Завдання 1. Визначити степінь кожної вершини графа G, який зображений нарис 3.7. Побудувати його доповнення.

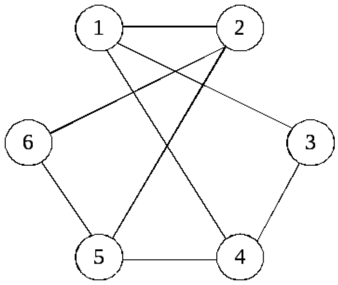
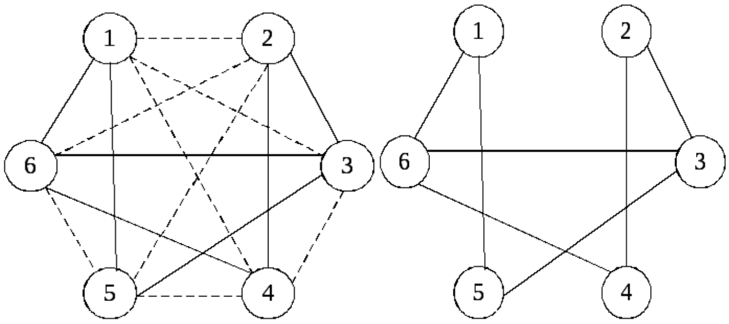


Рисунок 3.7 – Граф G

Розв'язок. Степені вершин визначаються кількістю ребер, які їй інцидентні. Тому: $\delta(1) = \deg 1 = 3$; $\delta(2) = \deg 2 = 3$; $\delta(3) = \deg 3 = 2$; $\delta(4) = \deg 4 = 3$; $\delta(5) = \deg 5 = 3$; $\delta(6) = \deg 6 = 2$.

Доповнення графа будується таким чином: з повного графа на 6-ти вершинах K_6 вилучаються ті ребра, які належать графу G . На рис. 3.8 а) ребра графа G відзначені пунктиром.



а) б)

Рисунок 3.8 – Граф K_6 (а) і доповнення графа G (б)

Перевірити правильність побудови можна так: сума степенів однойменних вершин графа G і його доповнення дорівнює 5 (степінь вершин графа K_6).

Завдання 2. Для орієнтованого графа G , який зображений на рис. 3.9, для кожної вершини визначити півстепені «виходу і заходу» (додатний степінь і від'ємний степінь), степінь вершини.

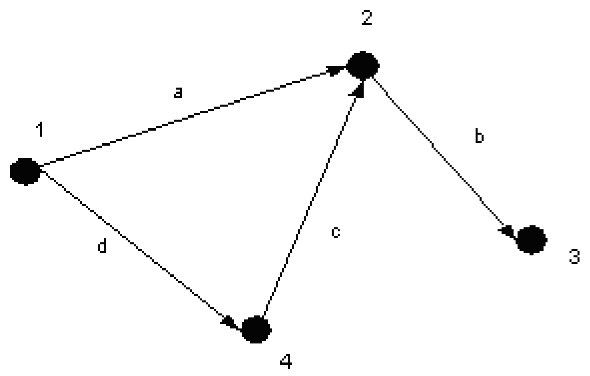


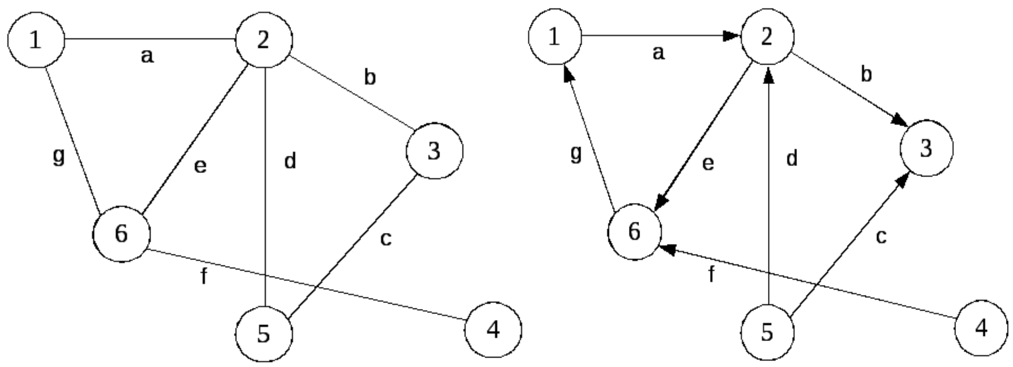
Рисунок 3.9 – Орієнтований граф G

Розв’язок. Додатний степінь вершини $\delta^+(x)$ – число дуг, що закінчуються у вершині X. Від’ємнийстепінь вершини $\delta^-(x)$ – число дуг, що починаються у вершині X.Степінь вершин графа G дорівнює $\delta(x) = \delta^+(x) + \delta^-(x)$.

