдиність розв'язку диференціального рівняння.

Лінійним однорідним диференціальним рівнянням, що відповідає неоднорідному рівнянню (51) називається рівняння

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = 0.$$

Лінійні однорідні диференціальні рівняння вищих порядків

Спочатку встановимо деякі властивості ЛОДР

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = 0. \qquad (52)$$

Одним із розв’язків рівняння (52) є функція $y \equiv 0$. Цей розв’язок називається *нульовим* або *тривіальним*. Надалі під задачею розв’язання однорідного диференціального рівняння будемо розуміти знаходження його нетривіальних розв’язків.

Теорема 3. Якщо $y_1(x), y_2(x)$ – частинні розв'язки однорідного диференціального рівняння (52), то розв'язком рівняння (52) є також функція

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

де C_1, C_2 – довільні константи.

Доведення. Оскільки $y_1(x), y_2(x)$ є розв’язками рівняння (52), то

$$y_1^{(n)} + a_1(x)y_1^{(n-1)} + ... + a_n(x)y_1 = 0,$$

$$y_2^{(n)} + a_1(x) y_2^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y_2 = 0.$$

Підставимо функцію $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ у рівняння (52)

$$C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + a_1(x)(C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)}) + \ldots + a_n(C_1 y_1 + C_2 y_2) =$$

$$= C_1(y_1^{(n)} + a_1(x) y_1^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y_1) +$$

$$+ C_2(y_1^{(n)} + a_1(x) y_1^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y_1) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

Отже, функція $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ є розв'язком рівняння (52). ■

Означення. Функції $y_1, y_2, \ldots, y_n$ називаються *лінійно незалежними* на інтервалі $(a;b)$, якщо із рівності

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0 \text{ для всіх } x \in (a;b)$$

випливає $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Зокрема, дві функції y_1 і y_2 є лінійно незалежними на інтервалі $(a;b)$, якщо із рівності $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$ для всіх $x \in (a;b)$ випливає $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Очевидно, що дві функції y_1 і y_2 *лінійно залежні* на інтервалі $(a;b)$ тоді і лише тоді, коли існує стале число λ таке, що для всіх $x \in (a;b)$ виконується рівність $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = \lambda$ або $y_1(x) = \lambda y_2(x)$ ($y_2(x) \neq 0$, для будь-якого $x \in (a;b)$).

Для дослідження лінійної залежності системи функцій використовується визначник Вронського.

Означення. *Визначником Вронського (вронскіаном)* функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$ називається визначник

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Припускається, що функції $y_1, y_2, ..., y_n$ є $n-1$ разів диференційовні.

Визначник Вронського для двох функцій y_1, y_2 має вигляд

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Справедливі такі теореми.

Теорема 4. Якщо $n-1$ разів диференційовні функції $y_1, y_2, ..., y_n$ лінійно залежні на інтервалі $(a;b)$, то визначник Вронського $W(y_1, y_2, ..., y_n)$ на цьому інтервалі тотожно дорівнює нулю.

Теорема 5. Якщо $y_1, y_2, ..., y_n$ є лінійно незалежними на інтервалі $(a;b)$ розв'язками лінійного однорідного рівняння (52) з неперервними на $(a;b)$ коефіцієнтами, то визначник Вронського $W(y_1, y_2, ..., y_n)$ не дорівнює нулю в жодній точці цього інтервалу.

Теорема 6. Якщо $y_1, y_2, ..., y_n$ – лінійно незалежні розв'язки лінійного однорідного рівняння n-го порядку (52), то загальним розв'язком цього рівняння є функція

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x),$$

де $C_1, C_2, ..., C_n$ – довільні дійсні сталі.

Доведення. Наведемо доведення цієї теореми для рівняння другого порядку

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0. \tag{53}$$

Нехай $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – лінійно незалежні розв'язки рівняння (53). Із теореми 3 випливає, що функція

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{54}$$

є розв'язком рівняння.

Розв'язок (54) є загальним розв'язком (за означенням), якщо для будь-яких початкових умов

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \tag{55}$$

можна підібрати такі значення сталих C_1^0 і C_2^0, за яких розв'язок (54) задовольняє ці початкові умови.

Підставимо початкові умови (55) у функцію (54):

$$\begin{aligned} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) &= y_0, \\ C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) &= y'_0. \end{aligned} \tag{56}$$

Визначник цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix}$$

є визначником Вронського, складеним для лінійно незалежних розв'язків рівняння $y_1(x)$ і $y_2(x)$ за $x = x_0$. Отже, за теоремою 5 $\Delta \neq 0$ і тому система (56) має єдиний розв'язок $C_1 = C_1^0$ і $C_2 = C_2^0$.

Для однорідних диференціальних рівнянь n-го порядку теорема доводиться аналогічно. ■

Таким чином, для знаходження загального розв'язку лінійного однорідного рівняння n-го порядку достатньо знайти його n лінійно незалежних розв'язків. Далі покажемо, як це зробити для лінійних однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Контрольні запитання

1. Яке диференціальне рівняння n-го порядку називають лінійним?

2. Сформулюйте означення системи лінійно незалежних функцій $y_1, y_2, ..., y_n$ на інтервалі $(a;b)$.

3. Сформулюйте теорему про загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку.

2.4. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Спочатку розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{57}$$

де p, q – сталі дійсні числа.

Щоб знайти загальний розв'язок рівняння (57) достатньо знайти два частинні лінійно незалежні його розв'язки. Шукатимемо їх у вигляді $y = e^{kx}$ (метод Ейлера), де k – дійсна чи комплексна стала, яку необхідно знайти. Підставимо функцію $y = e^{kx}$ у рівняння (57):

$$y = e^{kx}, \quad y' = k \cdot e^{kx}, \quad y'' = k^2 \cdot e^{kx}.$$

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{58}$$

Рівняння (58) називається *характеристичним рівнянням* для рівняння (57). Якщо k – розв'язок рівняння (58), то $y = e^{kx}$ – розв'язок рівняння (57).

Рівняння (58) – це квадратне рівняння, яке має корені

$$k_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \qquad k_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Дискримінант $D = p^2 - 4q$. Можливі три випадки.

1. *Характеристичне рівняння має два різні дійсні корені* $k_1 \neq k_2$ ($D > 0$). У цьому разі диференціальне рівняння (57) має частинні розв'язки

$$y_1 = e^{k_1 x} \text{ і } y_2 = e^{k_2 x},$$

які лінійно незалежні, оскільки $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const$.

Загальний розв'язок рівняння (57) згідно з теоремою 6 має вигляд

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},\ C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

2. *Характеристичне рівняння має два рівні дійсні корені* $k_1 = k_2 = k$ $(D = 0)$. У цьому разі один розв'язок диференціального рівняння $y_1 = e^{kx}$. Враховуючи, що $k_1 = k_2 = -\dfrac{p}{2}$, можна показати, що $y_2 = xe^{kx}$ також є розв'язком диференціального рівняння. Дійсно, знайдемо похідні y'_2 та y''_2

$$y'_2 = e^{kx} + kxe^{kx} = e^{kx}(1 + kx),$$

$$y''_2 = 2ke^{kx} + k^2 xe^{kx} = e^{kx}(2k + k^2 x),$$

та підставимо їх в рівняння (57):

$$e^{kx}(2k + k^2 x) + pe^{kx}(1 + kx) + qxe^{kx} = e^{kx}(2k + k^2 x + p(1 + kx) + qx) = .$$

$$= e^{kx}(x(k^2 + pk + q) + 2k + p) = e^{kx}\left(x \cdot 0 + 2\left(-\frac{p}{2}\right) + p\right) = 0.$$

Оскільки $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{kx}}{xe^{kx}} = \dfrac{1}{x} \neq const$, то розв'язки y_1 і y_2 лінійно незалежні. Отже, рівняння (57) має два лінійно незалежних розв'язки

$$y_1 = e^{kx},\ y_2 = xe^{kx}$$

і загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{kx} + C_2 xe^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2 x),\ C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

3. *Характеристичне рівняння має два комплексні спряжені корені* $(D < 0)$ $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$. Тоді маємо два розв'язки рівняння (57) $y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}$, $y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$, або

$$y_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),\ y_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Якщо функція $z(x) = u(x) + iv(x)$ є розв'язком рівняння (57), то $u(x)$ і $v(x)$ також є розв'язками цього рівняння. Дійсно, підставивши функцію $z(x)$ у рівняння (57), отримаємо:

$$u'' + iv'' + p(u' + iv') + q(u + iv) = 0,$$

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) = 0.$$

Остання рівність можлива, коли вирази в дужках дорівнюють нулю, тобто $u'' + pu' + qu = 0$ та $v'' + pv' + qv = 0$. Отже, функції $u(x)$ і $v(x)$ є розв’язками рівняння (57).

