Приклади розв'язування задач

Приклад 2.1. Визначити степені вершин графа, що зображено на рис. 2.1.

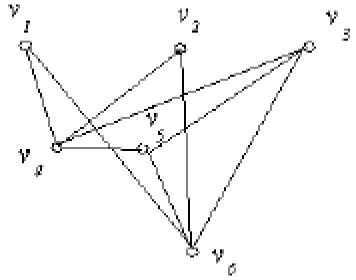


Рис. 2.1.

Розв'язування:

$deg\, v_1 = 2$; $deg\, v_2 = 2$; $deg\, v_3 = 3$; $deg\, v_4 = 4$; $deg\, v_5 = 3$; $deg\, v_6 = 4$.

$$\sum_{v \in G} deg\, v = 2+2+3+4+3+4 = 18 = 2 \cdot 9 = 2m.$$

У розглянутому графі дев'ять ребер, а вершин непарного степеня дві: v_3; v_5.

Для орієнтованого графа визначаються дві степені вершин: $deg\, v'$ - кількість ребер, що виходять із вершини v і $deg\, v''$ - кількість ребер, що входять у вершину v. Петля дає внесок по одиниці в обидві степені.

В орграфі суми степенів всіх вершин $deg\, v'$ і $deg\, v''$ рівні між собою і дорівнюють кількості ребер m цього графа: $\sum_{v \in G} deg\, v' = \sum_{v \in G} deg\, v'' = m$.

Приклад 2.2. Визначити степені вершин орграфа, зображеного на рис. 2.2.

Розв'язування:

$deg\, a' = 1$, $deg\, b' = 2$; $deg\, c' = 3$; $deg\, d' = 2$; $deg\, e' = 2$;

$deg\, a'' = 2$, $deg\, b'' = 1$; $deg\, c'' = 2$; $deg\, d'' = 2$; $deg\, e'' = 3$;

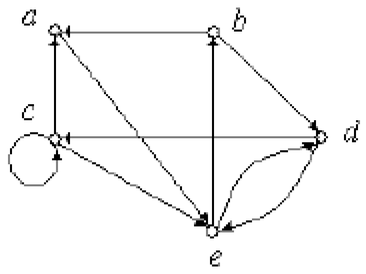


Рис. 2.2.

$$\sum_{v \in G} deg\, v' = 1+2+3+2+2 = 10 = \sum_{v \in G} deg\, v'' == 2+1+2+2+3 = 10 = m.$$

Приклад 2.3. Задати матрицями інцидентності і суміжності, а також списком ребер, неорієнтований граф, зображений на рис. 2.3.

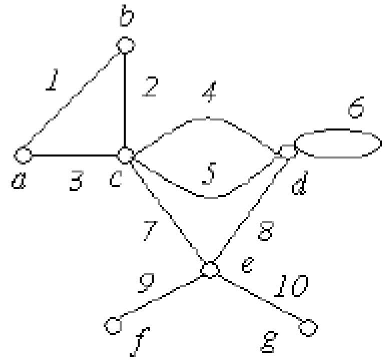


Рис. 2.3.

Розв'язування:

Матриця інцидентності

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
b	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
c	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0
d	0	0	0	1	1	2	0	1	0	0
e	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
f	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Матриця суміжності

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
a	0	1	1	0	0	0	0
b	1	0	1	0	0	0	0
c	1	1	0	2	1	0	0
d	0	0	2	1	1	0	0
e	0	0	1	1	0	1	1
f	0	0	0	0	1	0	0
g	0	0	0	0	1	0	0

Тут $\alpha = 2$.

Список ребер

Ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вершини	Початок	*a*	*b*	*a*	*c*	*c*	*d*	*c*	*d*	*e*	*e*
	Кінець	*b*	*c*	*c*	*d*	*d*	*d*	*e*	*e*	*f*	*g*

Як бачимо, у кожному стовпці матриці інцидентності є тільки два елементи, відмінних від нуля (або один, якщо ребро – петля).

Матриця суміжності симетрична щодо головної діагоналі.

Список ребер є найбільш компактним способом завдання графів.

Кожний із наданих способів однозначно описує граф, що зображено на рис. 2.3.

Приклад 2.4. Задати матрицями інцидентності, суміжності, списком ребер орієнтований граф, що зображено на рис.2.4.

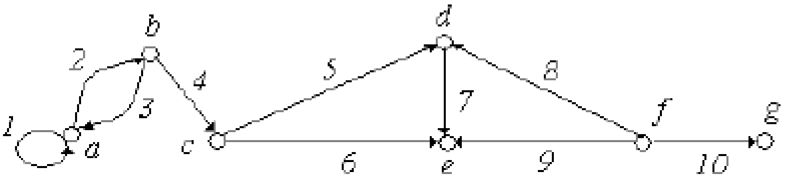


Рис. 2.4.