Для графа G додатні степені усіх вершин такі: $\delta^+(1) = 2$, $\delta^+(2) = 1$, $\delta^+(3) = 0$, $\delta^+(4) = 1$. Від’ємні степені усіх вершин графа G такі: $\delta^-(1) = 0$, $\delta^-(2) = 2$, $\delta^-(3) = 1$, $\delta^-(4) = 1$. Степені вершин графа G: $\delta(1) = \delta^+(1) + \delta^-(1) = 2 + 0 = 2$, $\delta(2) = \delta^+(2) + \delta^-(2) = 1 + 2 = 3$,

$\delta(3) = \delta^+(3) + \delta^-(3) = 0 + 1 = 1$, $\delta(4) = \delta^+(4) + \delta^-(4) = 1 + 1 = 2$.

Завдання 3. Побудувати матриці суміжності та інциденцій для неорієнтованого графа G_1 й орієнтованого графа G_2 (рис. 3.10 а) та б) відповідно).



а) G_1 б) G_2

Рисунок 3.10 – Графи G_1 і G_2

Розв'язок. Будуємо матрицю суміжності C_1 графа G_1, рядки й стовпці якої позначаємо вершинами графа (табл. 3.1).

Таблиця 3.1 – Матриця суміжності C_1 неорієнтованого графа G_1

	1	2	3	4	5	6

1	0	1	0	0	0	1
2	1	0	1	0	1	1
3	0	1	0	0	1	0
4	0	0	0	0	0	1
5	0	1	1	0	0	0
6	1	1	0	1	0	0

Для неорієнтованого графа G_1 матриця C_1 симетрична. Елемент c_{ij} матриці суміжності C_1 дорівнює 1, якщо вершини i й j суміжні, і 0 у противному випадку. Тому що граф G_1 простий (не має петель і кратних ребер), на головній діагоналі розташовані 0, а всі елементи матриці мають значення 0 або 1. Сума чисел у рядку (і у стовпці) дорівнює степені вершини.

Матриця інциденцій B_1 будується таким чином: рядки її відповідають вершинам, стовпці – ребрам графа G_1 (табл. 3.2). Елемент b_{ij} дорівнює 1, якщо вершина інцидентна ребру, і 0 – у противному випадку.

Таблиця 3.2 – Матриця інциденцій B_1 неорієнтованого графа G_1

	a	b	c	d	e	f	g
1	1	0	0	0	0	0	1
2	1	1	0	1	1	0	0
3	0	1	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0
5	0	0	1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	1	1	1

У кожному стовпці повинні перебувати тільки 2 одиниці. Сума чисел у рядку дорівнює степені вершини.

Будуємо матрицю суміжності C_2 графа G_2 , рядки й стовпці якої позначаємо вершинами графа (табл. 3.3).

Таблиця 3.3 – Матриця суміжності C_2 орієнтованого графа G_2

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	1

3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1
5	0	1	1	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0

Для орієнтованого графа G_2 матриця C_2 несиметрична. Елемент c_{ij} матриці суміжності C_2 дорівнює 1, якщо з вершини i у вершину j веде дуга, і 0 у противному випадку. Тому що граф G_2 простий (не має петель і кратних ребер), на головній діагоналі розташовані 0, а всі елементи матриці мають значення 0 або 1. Сума чисел у рядку дорівнює напівстепені виходу вершини, а у стовпці – напівстепені заходу вершини.

Матриця інциденцій B_2 будується таким чином: рядки її відповідають вершинам, стовпці – ребрам графа G_2 (табл. 3.4). Елемент b_{ij} дорівнює 1, якщо вершина є початком дуги, (-1) – якщо вершина – кінець дуги, і 0 – якщо вершини й дуга не інцидентні.

Сума чисел у стовпці дорівнює нулю.

Таблиця 3.4 – Матриця інциденцій B_2 орієнтованого графа G_2

	a	b	c	d	e	f	g
1	1	0	0	0	0	0	-1
2	-1	1	0	-1	1	0	0
3	0	-1	-1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0
5	0	0	1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	-1	-1	1

Завдання 4. Використовуючи матрицю суміжності (табл. 3.5), побудувати діаграму графа G і визначити, чи є він орієнтованим або неорієнтованим.

Таблиця 3.5 – Матриця суміжності графа G

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0	1
3	0	0	0	1	0	0
4	1	0	0	0	1	1

5	0	1	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0

Розв'язок. Матриця суміжності несиметрична, тому граф орієнтований. Кількість вершин – 6. Будуємо граф: з вершини 1 ведуть дуги у вершини 2 і 3; з вершини 2 – у вершини 3 і 6; з вершини 3 – у вершину 4; з вершини 4 – у вершини 1, 5 і 6; з вершини 5 – у вершину 2; з вершини 6 – у вершину 1.

Перевірити правильність побудови можна, порахувавши напівстепені виходу (сума цифр у рядку) і напівстепені заходу (сума цифр у стовпці) для кожної вершини. Граф, що відповідає матриці суміжності (табл. 3.5), зображений на рис. 3.11.