Таким чином, частинними розв'язками рівняння (57) є функції

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x,\ y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

які лінійно незалежні, оскільки

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{e^{\alpha x} \sin \beta x} = ctg \beta x \neq const.$$

Загальний розв'язок рівняння (57) має вигляд

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Приклад 23. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Розв’язання. Характеристичне рівняння має вигляд

$$k^2 + k - 2 = 0.$$

Корені характеристичного рівняння дійсні й різні $k_1 = 1,\ \ k_2 = -2$. Отже, диференціальне рівняння має два лінійно незалежні частинні розв'язки

$$y_1 = e^x \text{ і } y_2 = e^{-2x}.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x},\ C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Приклад 24. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд

$$k^2 - 4k + 4 = 0.$$

Корені характеристичного рівняння дійсні однакові $k_1 = k_2 = 2$. Отже, диференціальне рівняння має два лінійно незалежні частинні розв'язки

$$y_1 = e^{2x} \text{ і } y_2 = xe^{2x}.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} = e^{2x}(C_1 + C_2 x),\ C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Приклад 25. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд

$$k^2 + 2k + 5 = 0.$$

Корені характеристичного рівняння комплексні спряжені

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm 2i.$$

Отже, диференціальне рівняння має два лінійно незалежні частинні розв'язки

$$y_1 = e^{-x} \cos 2x \quad \text{і} \quad y_2 = e^{-x} \sin 2x.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y(x) = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x,\ C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Приклад 26. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 4y = 0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд

$$k^2 + 4 = 0.$$

Корені характеристичного рівняння комплексні спряжені

$$k_{1,2} = \pm 2i \ (\alpha = 0, \ \beta = 2).$$

Отже, диференціальне рівняння має два лінійно незалежні частинні розв'язки

$$y_1 = e^{0x}\cos 2x \ \text{ і } \ y_2 = e^{0x}\sin 2x \quad \text{або} \quad y_1 = \cos 2x \ \text{ і } \ y_2 = \sin 2x.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x, \ C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Приклад 27. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 2y' + y = 0$$

і його частинний розв'язок, що задовольняє початкові умови

$$y(0) = 4, \ \ y'(0) = 2.$$

Розв’язання. Характеристичне рівняння

$$k^2 - 2k + 1 = 0$$

має однакові дійсні корені $k_1 = k_2 = 1$, тобто лінійно незалежні частинні розв'язки однорідного рівняння

$$y_1 = e^x \ \text{ і } \ y_2 = xe^x.$$

Загальний розв'язок рівняння

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 xe^x, \ C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Для знаходження частинного розв'язку, що задовольняє початкові умови, підставимо початкові умови у вирази:

$$y = C_1 e^x + C_2 xe^x,$$

$$y' = C_1 e^x + C_2 e^x + C_2 xe^x.$$

Дістанемо $4 = C_1$, $2 = C_1 + C_2$, тобто $C_1 = 4$, $C_2 = -2$. Отже, частинний розв'язок, що задовольняє задані початкові умови, має вигляд

$$y(x) = 4e^x - 2xe^x.$$

Спосіб знаходження розв'язків лінійних однорідних рівнянь порядку вище другого зі сталими коефіцієнтами аналогічний викладеному способу для рівнянь другого порядку.

Метод Ейлера розв'язання лінійних однорідних диференціальних рівнянь n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Нехай маємо лінійне диференціальне рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0, \tag{23}$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – сталі дійсні числа.

Характеристичним рівнянням для рівняння (23) називається рівняння n-го степеня

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{24}$$

Це рівняння має n коренів. Корені можуть бути дійсними простими, дійсними кратними, комплексними спряженими простими і комплексними спряженими кратними.

Теорема 7. 1. Кожному простому дійсному кореню k рівняння (24) відповідає частинний розв'язок e^{kx} диференціального рівняння (23).

2. Кожному дійсному кореню k кратності $r > 1$ відповідає r частинних розв'язків рівняння (23) виду

$$e^{kx},\ xe^{kx}, \ldots,\ x^{r-1}e^{kx}.$$

3. Кожній парі $\alpha \pm i\beta$ простих комплексних коренів рівняння (24) відповідає два частинних розв'язки рівняння (23):

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad e^{\alpha x}\cos\beta x.$$

4. Кожній парі $\alpha \pm i\beta$ комплексних коренів рівняння (24) кратності $s > 1$ відповідає $2s$ частинних розв'язків диференціального рівняння (23):

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \cdots,\ x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \cdots,\ x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x.$$

Сума кратностей всіх коренів дорівнює порядку рівняння n, тобто кількість частинних розв'язків, записаних відповідно до твердження теореми, також дорівнює порядку рівняння. Можна показати, що такі частинні розв'язки, які позначимо через $y_1, y_2, ..., y_n$, є лінійно незалежними, і згідно з теоремою 6 загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n,$$

де $C_1, C_2, ..., C_n$ – довільні сталі.

Приклад 28. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{(4)} - y = 0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд

$$k^4 - 1 = 0,$$
$$(k^2 - 1)(k^2 + 1) = 0,$$
$$(k-1)(k+1)(k^2+1) = 0.$$

Характеристичне рівняння має два дійсних кореня $k_1 = 1$ i $k_2 = -1$ і два спряжених комплексних кореня $k_{3,4} = \pm i$ ($\alpha = 0,\ \beta = 1$). Отже, диференціальне рівняння має чотири лінійно незалежні частинні розв'язки

$$y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-x},$$
$$y_3 = e^{0x}\cos x = \cos x,\ \ y_4 = e^{0x}\sin x = \sin x.$$

Загальний розв'язок рівняння

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x,\ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbf{R}.$$

Приклад 29. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{(5)} + 5y^{(3)} = 0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд

$$k^5 + 5k^3 = 0,$$

$$k^3(k^2 + 5) = 0.$$

Характеристичне рівняння має корінь $k_1 = 0$ кратності три і два спряжені комплексні корені $k_{4,5} = \pm\sqrt{5}i$, яким відповідають такі частинні розв'язки диференціального рівняння

$$y_1 = e^{0x} = 1, \quad y_2 = xe^{0x} = x, \quad y_3 = x^2 e^{0x} = x^2,$$

$$y_4 = e^{0x}\cos\sqrt{5}x = \cos\sqrt{5}x, \quad y_5 = e^{0x}\sin\sqrt{5}x = \sin\sqrt{5}x.$$

Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4\cos\sqrt{5}x + C_5\sin\sqrt{5}x,\ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbf{R}.$$

Приклад 30. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{IV} + 4y'' + 4y = 0.$$

Розв’язання. Характеристичне рівняння має вигляд

$$k^4 + 4k^2 + 4 = 0,$$

$$(k^2 + 2)^2 = 0,\ (k - \sqrt{2}i)^2 (k + \sqrt{2}i)^2 = 0.$$

Характеристичне рівняння має два спряжені комплексні корені $k_1 = \sqrt{2}i$ $k_2 = -\sqrt{2}i$ кратності два, яким відповідають такі частинні розв’язки диференціального рівняння:

$$y_1 = e^{0\cdot x}\cos\sqrt{2}x = \cos\sqrt{2}x, \quad y_2 = x\cos\sqrt{2}x,$$

$$y_3 = e^{0\cdot x}\sin\sqrt{2}x = \sin\sqrt{2}x, \quad y_4 = x\sin\sqrt{2}x.$$

Загальний розв’язок рівняння має вигляд

$$y(x) = C_1\cos\sqrt{2}x + C_2 x\cos\sqrt{2}x + C_3\sin\sqrt{2}x + C_4 x\sin\sqrt{2}x,$$

$$C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbf{R}.$$

2.5. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння

Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x), \tag{59}$$

де $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x),\ f(x)$ – неперервні функції на $(a;b)$.

Відповідне однорідне диференціальне рівняння має вигляд

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0. \tag{60}$$

Для лінійних неоднорідних рівнянь справедливі такі теореми, що визначають структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння.

Теорема 8. Загальним розв'язком ЛНДР (59) на інтервалі $(a;b)$ є сума загального розв'язку $\overline{y} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)$ відповідного однорідного рівняння (60) і деякого частинного розв'язку y^* неоднорідного рівняння (59). Тобто загальний розв'язок неоднорідного рівняння (59) має вигляд

$$y = \overline{y} + y^* = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n + y^*.$$

Доведення. Покажемо, що функція

$$y = \overline{y} + y^* = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n + y^*, \tag{61}$$

де $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння, а $y*$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння, є загальним розв'язком неоднорідного рівняння (59).

Підставимо функцію (61) у рівняння (59)

$$C_1y_1^{(n)} + C_2y_2^{(n)} + \ldots + C_ny_n^{(n)} + (y^*)^{(n)} +$$

$$+a_1(x)\left(C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \ldots + C_ny_n^{(n-1)} + (y^*)^{(n-1)}\right) + \ldots +$$

$$+a_n(x)\left(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n + y^*\right) = .$$

$$=C_1(y_1^{(n)}+a_1(x)y_1^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y_1)+\ldots+$$

$$+C_n(y_n^{(n)}+a_1(x)y_n^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y_n)+$$

$$+(y^*)^{(n)}+a_1(x)(y^*)^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y^*=0+\ldots+0+f(x)=f(x).$$

Отже, функція (61) є розв’язком неоднорідного рівняння (59).