Розв'язування:

Матриця інцидентності

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	2	−1	1	0	0	0	0	0	0	0
b	0	1	−1	−1	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	1	−1	−1	0	0	0	0
d	0	0	0	0	1	0	−1	1	0	0
e	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
f	0	0	0	0	0	0	0	−1	−1	−1
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Матриця суміжності

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
a	1	1	0	0	0	0	0
b	1	0	1	0	0	0	0
c	0	0	0	1	1	0	0
d	0	0	0	0	1	0	0
e	0	0	0	0	0	0	0
f	0	0	0	1	1	0	1
g	0	0	0	0	0	0	0

Список ребер

Ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вершини	початок	*a*	*a*	*b*	*b*	*c*	*c*	*d*	*f*	*f*	*f*
	кінець	*a*	*b*	*a*	*c*	*d*	*e*	*e*	*d*	*e*	*g*

Приклад 2.5. Побудувати матрицю інцидентності неорієнтованого графа за списком ребер:

Ребро		1	2	3	4	5	6	7	8
Вершини	початок	*a*	*d*	*e*	*c*	*a*	*d*	*b*	*f*
	кінець	*d*	*f*	*f*	*e*	*b*	*c*	*f*	*f*

Розв'язування:

Матриця інцидентності, відповідно до списку ребер, має вигляд:

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	1	0	0	0	1	0	0	0
b	0	0	0	0	1	0	1	0
c	0	0	0	1	0	1	0	0
d	1	1	0	0	0	1	0	0
e	0	0	1	1	0	0	0	0
f	0	1	1	0	0	0	1	2

Приклад 2.6. Записати список ребер відповідно до матриці інцидентності орієнтованого графа:

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	1	0	0	0	0	0	0	−1
b	−1	−1	0	0	0	0	0	0
c	0	1	2	−1	0	0	0	0
d	0	0	0	1	2	−1	0	0
e	0	0	0	0	0	1	−1	0
f	0	0	0	0	0	0	1	1

Розв'язування:

Список ребер, записаний відповідно до матриці інцидентності орієнтованого графа має вигляд:

Ребро		1	2	3	4	5	6	7	8
Вершини	початок	*b*	*b*	*c*	*C*	*d*	*d*	*e*	*a*
	кінець	*a*	*c*	*c*	*D*	*d*	*e*	*f*	*f*

Практична робота №3. Обходи графів. Ейлерові та гамільтонові графи

Теоретичні відомості

Для визначення центра і радіуса графа необхідно побудувати для нього *матрицю відстаней* A, кожен елемент якої a_{ij} описує відстань між вершинами i і j графа G, тобто $a_{ij} = d(v_i, v_j)$. Очевидно, що матриця відстаней A симетрична щодо головної діагоналі (елементи якої дорівнюють нулю, тому що $d(v_i, v_i) = 0$).

Центром графа називається вершина, від якої максимальна з відстаней до інших вершин була б мінімальною.

Периферійною точкою графа називається вершина, від якої максимальна з відстаней до інших вершин була б максимальна.

Максимальна відстань від центра графа G до його вершин називається *радіусом графа* $r(G)$.

Зв’язний граф називається *гамільтоновим графом*, якщо існує замкнений ланцюг, який проходить через кожну вершину графа рівно один раз. Такий ланцюг називатимемо *гамільтоновим ланцюгом*, або *гамільтоновим циклом*.

Теорема. Якщо граф G має ребро розрізу, то він не може мати цикл Гамільтона. Якщо компоненти графа, отримані шляхом видалення ребра розрізу, мають цикл Гамільтона, то граф G має шлях Гамільтона.

Теорема (О. Оре, 1960) Якщо $G(X,W)$ - зв'язний граф з n вершинами $(n \ge 3)$ і для кожної пари несуміжних вершин u і v, сума степенів вершин задовольняє умові $deg\ u + deg\ v \ge n$, тоді граф $G(X,W)$ гамільтонів.

Теорема (Г. Дірак, 1952 р.) Якщо $G(X,W)$ - зв'язний граф з n вершинами $(n \ge 3)$ і для кожної пари несуміжних вершин u і v, виконується нерівність $\deg v \ge \frac{n}{2}$, то граф $G(X,W)$ гамільтонів.

Приклад 3.1. Визначити центр, периферійні вершини, радіус і діаметр графа G, зображеного на рис. 3.1.

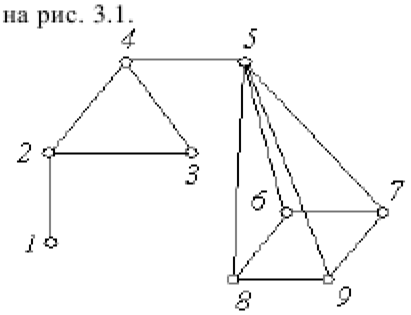


Рис. 3.1.

Розв'язування:

Матриця відстаней графа G має вигляд.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	0	1	1	2	3	4	4	4	4
2	1	0	1	1	2	3	3	3	3
3	1	1	0	1	2	3	3	3	3
4	2	1	1	0	1	2	2	2	2
5	3	2	2	1	0	1	1	1	1
6	4	3	3	2	1	0	1	1	2
7	4	3	3	2	1	1	0	1	1
8	4	3	3	2	1	1	1	0	1
9	4	3	3	2	1	2	1	1	0

Знайдемо максимальну відстань від кожної з вершин графа $l(v_i)$ як $\max\limits_{1\le j\le 9} a_{ij}$: $l(1)=4; l(2)=3; l(3)=3; l(4)=2; l(5)=3; l(6)=4; l(7)=4; l(8)=4;$ $l(9)=4$.