Розв'язок (61) є загальним розв'язком (за означенням), якщо для будь-яких початкових умов

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n)}(x_0)=y_0^{(n)},\quad x_0\in(a;b),\quad (62)$$

можна підібрати такі значення сталих $C_1^0, C_2^0,\ldots,C_n^0$, за яких розв'язок (61) задовольняє ці початкові умови.

Підставивши розв’язок (61) у початкові умови (62), отримаємо систему лінійних рівнянь відносно n невідомих $C_1, C_2,\ldots,C_n$

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)+\ldots+C_ny_n(x_0)+y^*(x_0)=y_0, \\ C_1y'_1(x_0)+C_2y'_2(x_0)+\ldots+C_ny'_n(x_0)+y^{*}{}'(x_0)=y'_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+C_2y_2^{(n-1)}(x_0)+\ldots+C_ny_n^{(n-1)}(x_0)+y^{*(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Оскільки визначник цієї системи є визначником Вронського $W(y_1,\ldots,y_n)$ для лінійно незалежних розв’язків $y_1,\ldots,y_n$ відповідного однорідного рівняння (60), то за теоремою 5 він не дорівнює нулю для всіх значень $x\in(a;b)$, зокрема для $x=x_0$. Отже, система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок $C_1=C_1^0, C_2=C_2^0,\ldots, C_n=C_n^0$. ■

Теорема 9. Якщо права частина диференціального рівняння (59) має вигляд $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, а y_1^* і y_2^* – частинні розв'язки диференціальних рівнянь

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=f_1(x)\quad \text{і}$$

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f_2(x),$$

то функція $y^* = y_1^* + y_2^*$ є розв'язком рівняння (59).

Справедливість теореми 9 можна перевірити безпосередньою підстановкою.

Метод варіації довільних сталих знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння (метод Лагранжа)

З теореми 8 випливає, що в разі, коли відомий загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, задача знаходження загального розв'язку неоднорідного рівняння зводиться до знаходження його частинного розв'язку. Якщо відомий загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, для знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння використовується *метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа)*. Розглянемо цей метод на прикладі рівняння другого порядку

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x). \tag{63}$$

Нехай $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – лінійно незалежні розв'язки відповідного однорідного рівняння

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \tag{64}$$

Загальний розв'язок рівняння (64) має вигляд

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{65}$$

де y_1, y_2 – лінійно незалежні розв'язки, C_1 і C_2 – довільні сталі.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (63) шукатимемо у вигляді

$$y^* = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2, \tag{66}$$

де $C_1(x)$ і $C_2(x)$ – невідомі функції, які оберемо таким чином, щоб функція y^* була розв'язком рівняння (63). Маємо:

$$\left(y^{*}\right)' = C_1'(x)\cdot y_1 + C_1(x)\cdot y_1' + C_2'(x)\cdot y_2 + C_2(x)\cdot y_2'.$$

Виберемо функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ такі, що

$$C_1'(x)\cdot y_1 + C_2'(x)\cdot y_2 = 0. \qquad (67)$$

Тоді

$$\left(y^{*}\right)' = C_1(x)\cdot y_1' + C_2(x)\cdot y_2', \qquad (68)$$

$$\left(y^{*}\right)'' = C_1'(x)\cdot y_1' + C_1(x)\cdot y_1'' + C_2'(x)\cdot y_2' + C_2(x)\cdot y_2''. \qquad (69)$$

Підставимо (66), (68) і (69) у рівняння (63):

$$\begin{aligned}
&C_1'(x)\cdot y_1' + C_1(x)\cdot y_1'' + C_2'(x)\cdot y_2' + C_2(x)\cdot y_2'' + \\
&+a_1(x)\cdot\left(C_1(x)\cdot y_1' + C_2(x)\cdot y_2'\right) + \\
&+a_2(x)\cdot\left(C_1(x)\cdot y_1 + C_2(x)\cdot y_2\right) = f(x),
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
&C_1(x)\cdot\left(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1\right) + \\
&+C_2(x)\cdot\left(y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2\right) + \\
&+C_1'(x)\cdot y_1' + C_2'(x)\cdot y_2' = f(x).
\end{aligned} \qquad (70)$$

Оскільки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є розв'язками рівняння (64), то перші два доданки в рівності (70) дорівнюють нулю і маємо

$$C_1'(x)\cdot y_1' + C_2'(x)\cdot y_2' = f(x). \qquad (71)$$

Отже, функція $y^{*} = C_1(x)\cdot y_1 + C_2(x)\cdot y_2$ буде розв'язком рівняння (63), якщо для функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ виконуються рівності (67) і (71), тобто $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$ є розв'язками системи

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1 + C_2'(x)\cdot y_2 = 0, \\ C_1'(x)\cdot y_1' + C_2'(x)\cdot y_2' = f(x). \end{cases} \qquad (72)$$

Визначник цієї системи є визначником Вронського $W\left(y_1, y_2\right)$, який складений для лінійно незалежних розв'язків y_1 та y_2 рівняння (64), тобто $W\left(y_1, y_2\right) \neq 0$ і система (72) має єдиний розв'язок

$$C_1'(x) = \varphi_1(x),\ \ C_2'(x) = \varphi_2(x).$$

Після інтегрування знайдемо

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + \tilde{C}_1, \qquad C_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + \tilde{C}_2, \tag{73}$$

де $\tilde{C}_1$ і $\tilde{C}_2$ – сталі. Підставивши знайдені функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$, де $\tilde{C}_1 = 0$ і $\tilde{C}_2 = 0$, у функцію (66), знайдемо шуканий частинний розв'язок неоднорідного рівняння (63).

Викладений метод Лагранжа поширюється на рівняння n-го порядку в разі $n > 2$

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x). \tag{74}$$

Відповідне однорідне рівняння має вигляд

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0 \tag{75}$$

і його загальний розв'язок

$$\bar{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

де $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – лінійно незалежні частинні розв'язки рівняння (75), $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – довільні сталі. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (74) шукається у вигляді

$$y^* = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x) + \ldots + C_n(x) \cdot y_n(x), \tag{76}$$

де $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ – невідомі функції, для знаходження яких складається система

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \tag{77}$$

Визначник матриці системи є визначником Вронського для лінійно незалежних розв'язків $y_1, y_2, ..., y_n$

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

і система має єдиний розв'язок

$$C_1'(x) = \varphi_1(x),\ C_2'(x) = \varphi_2(x), \ldots, C_n'(x) = \varphi_n(x).$$

Інтегруючи рівності, знайдемо функції $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ і розв'язок (76).

Приклад 31. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - y' = \frac{1}{1 + e^x}.$$

Розв’язання. Спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y'' - y' = 0.$$

Характеристичне рівняння $k^2 - k = 0$ має різні дійсні корені $k_1 = 0$ і $k_2 = 1$. Отже, лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння $y_1 = e^{0x} = 1$ і $y_2 = e^x$ і загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$\bar{y} = C_1 + C_2 e^x.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо методом Лагранжа у вигляді

$$y^* = C_1(x) + C_2(x)\, e^x,$$

де $C_1(x)$ і $C_2(x)$ – невідомі функції, для знаходження яких запишемо систему (система (72))

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot 1 + C_2'(x)\cdot e^x = 0, \\ C_1'(x)\cdot 0 + C_2'(x)\cdot e^x = \dfrac{1}{1+e^x}. \end{cases}$$

Із системи отримаємо

$$C_2'(x) = \frac{1}{e^x(1+e^x)}, \quad C_1'(x) = -\frac{1}{1+e^x}.$$

$$C_1(x) = -\int \frac{1}{1+e^x}dx = -\int \frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x}dx = -\int dx + \int \frac{e^x}{1+e^x}dx =$$
$$= -x + \ln(1+e^x) + \tilde{C}_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{1}{e^x(1+e^x)}dx = \int \frac{(1+e^x)-e^x}{e^x(1+e^x)}dx = \int e^{-x}dx - \int \frac{1}{1+e^x}dx =$$

$$= -e^{-x} - x + \ln(1+e^x) + \tilde{C}_2.$$

Вважатимемо $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = 0$, тоді частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y^* = -x + \ln(1+e^x) + e^x(-e^{-x} - x + \ln(1+e^x)) =$$
$$= -x(1+e^x) + (1+e^x)\ln(1+e^x) - 1.$$

Загальний розв'язок рівняння

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2e^x - x(1+e^x) + (1+e^x)\ln(1+e^x) - 1.$$

Позначивши $\bar{C}_1 = C_1 - 1$, остаточно дістанемо

$$y = \bar{C}_1 + C_2e^x - x(1+e^x) + (1+e^x)\ln(1+e^x).$$

Метод невизначених коефіцієнтів знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального виду

Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x). \tag{78}$$

Загальний розв'язок такого рівняння є сумою загального розв'язку відповідного однорідного рівняння й частинного розв'язку неоднорідного рівняння (теорема 8). Частинний розв'язок неоднорідного рівняння можна знайти методом варіації довільних сталих. Однак для певного спеціального виду правої частини рівняння (78) частинний розв'язок можна знайти методом невизначених коефіцієнтів, який наведемо без доведення. Зауважимо, що цей метод не потребує інтегрування.

Метод невизначених коефіцієнтів використовується для розв'язання диференціальних рівнянь (78) з правою частиною спеціального вигляду. Наведемо два випадки.

I. Нехай права частина рівняння (78) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} P_k(x), \tag{79}$$

де $\alpha \in \mathbf{R}$, $P_k(x)$ – многочлен степеня k.

Згідно з методом невизначених коефіцієнтів частинний розв'язок рівняння (78) шукається у вигляді

$$y^* = x^r R_k(x) e^{\alpha x}, \tag{80}$$

де r – число, рівне кратності α як кореня характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння (78), а $R_k(x)$ – многочлен з невизначеними коефіцієнтами степеня k, який містить усі степені x від x^k до $x^0 = 1$. Якщо α не є коренем характеристичного рівняння, то приймають $r = 0$.

Для знаходження невизначених коефіцієнтів многочлена $R_k(x)$ розв'язок (80) підставляють у рівняння (78).

II. Нехай права частина рівняння (78) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\sin\beta x + Q_m(x)\cos\beta x\right), \tag{81}$$

де $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня, $Q_m(x)$ – многочлен m-го степеня. Функція (79) є окремим випадком функції (81), якщо $\beta = 0$.

Згідно з методом невизначених коефіцієнтів частинний розв'язок рівняння (78) з правою частиною (81) шукається у вигляді

$$y^* = x^r \cdot e^{\alpha x}\left(S_k(x)\sin\beta x + T_k(x)\cos\beta x\right), \tag{82}$$

де r – число, рівне кратності $\alpha + i\beta$ як кореня характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння (78). $S_k(x)$ і $T_k(x)$ – многочлени степеня $k = \max(n, m)$, які записуються з невизначеними коефіцієнтами й містять всі степені x від x^k до $x^0 = 1$.

Число $\sigma = \alpha + i\beta$ називається *контрольним числом правої частини*. Якщо $\sigma = \alpha + i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння, то приймають $r = 0$ і у (82) множник x^r дорівнює одиниці.

Для знаходження невизначених коефіцієнтів многочленів $S_k(x)$ і $T_k(x)$ розв'язок (82) підставляють у рівняння (78). Вигляд частинного розв'язку (82) зберігається також і в тому разі, коли в функції (81) многочлен $P_n(x) \equiv 0$ або $Q_m(x) \equiv 0$.

Метод невизначених коефіцієнтів використовується лише для лінійних рівнянь із сталими коефіцієнтами і правою частиною виду (80) або (82). Якщо права частина рівняння є сумою функцій виду (80) або (82), то частинний розв'язок рівняння згідно з теоремою 9 можна знайти як суму відповідних частинних розв'язків.

Приклад 32. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + y = 4\cos x + (x^2 + 1)e^x.$$

Розв’язання. Спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y'' + y = 0.$$

Характеристичне рівняння $k^2 + 1 = 0$ має корені $k_{1,2} = \pm i$, і загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Права частина рівняння є сумою правих частин спеціального виду (82) та (80), тому, скориставшись теоремою 9, частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо як суму частинних розв'язків двох рівнянь

$$y'' + y = 4\cos x \quad \text{і} \quad y'' + y = (x^2 + 1)e^x.$$

Для правої частини $f_1(x) = 4\cos x$:

$$\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \sigma = \alpha + i\beta = i,\ P_n(x) = 0,\ Q_m(x) = 4,\ k = 0.$$

Число $\sigma = i$ є коренем характеристичного рівняння кратності 1, отже $r = 1$. Частинний розв'язок рівняння $y'' + y = 4\cos x$ шукатимемо у вигляді:

$$y_1^* = x(A\sin x + B\cos x).$$

Знайдемо $(y_1^*)'$ та $(y_1^*)''$:

$$(y_1^*)' = A\sin x + B\cos x + x(A\cos x - B\sin x),$$
$$(y_1^*)'' = 2A\cos x - 2B\sin x + x(-A\sin x - B\cos x).$$

Для визначення коефіцієнтів підставимо y_1^* і $(y_1^*)''$ у рівняння

$$y'' + y = 4\cos x.$$
$$2A\cos x - 2B\sin x + x(-A\sin x - B\cos x) + x(A\sin x + B\cos x) = 4\cos x,$$
$$2A\cos x - 2B\sin x = 4\cos x.$$

З останньої рівності $2A = 4,\ -2B = 0$, звідки $A = 2,\ B = 0$. Отже,

$$y_1^* = 2x\sin x.$$

Для правої частини $f_2(x) = (x^2 + 1)e^x$ $\alpha = 1,\ \beta = 0$ та $\sigma = 1$ не є коренем характеристичного рівняння, $Q_m(x) = x^2 + 1$, $k = 2$. Частинний розв'язок рівняння $y'' + y = (x^2 + 1)e^x$ шукатимемо у вигляді

$$y_2^* = (Ax^2 + Bx + C)e^x .$$

Знайдемо $(y_1^*)'$ та $(y_1^*)''$:

$$(y_2^*)' = (2Ax + B + Ax^2 + Bx + C)e^x ,$$

$$(y_2^*)'' = (2A + 2Ax + B + 2Ax + B + Ax^2 + Bx + C)e^x =$$

$$= \left[(2A + 2B + C) + (4A + B)x + Ax^2\right]e^x .$$

Підставимо $(y_2^*)''$ і y_2^* в рівняння $y'' + y = (x^2 + 1)e^x$:

$$\left[(2A + 2B + C) + (4A + B)x + Ax^2 + Ax^2 + Bx + C\right]e^x = (x^2 + 1)e^x ,$$

$$\left[(2A + 2B + 2C) + (4A + 2B)x + 2Ax^2\right]e^x = (x^2 + 1)e^x .$$

Поділимо праву та ліву частину останньої рівності на e^x:

$$(2A + 2B + 2C) + (4A + 2B)x + 2Ax^2 = x^2 + 1.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях *x*, дістанемо:

$$A = \frac{1}{2}, \quad 2A + B = 0 , \quad A + B + C = \frac{1}{2} .$$

Звідки $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$, $C = 1$,

$$y_2^* = \left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right)e^x .$$

Отже, загальний розв'язок рівняння $y = \bar{y} + y_1^* + y_2^*$, або

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x \sin x + \left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right)e^x .$$

Контрольні запитання

1. У чому суть методу Ейлера розв'язання лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами?

2. Як визначається загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами в залежності від розв'язків відповідного характеристичного рівняння?

3. Сформулюйте теорему про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

4. У чому суть методу варіації довільних сталих (методу Лагранжа) знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння?

5. У чому суть методу невизначених коефіцієнтів знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння із правою частиною спеціального виду?

Вправи

1. Розв'яжіть диференціальні рівняння.

а) $y''=x^4+\sin 2x$;

б) $y''=xe^x$;

в) $y'''=\cos 3x+e^x$;

г) $y'''=5^x+\dfrac{1}{x}$;

д) $y'''=x^5+e^{2x}$;

е) $xy''=1+x^2$;

ж) $y'''=x^{-2}+\sin 4x$;

з) $y'''=6x+3^x$;

и) $y''=2\sin^2 x$;

к) $xy'''=x\sin 5x+x^3$;

л) $y''=\dfrac{\ln x}{x}$;

м) $y''=x\ln x$;

н) $y''=\sqrt{x}+\dfrac{1}{1+x^2}$;

п) $y''=xe^{x^2}+e^{-x}$;

р) $y''\sin^3 x=\cos x$;

с) $y''=4x^3+\ln x$.

2. Розв'яжіть диференціальні рівняння, що не містять явно

функцію y.

а) $y''(x^2+1)=2xy'$;

б) $xy''-y'=1$;

в) $xy''=y'+x^3$;

г) $(x-2)y''+y'=0$;

д) $x^2y''=(y')^2$;

е) $y''\ln^2 x-xy'=0$;

ж) $xy''-(x+1)y'+x+1=0$;

з) $(x^2+4)y''+(y')^2+4=0$;

и) $(x^2+5)y''-2xy'=0$;

к) $y''\cos x=(3+y')\sin x$;

л) $2xy'y'=(y')^2-1$;

м) $xy''=y'+x\sin x$;

н) $xy''-y'=x^2e^x$;

п) $y''=y'+x+1$;

р) $y''+2tgx\ y'=\cos^3 x$;

с) $xy''+y'+1=0$.