Отже, згідно з визначеннями, що подано вище, центром графа є вершина 4; периферійні вершини – 1, 6, 7, 8, 9. Радіус графа $r(G)=2$, а діаметр графа $D(G)=4$.

Приклад 3.2. Чи мають графи, зображені на рис. 3.2 (а, б), ейлеров цикл?

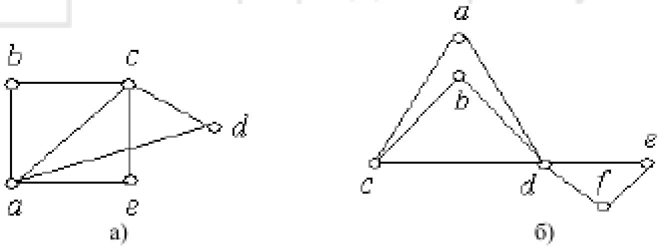


Рис. 3.2.

Розв'язування:

Щоб відповістити на поставлене запитання, порахуємо степені вершин графа:

а) $deg(a)=4; deg(b)=2; deg(c)=4; deg(d)=2; deg(e)=2$.

Степені всіх вершин графа, зображеного на рис. 3.2 а), парні, отже, граф має ейлеров цикл;

б) $deg(a)=2; deg(b)=2; deg(c)=3; deg(d)=5; deg(e)=2; deg(f)=2$.

Степені вершин c і d графа, що зображено на рис. 3.2 б), непарні, отже, граф не має ейлерового циклу.

Приклад 3.3. Знайдіть цикл Гамільтона, якщо він існує, для графа G, зображеного на рис. 3.3,а.

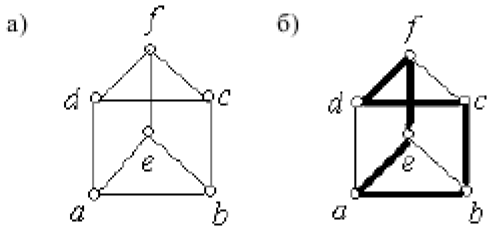
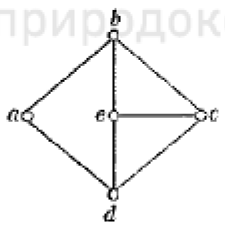


Рис. 3.3.

Розв'язування:

Граф G - зв'язний, кількість вершин графа – $n = 6$. Степінь кожної з вершин дорівнює 3, тобто кожна з несуміжних вершин графа задовольняє умові $\deg v \geq \frac{n}{2}$. Отже, даний граф є гамільтонів, тобто існує цикл Гамільтона. Знайти його можемо тільки методом перебирання. Результати прямого перебирання – цикл *baefdcb* (рис. 3.3,б).

Приклад 4.1. Знайти гамільтонів цикл у заданому графі.



Розв'язування:

Починаємо з довільної вершини. Будуємо шлях без повторення вершин, доки це можливо. Якщо вдалося пройти всі вершини, то перевіряємо, чи існує ребро, що з'єднує останню й початкову вершини цього шляху. Якщо описаний процес у певний момент неможливо продовжити, то повертаємося на одну вершину назад і намагаємося продовжити побудову шляху (без повторення вершин) іншим способом.

Пошук усіх гамільтонових циклів у заданому графі проілюстровано за допомогою дерева, зображеного на рис. 4.1. Роботу алгоритму почато з одноелементної послідовності, бо в циклі вибір першої вершини неістотний. Розв'язки задачі обведено, і до них у прямокутних рамках приписано відповідні гамільтонові цикли.

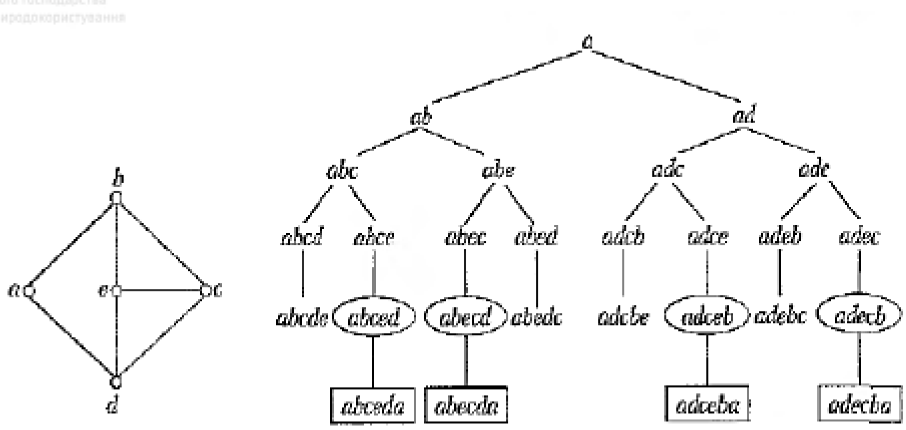


Рис. 4.1.