3. Розв’яжіть диференціальні рівняння, що не містять явно незалежну змінну x

а) $y''=e^y y'$;

б) $yy''-(y')^2=0$;

в) $3y'y''=2y$;

г) $(y')^2+2yy''=0$;

д) $y^2+(y')^2-2yy''=0$;

е) $y''=y'(1+(y')^2)$;

и) $y''=2y'(y+1)$;

к) $yy''+(y')^2=1$;

л) $y^3y''+1=0$;

м) $y''+(y')^2=2e^{-y}$;

н) $y''+\dfrac{1}{y+2}(y')^2=0$;

п) $yy''-2yy'\ln^2 y=(y')^2$;

ж) $y''y^3 + 25 = 0$; р) $yy'' - (y')^2 = y^3$;

з) $y'' + (y')^2 + y'(y-1) = 0$; с) $y''(y-1) = (y')^2 - y'$.

4. Знайдіть загальний розв’язок однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

а) $y'' + y' - 6y = 0$; л) $y'' + 12y' + 36y = 0$;

б) $y'' - 4y' - 5y = 0$; м) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$;

в) $y'' + 5y' + 6y = 0$; н) $y''' - 3y' - 2y = 0$;

г) $y'' - 5y' + 4y = 0$; о) $y''' + 3y'' + y' + 3y = 0$;

д) $y'' - 6y' + 9y = 0$; п) $y''' - 16y' = 0$;

е) $y'' + 10y' + 25y = 0$; р) $y^{IV} + 2y'' = 0$;

ж) $2y'' + y' - 6y = 0$; с) $y^{IV} - 4y''' + 3y'' = 0$;

з) $3y'' - 2y' + 2y = 0$; т) $y^{IV} + 2y'' + y = 0$;

и) $y'' + 2y' + 2y = 0$; у) $16y^{IV} + 8y'' + y = 0$;

к) $y'' - 2y' + 3y = 0$; х) $y^{IV} + y''' - 5y'' + 3y = 0$.

5. Розв'яжіть задачі Коші.

а) $y'' - 3y' + 2y = 0,\ y(0) = -2,\ y'(0) = 0$;

б) $y'' - 4y' + y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 2$;

в) $y'' - 4y' + 8y = 0,\ y(0) = 2\ y'(0) = 0$;

г) $y''+y'-6y=0,\ y(0)=1\ y'(0)=-1;$

д) $y''-3y'-10y=0,\ y(0)=1\ y'(0)=-2;$

е) $y''-7y'+12y=0,\ y(0)=0\ y'(0)=-3;$

ж) $y''+8y'+16y=0,\ y(0)=1\ y'(0)=4;$

з) $y''+2y'+17y=0,\ y(0)=0\ y'(0)=1;$

и) $y'''-3y''+3y'-y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=2,\ y''(0)=1;$

к) $y'''+2y''=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=0,\ y''(0)=1;$

л) $y'''+y'=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=-1,\ y''(0)=2;$

м) $y'''-2y''+y'=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=1;$

н) $y'''-9y'=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=3;$

о) $y'''-2y''-y'+2y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=0,\ y''(0)=-1;$

п) $y^{IV}+2y'''=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=2,\ y'''(0)=-1;$

р) $y^{IV}+4y''=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=-1,\ y''(0)=4,\ y'''(0)=1;$

с) $y^{IV}+6y''+9y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=1,\ y''(0)=0,\ y'''(0)=4;$

т) $y^{IV}+2y''+y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=-1,\ y''(0)=1,\ y'''(0)=6;$

у) $y^{IV}+2y'''+y''=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=-1,\ y''(0)=0,\ y'''(0)=2;$

х) $y^{IV}+2y'''-15y''=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=-2,\ y''(0)=1,\ y'''(0)=2.$

6. Знайдіть загальний розв’язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь із правою частиною спеціального вигляду.

а) $y''-4y'+3y=(x+1)e^{3x};$

б) $y''-4y'+4y=xe^{x};$

в) $y''-2y'+y=4e^{x}\cos x;$

л) $y''+6y'+9y=2(x-1)e^{-3x};$

м) $y''-2y'+10y=e^{x}\sin 3x;$

н) $y''-6y'+8y=(x^2+x)e^{3x};$

г) $y''-2y'+17y=e^{x}\sin 4x$;

д) $y''+4y=-\cos 2x$;

е) $y''+2y'+5y=(x+3)e^{-x}$;

ж) $y''+2y'+y=e^{-x}(x^2+4x)$;

з) $9y''+6y'+y=-\sin x$;

и) $y''+25y=10\sin 5x$;

к) $y''-5y'+4y=(x+2)e^{x}$;

о) $y''+y=(x-6)\cos x$;

п) $y''+9y=x^2+4x$;

р) $4y''-4y'+y=(x+4)e^{0,5x}$;

с) $y''+y'-2y=4xe^{x}+\cos x$;

т) $y''-2y'-3y=e^{4x}+6x$;

у) $y''+3y'-4y=e^{-4x}+8x\sin x$;

х) $y''+25y=x\sin 5x+4$;

7. Знайдіть загальний розв’язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь методом варіації довільної сталої.

а) $y''+y=tgx$;

б) $y''-y=\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}$;

в) $y''-y=e^{2x}\cos e^{x}$;

г) $y''+y=\dfrac{4}{\sin^3 x}$;

д) $y''+6y=\dfrac{1}{4+\cos^2 3x}$;

е) $y''+4y'=\dfrac{1}{\sin 2x}$;

л) $y''-3y'+2y=3x^2$;

м) $y''-2y'+2y=e^{x}tgx$;

н) $y''-3y'+2y=\dfrac{e^{x}}{1+e^{-x}}$;

о) $y''+y-12y=\dfrac{\ln(1+e^{x})}{e^{x}}$;

п) $y''-4y'+4y=e^{x}(4x+1)^2$;

р) $y''+3y'+2y=\sin(e^{x})$;

ж) $y''+y'=tg^2x$;

з) $y''+y'=tg^2x$;

и) $y''-9y'=\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^x}}$;

к) $y''+y'=\dfrac{1}{\sin^2 x+3}$;

с) $y''-2y'+y=\dfrac{x^2+4x+4}{x^3}e^x$;

т) $y''-5y'+6y=arctg(e^x)$;

у) $y''-9y'+20y=\dfrac{e^{4x}}{16+e^{-x}}$;

х) $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-x}}{x^2+1}$.

Розділ 3. Системи диференціальних рівнянь

3.1. Основні поняття та означення

Означення. *Системою диференціальних рівнянь* n-го *порядку* називається сукупність диференціальних рівнянь, кожне з яких пов'язує незалежну змінну t, шукані функції $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ та їхні похідні $y_1', y_1'', ..., y_1^{(n)}$, $y_2', y_2'', ..., y_2^{(n)}, \ldots$, $y_n', y_n'', ..., y_n^{(n)}$. Система диференціальних рівнянь n-го порядку записується у вигляді

$$F_i(t, y_1, y_2, \ldots y_n, y_1'.y_2', \ldots, y_n', ..., y_1^{(n)},\ y_2^{(n)}, ..., y_n^{(n)}) = 0, \qquad (83)$$

де $i = 1, 2, \ldots, n$.

Система диференціальних рівнянь першого порядку, що містить n шуканих функцій $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ має вигляд

$$\begin{cases} F_1(t, y_1, y_2, \ldots y_n, y_1'.y_2', \ldots, y_n') = 0, \\ F_2(t, y_1, y_2, \ldots y_n, y_1'.y_2', \ldots, y_n') = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(t, y_1, y_2, \ldots y_n, y_1'.y_2', \ldots, y_n') = 0. \end{cases} \qquad (84)$$

Якщо система (84) розв'язана відносно похідних шуканих функцій і має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases} \qquad (85)$$

вона називається *нормальною системою диференціальних рівнянь* або *системою в нормальній формі.*

Означення. *Розв'язком системи рівнянь* (85) на проміжку $(\alpha;\beta) \subset \mathbf{R}$ називається сукупність неперервно диференційовних на

$(\alpha;\beta)$ функцій $y_i = \varphi_i(t)$, $i = 1,2,\ldots n$, що задовольняють кожне з рівнянь системи, тобто

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = f_i(t,\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_n) \quad i = 1,2,\ldots n$$

для всіх $t \in (\alpha;\beta)$.

Початкові умови для системи (85) мають вигляд

$$y_1(t_0) = y_1^0,\ y_2(t_0) = y_2^0,\ \ldots,\ y_n(t_0) = y_n^0, \tag{86}$$

де $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ – задані дійсні числа.

Задачею Коші для системи диференціальних рівнянь (85) називається задача знаходження розв'язку $y_i = \varphi_i(t)$, $i = 1,2,\ldots n$, системи, який задовольняє початкові умови (86).

Нехай функції f_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ системи (85) визначені в деякій відкритій області $D \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ зміни своїх аргументів $t, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Для системи (85) справедлива теорема Коші *про існування і єдиність розв'язку*.

Теорема (про існування і єдиність розв'язку). Якщо в системі (85) всі функції $f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними за y_i у деякій відкритій області $D \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$, то для довільної точки $M_0(t_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) \in D$ існує єдиний розв'язок $y_1 = \varphi_1(t), y_2 = \varphi_2(t), \ldots, y_n = \varphi_n(t)$ системи, визначений у деякому околі точки $t_0 \in (\alpha;\beta)$, який задовольняє початкові умови (86).

Нехай $D \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ – область, у кожній точці якої виконуються умови теореми Коші про існування та єдиність розв'язку для системи (85).

Означення. *Загальним розв'язком системи* (85) в області D називається сукупність n диференційовних функцій

$$
\begin{aligned}
&y_1 = \varphi_1(t_0, C_1, C_2, \ldots, C_n),\\
&y_2 = \varphi_2(t_0, C_1, C_2, \ldots, C_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_n = \varphi_n(t_0, C_1, C_2, \ldots, C_n),
\end{aligned}
$$

які залежать від n довільних сталих і задовольняють такі умови:

1) вони задовольняють усі рівняння системи за будь-яких значень сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$;

2) для будь-яких початкових умов (86) можна однозначно визначити значення сталих $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, \ldots, C_n = C_n^0$ такі, що функції $\varphi_i(t, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, задовольняють ці початкові умови

$$
\begin{cases}
\varphi_1(t_0, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0) = y_1^0,\\
\varphi_2(t_0, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0) = y_2^0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi_n(t_0, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0) = y_n^0.
\end{cases}
$$

Вважається, що початкові значення $t_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0$ належать області D, де справджується теорема про існування і єдиність розв'язку системи диференціальних рівнянь (85).

Означення. *Частинним розв'язком системи диференціальних рівнянь* називається розв'язок, отриманий із загального розв'язку за певних значень констант $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Одним із методів розв'язання нормальних систем диференціальних рівнянь є *метод виключення*, який полягає у зведенні нормальної системи n диференціальних рівнянь до одного диференціального рівняння n-го порядку або до кількох рівнянь, меншого порядку, ніж n. Для цього, наприклад, перше рівняння системи (85) диференціюють послідовно $n-1$ разів і кожного разу замість похідних $\dfrac{dy_i}{dt}$ підставляють їхні вирази $f_i(t, y_1, y_2, \ldots y_n)$ із системи (85). У результаті таких підстановок матимемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = F_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} = F_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d^n y_1}{dt^n} = F_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{87}$$

З перших $n-1$ рівнянь системи знаходять $y_2, y_3, \ldots, y_n$ і підставляють в останнє рівняння. У результаті дістанемо диференціальне рівняння n-го порядку

$$\frac{d^n y_1}{dt^n} = F\left(t, y_1, \frac{dy_1}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1} y_1}{dt^{n-1}} \right),$$

розв'язавши яке знаходимо розв'язки нормальної системи (85).

Приклад 33. Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 5y. \end{cases}$$

Розв'язання. Застосуємо метод виключення. Продиференціюємо перше рівняння системи за змінною t:

$$x''_{tt} = 5x'_t + 4y'_t.$$

Підставимо в цю рівність y'_t із другого рівняння системи:

$$x''_{tt} = 5x'_t + 4(4x + 5y) \quad \Rightarrow \quad x''_{tt} = 5x'_t + 16x + 20y\ .$$

Замінимо функцію $y = y(t)$ її виразом із першого рівняння системи:

$$y=\frac{1}{4}(x_t'-5x), \qquad (88)$$

$$x_{tt}''=5x_t'+16x+5(x_t'-5x), \qquad x_{tt}''-10x_t'+9x=0.$$

Отримали лінійне однорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Для його розв'язання складаємо характеристичне рівняння і знаходимо його корені:

$$k^2-10k+9=0,$$
$$k_1=1,\ \ k_2=9.$$

Лінійно незалежні частинні розв'язки мають вигляд: $x_1(t)=e^t,\ \ x_2(t)=e^{9t}$. Загальний розв'язок

$$x(t)=C_1e^t+C_2e^{9t}.$$

Для знаходження $y(t)$ підставимо в рівняння (88) знайдену функцію $x(t)$ та її похідну $x'(t)=C_1e^t+9C_2e^{9t}$.

Дістанемо

$$\begin{aligned}y(t)&=\frac{1}{4}\left(C_1e^t+9C_2e^{9t}-5\left(C_1e^t+C_2e^{9t}\right)\right)=\\&=\frac{1}{4}\left(C_1e^t+9C_2e^{9t}-5C_1e^t-5C_2e^{9t}\right)=\\&=-C_1e^t+C_2e^{9t}.\end{aligned}$$

Отже, загальний розв'язок заданої системи:

$$x(t)=C_1e^t+C_2e^{9t}, \quad y(t)=-C_1e^t+C_2e^{9t},$$

де C_1,C_2 – довільні дійсні сталі.

Цей розв'язок можна подати у векторному вигляді

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}e^t\\-e^t\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}e^{9t}\\e^{9t}\end{pmatrix},$$

де

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} \text{ і } \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{9t} \\ e^{9t} \end{pmatrix}$$

– два лінійно незалежні розв'язки.

Приклад 34. Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y + 2e^t. \end{cases}$$

Розв’язання. Розв’яжемо систему методом виключення. Продиференціюємо перше рівняння системи

$$x'' = 2x' + y' + e^t.$$

Підставимо в отримане рівняння замість y' його вираз з другого рівняння системи:

$$x'' = 2x' + 3x + 4y + 2e^t + e^t,$$

$$x'' = 2x' + 3x + 4y + 3e^t. \qquad (89)$$

Функцію y знайдемо з першого рівняння системи

$$y = x' - 2x - e^t \qquad (90)$$

і підставимо її у вираз (89):

$$x'' = 2x' + 3x + 4(x' - 2x - e^t) + 3e^t,$$

$$x'' = 6x' - 5x - e^t,$$

$$x'' - 6x' + 5x = -e^t. \qquad (91)$$

Отримали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Для відповідного йому однорідного рівняння $x'' - 6x' + 5x = 0$ запишемо характеристичний многочлен і знайдемо його корені.

$$k^2 - 6k + 5 = 0, \quad k_1 = 1, \; k_2 = 5.$$

Загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння

$$\overline{x} = C_1 e^t + C_2 e^{5t}, \;\; C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Оскільки права частина неоднорідного рівняння (91) має вигляд (79) та $\alpha = 1$ є коренем характеристичного рівняння кратності один, то частинний розв’язок цього рівняння шукатимемо у вигляді

$$x^* = Ate^t.$$

Підставивши x^* у рівняння (91), отримаємо $A = \frac{1}{4}$.

Таким чином, загальний розв’язок рівняння (91) має вигляд

$$x = \overline{x} + x^* = C_1 e^t + C_2 e^{5t} + \frac{1}{4} te^t.$$

З виразу (90) знаходимо

$$y = C_1 e^t + 5C_2 e^t + \frac{1}{4} e^t + \frac{1}{4} te^t - 2(C_1 e^t + C_2 e^{5t} + \frac{1}{4} te^t) - e^t =$$

$$= -C_1 e^t + 3C_2 e^t - \frac{1}{4} te^t - \frac{3}{4} e^t.$$

Отже, загальний розв'язок заданої системи:

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t} + \frac{1}{4} te^t, \quad y(t) = -C_1 e^t + 3C_2 e^t - \frac{1}{4} te^t - \frac{3}{4} e^t,$$

де $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.

Контрольні запитання

1. Що називають системою диференціальних рівнянь n-го порядку?

2. Яку систему диференціальних рівнянь називають системою в нормальній формі?

3. Що називають задачею Коші для системи диференціальних рівнянь?

4. Сформулюйте теорему про існування і єдиність розв'язку системи диференціальних рівнянь першого порядку.

5. Що називають загальним розв'язком системи диференціальних рівнянь першого порядку?

6. У чому суть методу виключення розв'язання нормальної системи диференціальних рівнянь?

3.2. Системи лінійних диференціальних рівнянь

Означення. Нормальна система диференціальних рівнянь називається *лінійною*, якщо кожне рівняння системи лінійне відносно шуканих функцій та їхніх похідних:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \ldots + a_{1n}(t)y_n + f_1(t), \\ y_2' = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \ldots + a_{2n}(t)y_n + f_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \ldots + a_{nn}(t)y_n + f_n(t), \end{cases} \tag{92}$$

де $a_{ij}(t)$ і $f_i(t)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ – визначені і неперервні на інтервалі $(\alpha;\beta)$ функції.

Якщо всі коефіцієнти a_{ij} – сталі, то система (92) називається *лінійною системою рівнянь зі сталими коефіцієнтами*.

Означення. Лінійна система (92) називається *однорідною*, якщо функції $f_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ тотожно дорівнюють нулю на інтервалі $(\alpha;\beta)$:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \ldots + a_{1n}(t)y_n, \\ y_2' = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \ldots + a_{2n}(t)y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \ldots + a_{nn}(t)y_n. \end{cases} \tag{93}$$

Лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь можна записати у вигляді

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \quad y \in \mathbf{R}^n, \quad t \in (\alpha;\beta).$$

де $A(t)$ – квадратна матриця порядку n, елементи якої $a_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ визначені і неперервні для $t \in (\alpha;\beta)$.

Множина V всіх розв'язків однорідної системи (93), визначених на інтервалі $(\alpha;\beta)$, є лінійним простором.

Фундаментальною системою розв'язків однорідної лінійної системи диференціальних рівнянь називається базис лінійного простору розв'язків V, тобто n лінійно незалежних розв'язків цієї системи.

Матриця $Y(t)$, стовпчиками якої є розв'язки, що утворюють фундаментальну систему розв'язків, називається *фундаментальною матрицею.*

Якщо $Y(t)$ – фундаментальна матриця, а C – стала невироджена матриця розміру $n \times n$, то $Y(t) \cdot C$ – також фундаментальна матриця системи (93).

Однорідна система (93) завжди має фундаментальну матрицю і будь-який розв'язок $y(t)$ системи (93) можна подати у вигляді

$$y(t) = Y(t) \cdot C, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix},$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – сталі, тобто будь-який розв'язок $y(t)$ є лінійною комбінацією розв'язків фундаментальної системи:

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \ldots + C_n y_n(t).$$

Будь-які $n+1$ розв'язків системи (93) лінійно залежні.

Визначником Вронського системи вектор-функцій $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ називається функція

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) \ldots \varphi_{n1}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{1n}(t) \ldots \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix}, \quad \varphi_k(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{k1}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{kn}(t) \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots n.$$

Розв'язки $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ утворюють фундаментальну систему тоді і лише тоді, коли їх визначник Вронського $W(t)$ відмінний від нуля для деякого $t \in (\alpha;\beta)$.

Якщо визначник Вронського розв'язків системи (93) дорівнює нулю в одній точці, то він тотожно дорівнює нулю для всіх $t \in (\alpha;\beta)$.

Теорема. Загальний розв'язок $\bar{y}$ лінійної однорідної системи (93) для $t \in (\alpha;\beta)$ є лінійною комбінацією n її лінійно незалежних частинних розв'язків $y_1, y_2, \ldots, y_n$, що утворюють фундаментальну систему розв'язків:

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i .$$

Лінійна неоднорідна система (92) у векторно матричній формі записується у вигляді

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t), \tag{94}$$

де $A(t)$ – квадратна матриця порядку n, елементи якої є функції $a_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, y – вектор з компонентами $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $f(t)$ – вектор-функція з компонентами $f_i(x)$.

Якщо відома фундаментальна матриця $Y(t)$ лінійної однорідної системи

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y , \tag{95}$$

то систему (94) можна розв'язати за допомогою *методу варіації довільних сталих* (*методу Лагранжа*).

Згідно з цим методом загальний розв'язок системи (94) шукається у вигляді

$$y = Y(t)c(t) .$$

Невідомі компоненти $c_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ вектора $c(t)$ визначаються із системи рівнянь

$$Y(x)\frac{dc}{dt} = f(t) .$$

Ця система має єдиний розв'язок, оскільки $\det Y(x) \neq 0$.

Системи можна також розв'язувати іншими методами, зокрема методом виключення.

Теорема. Загальний розв'язок y лінійної неоднорідної системи (92) при $t \in (\alpha;\beta)$ є сумою загального розв'язку $\bar{y}$ відповідної однорідної системи (93) та будь-якого частинного розв'язку y^* неоднорідної системи:

$$y = \bar{y} + y^* = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i + y^*.$$

Як і для лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами у разі, коли в системі (95) матриця $A(x) = A$ − стала, а функції $f_i(t)$ в правих частинах є функціями спеціального вигляду, для знаходження частинного розв'язку неоднорідної системи можна використовувати метод невизначених коефіцієнтів.

Контрольні запитання

1. Яку систему диференціальних рівнянь називають лінійною?
2. Яку систему називають лінійною однорідною системою диференціальних рівнянь?
3. Що називають фундаментальною системою розв'язків лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь?
4. Сформулюйте теорему про загальний розв'язок лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь.
5. Сформулюйте теорему про загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь.

3.3. Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

Лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{dy}{dx} = Ay, \quad y \in \mathbf{R}^n, \tag{96}$$

де A – дійсна стала квадратна матриця порядку n, методом виключення можна звести до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами відносно однієї невідомої функції.

Наведемо інший метод розв'язання таких систем.

Метод Ейлера. Згідно з цим методом розв'язки системи (96) шукаються у вигляді

$$y = e^{\lambda x} v, \qquad v = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T. \tag{97}$$

Вираз (97) є розв'язком системи (96) тоді і лише тоді, коли λ – власне значення матриці A, а v – власний вектор, який відповідає цьому власному значенню λ.

Якщо власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матриці A попарно різні, а $v_1, v_2, \ldots, v_n$ – відповідні їм власні вектори, то загальний розв'язок системи (96) має вигляд,

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} v_2 + \ldots + C_n e^{\lambda_{n1} x} v_n,$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – довільні сталі.

Якщо власному значенню λ кратності k відповідає рівно k лінійно незалежних власних векторів $v_1, v_2, \ldots, v_k$, то система (96) має k лінійно незалежних розв’язків виду $e^{\lambda t} v_1, \ldots, e^{\lambda t} v_k$.

Якщо власному значенню λ кратності k відповідає m, $m < k$ лінійно незалежних власних векторів, то розв'язки, що відповідають цьому власному значенню, шукають у вигляді

$$y = (h_0 + h_1 x + \ldots + h_{k-m} x^{k-m}) e^{\lambda x}, \tag{98}$$

де $h_0, h_1, \ldots, h_{k-m}$ – невідомі вектори.

Для знаходження координат невідомих векторів $h_0, h_1, \ldots, h_{k-m}$ вираз (98) підставляється в систему (96). Потім коефіцієнти подібних членів у правій і лівій частинах системи прирівнюються і з отриманих рівнянь визначаються коефіцієнти невідомих векторів.

Якщо серед власних значень матриці A є комплексно спряжені пари чисел $\lambda = \alpha \pm \beta i$, то наведеним способом можна побудувати відповідні їм комплексні розв'язки виду $y = u + iv$. Дійсна і уявна частини цих комплексних розв'язків будуть дійсними лінійно незалежними розв'язками системи (96), що відповідають власним значенням $\lambda = \alpha + \beta i$, тобто

$$y_1 = \mathrm{Re}(e^{(\alpha+\beta i)}v),\ y_2 = \mathrm{Im}(e^{(\alpha+\beta i)}v),$$

де v – власний вектор матриці A, який відповідає власному значенню $\lambda = \alpha + \beta i$.

Розв'язки, що відповідають кореню $\lambda = \alpha - \beta i$ будуть лінійно залежними з розв'язками, які відповідать кореню $\lambda = \alpha + \beta i$.

Приклад 35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases} \tag{99}$$

Розв'язання. Застосуємо метод Ейлера. Частинні розв'язки системи шукатимемо у вигляді

$$x = \alpha_1 e^{\lambda t}, \qquad y = \alpha_2 e^{\lambda t}.$$

Підставивши ці розв'язки в систему, дістанемо систему лінійних рівняння відносно α_1 і α_2:

$$\begin{cases} (-1-\lambda)\alpha_1 + 5\alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + (3-\lambda)\alpha_2 = 0. \end{cases} \tag{100}$$

Лінійна однорідна система має ненульовий розв'язок, якщо її визначник

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 5 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0.$$

Звідси маємо $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$, що є різними дійсними власними значеннями матриці системи диференціальних рівнянь (99).

Якщо $\lambda_1 = 4$, то розширена матриця системи лінійних рівнянь (100) та загальний розв'язок системи мають вигляд

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 & | & 0 \\ 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}, \ \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2, \\ \alpha_2 = c_2 \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Звідси $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – власний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda_1 = 4$.

Частинний розв’язок системи диференціальних рівнянь (99) має вигляд:

$$x_1 = e^{4t}, \qquad y_1 = e^{4t}.$$

Якщо $\lambda_2 = -2$, то розширена матриця системи лінійних рівнянь (100) та загальний розв’язок системи мають вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & | & 0 \\ 1 & 5 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \alpha_1 = -5\alpha_2, \\ \alpha_2 = c_2 \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Звідси $v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ – власний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda_2 = -2$.

Частинний розв’язок системи диференціальних рівнянь (99) має вигляд:

$$x_1 = -5e^{-2t}, \qquad y_1 = e^{-2t}.$$

Оскільки визначник

$$\begin{vmatrix} e^{4t} & e^{4t} \\ -5e^{-2t} & e^{-2t} \end{vmatrix} = 6e^{2t} \neq 0,$$

то отримані розв'язки лінійно незалежні і утворюють фундаментальну систему. Загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь має вигляд

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{4t} v_1 + C_2 e^{-2t} v_2 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + C_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} =$$

$$=\begin{pmatrix} C_1e^{4t}-5C_2e^{-2t} \\ C_1e^{4t}+C_2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

або $x=C_1e^{4t}-5C_2e^{-2t}$, $y=C_1e^{4t}+C_2e^{-2t}$, $C_1,C_2\in\mathbf{R}$.

Приклад 36. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=4x-y+z, \\ \dfrac{dy}{dt}=3y-2z, \\ \dfrac{dz}{dt}=-4y+z. \end{cases}$$

Розв’язання. Застосуємо метод Ейлера. Запишемо характеристичне рівняння матриці A системи диференціальних рівнянь

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(4-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+1)=0.$$

Звідси маємо три різні дійсні власні значення $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=4$, $\lambda_3=5$ матриці A системи диференціальних рівнянь.

Знайдемо власний вектор матриці A, що відповідає власному значенню $\lambda_1=-1$. Для цього розв’яжемо однорідну систему лінійних рівнянь $(A-\lambda_1E)v=0$:

$$\begin{cases} (4-\lambda_1)\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0, \\ (3-\lambda_1)\alpha_2-2\alpha_3=0, \\ -4\alpha_2+(1-\lambda_1)\alpha_3=0; \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{3}{5}\alpha_2, \\ \alpha_2 = c_2 \in \mathbf{R}, \\ \alpha_3 = -2\alpha_2. \end{cases} \quad v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ – власний вектор.}$$

Для $\lambda_2 = 4$ маємо систему лінійних однорідних рівнянь

$$(A - \lambda_2 E)v = 0,$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \ , \begin{cases} \alpha_1 = c_1 \in \mathbf{R}, \\ \alpha_2 = 0, \\ \alpha_3 = 0. \end{cases} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ – власний вектор.}$$

Для $\lambda_3 = 5$ маємо систему лінійних однорідних рівнянь

$$(A - \lambda_3 E)v = 0,$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2\alpha_3, \\ \alpha_2 = -\alpha_3, \\ \alpha_3 = c_3 \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ – власний вектор.}$$

Загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь має вигляд

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-5\lambda} v_1 + C_2 e^{-2\lambda} v_2 + C_3 e^{7\lambda} v_3 =$$

$$= C_1 e^{-\lambda} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + C_2 e^{4\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{5\lambda} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

або

$$x = -3C_1 e^{-\lambda} + C_2 e^{4\lambda} + 2C_3 e^{5\lambda},$$

$$y = 5C_1 e^{-\lambda} - C_3 e^{5\lambda},$$

$$z = 10C_1 e^{-\lambda} + C_3 e^{5\lambda},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbf{R}.$$

Приклад 37. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$$

Розв'язання. Застосуємо метод Ейлера. Запишемо характеристичне рівняння і знайдемо власні значення матриці A системи

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0.$$

Маємо $\lambda = 3 -$ власне значення кратності 2.

Розв'язки системи диференціальних рівнянь шукатимемо у вигляді

$$x = (A + Bt)e^{3t}, \qquad y = (C + Dt)e^{3t}.$$

Підставляючи функції в систему, дістанемо

$$\begin{cases} B + 3(A + Bt) = 4(A + Bt) - (C + Dt), \\ D + 3(C + Dt) = A + Bt + 2(C + Dt). \end{cases}$$

Прирівнявши відповідні коефіцієнти, отримаємо систему лінійних рівнянь відносно невідомих A, B, C, D:

$$\begin{cases} A-B-C=0, \\ B-D=0. \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

$$\begin{cases} A=C+D, \\ B=D, \\ C=c_1 \in \mathbf{R}, \\ D=d_1 \in \mathbf{R}. \end{cases} \text{– загальний розв'язок.}$$

Звідси дістанемо два лінійно незалежні розв'язки, наприклад,

$$A=1, \;\; B=0, \;\; C=1, \;\; D=0$$

і

$$A=1, \;\; B=1, \;\; C=0, \;\; D=1.$$

Маємо два лінійно незалежні розв'язки системи

$$x_1=e^{3t}, \qquad y_1=e^{3t};$$
$$x_2=(1+t)e^{3t}, \quad y_2=te^{3t}$$

Загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь має вигляд:

$$x=C_1e^{3t}+C_2(1+t)e^{3t}, \quad y=C_1e^{3t}+C_2te^{3t}.$$

Приклад 38. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+5y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-x-3y. \end{cases}$$

Розв'язання. Застосуємо метод Ейлера. Запишемо характеристичне рівняння і знайдемо власні значення матриці A системи.

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+2\lambda+2=0.$$

Маємо комплексно спряжені власні значення $\lambda_{1,2}=-1\pm i$.

Шукатимемо розв'язок системи, що відповідає кореню $\lambda_1 = -1 + i$:

$$x = \alpha_1 e^{(-1+i)t}, \qquad y = \alpha_2 e^{(-1+i)t}.$$

Підставляючи в систему диференціальних рівнянь, дістанемо систему лінійних рівнянь відносно змінних α_1, α_2:

$$\begin{cases} (-1+i)\alpha_1 = \alpha_1 + 5\alpha_2, \\ (-1+i)\alpha_2 = -\alpha_1 - 3\alpha_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} (-2+i)\alpha_1 - 5\alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + (2+i)\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2+i & -5 & 0 \\ 1 & 2+i & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \begin{cases} \alpha_1 = -(2+i)\alpha_2, \\ \alpha_2 = c_2 \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Одним із розв'язків системи є

$$\alpha_1 = 2 + i, \quad \alpha_2 = -1,$$

тому

$$x = (2+i)e^{(-1+i)t}, \qquad y = -e^{(-1+i)t}$$

– комплексний розв'язок даної системи, який запишемо у вигляді

$$x = (2+i)e^{-t}(\cos t + i\sin t) = e^{-t}(2\cos t - \sin t + i(\cos t + 2\sin t)),$$

$$y = -e^{-t}(\cos t + i\sin t).$$

Коефіцієнти системи – дійсні числа. Тому дійсна і уявна частини наведеного розв'язку також є розв'язками системи. Отже, маємо два дійсні розв'язки:

$$x_1(t) = e^{-t}(\cos t - \sin t), \qquad x_2(t) = e^{-t}(\cos t + 2\sin t),$$

$$y_1(t) = -e^{-t}\cos t, \qquad y_2(t) = -e^{-t}\sin t.$$

Можна показати, що ці розв'язки лінійно незалежні. Звідси загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь має вигляд:

$$x = e^{-t}((C_1 + C_2)\cos t - (C_1 - 2C_2)\sin t),$$

$$y = -e^{-t}(C_1\cos t + C_2\sin t),\ C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Контрольні запитання

1. Що називають лінійною однорідною системою диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами?

2. У чому полягає метод Ейлера розв'язування лінійних однорідних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами?

Вправи

1. Розв'яжіть системи диференціальних рівнянь методом виключення.

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x. \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$ д) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 5y. \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$

є) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 5y + 2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y - 5. \end{cases}$ ж) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y - 2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 2y + 6t. \end{cases}$

з) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y + e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y - e^{2t}. \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y - \sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$

2. Розв'яжіть системи диференціальних рівнянь методом Ейлера

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$ в)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$$

г) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 4y. \end{cases}$ д) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 2y. \end{cases}$

є) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 2y. \end{cases}$ ж) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y. \end{cases}$ з) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$

и) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 2z. \end{cases}$ к) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y - 2z, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y. \end{cases}$

м) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -2y + 4z. \end{cases}$ н) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = y, \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x - 7y + z. \end{cases}$

о) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y + 2z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -2z. \end{cases}$ п) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -2y + 4z. \end{cases}$

Список літератури

1. *Дубовик В.П.* Вища математика: навчальний посібник/ Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: Вища школа,1993. – 648 с.
2. *Івасишен С.Д.* Звичайні диференціальні рівняння: методи розв'язування та застосування: навчальний посібник/ Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Турчина Н.І. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 329 с.
3. *Копась І.М.* Диференціальні рівняння: навчальний посібник для інженерних спеціальностей – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 126 с.
4. *Овчинніков П.П.* Вища математика: підручник: У 2 ч. – Ч. 2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи. – К.: Техніка, 2004. – 792 с.
5. *Перестюк М.О.* Збірник задач з диференціальних рівнянь: навчальний посібник/ Перестюк М.О., Свіщук М.Я. – К.: ТВіМС, 2004. – 224 с.
6. *Самойленко А.М.* Диференціальні рівняння у прикладах і задачах: навчальний посібник/ Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. – К.: Вища школа, 1994. – 455 с.

Навчальне видання

БОНДАРЕНКО Наталія В'ячеславівна
ОТРАШЕВСЬКА Валентина Володимирівна

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник

Корегування та коректура *Т.В. Івченко*
Комп'ютерне верстання *Т.І. Кукарєвої*

Підписано до друку 05 .01.2026. Формат $60\times80_{1/16}$
Ум. друк. арк. 6,74. Обл.-вид. акр. 7,25.
Тираж 25 прим. Вид. № І/І-26. Зам. № 1/1-26.

Видавець і виготовлювач
Київський національний університет будівництва і архітектури

проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.