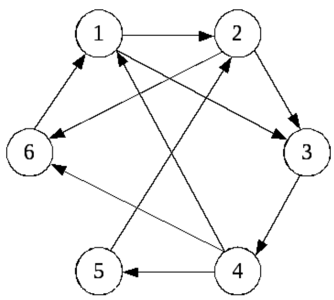


Рисунок 3.11 – Граф G

Завдання 5. Використовуючи матрицю інциденцій (табл. 3.6), побудувати діаграму графа G і визначити, чи є він орієнтованим або неорієнтованим.

Таблиця 3.6 – Матриця інциденцій графа G

	a	b	c	d	e	f	g
1	1	0	0	0	1	0	0
2	0	1	0	1	0	0	0
3	0	0	1	0	0	1	0
4	1	1	0	0	0	1	0
5	0	0	0	1	0	0	1
6	0	0	1	0	1	0	1

Розв'язок. У матриці G немає значень (-1), тому можна зробити висновок про те, що граф неорієнтований. Кількість вершин дорівнює 6, кількість ребер – 7. Будуємо порожній граф на шести вершинах і з'єднуємо їх ребрами: ребро a з'єднує вершини 1 і 4, ребро b – вершини 2 і 4, і т.д. Граф, що відповідає матриці інциденцій (табл. 3.6), зображений на рис. 3.12.

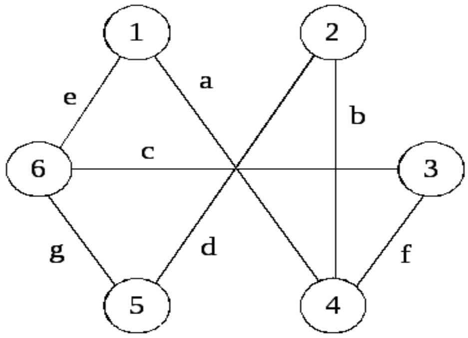


Рисунок 3.12 – Граф G

Завдання 6. Довести ізоморфізм графів $G_1(X_1, Y_1)$ і $G_2(X_2, Y_2)$, де

$X_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $X_2 = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $Y_1 = \{(1,2), (1,3), (1,6), (1,7), (2,3),$

$(2,4), (2,7), (3,4), (3,5), (4,5), (4,6), (5,6), (5,7), (6,7)\}$, $Y_2 = \{(a,e), (a,b), (a,c),$

$(a,g), (b,c), (b,d), (b,g), (c,d), (c,f), (d,e), (d,f), (e,f), (e,g), (f,g)\}$.

Розв'язок. Нумеруємо вершини графа $G_1(X_1, Y_1)$ довільно. Після цього нумеруємо вершини графа $G_2(X_2, Y_2)$, домагаючись того, щоб вершини з номерами i та j у ньому були суміжні тоді й тільки тоді, коли суміжні вершини з такими ж самими номерами в графа $G_1(X_1, Y_1)$.

Завдання 7. Для графів G_1 і G_2, які представлено на рис. 3.13, виконати операції об'єднання, перетину й композиції $G_1(G_2)$ і $G_2(G_1)$.

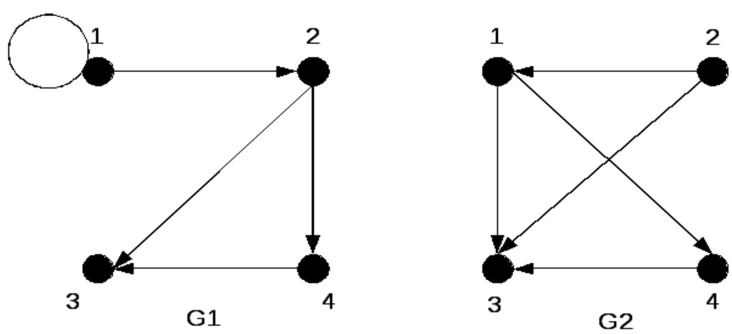
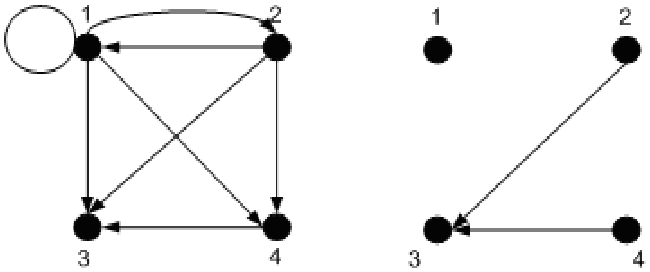


Рисунок 3.13 – Графи G_1 і G_2

Розв'язок. У графі $G_1 \cup G_2$ присутні всі вершини й всі дуги графів G_1 і G_2. Так само, як в об'єднанні множин, елементи, що повторюються, використовуємо один раз. У графі

$G_1 \cap G_2$ присутні ті вершини й ті дуги графів G_1 і G_2, які є й у графі G_1, й у графі G_2. На рис. 3.14 а) зображені результати об'єднання, на рис. 3.14 б) – перетину графів G_1 і G_2.



а) $G_1 \cup G_2$ б) $G_1 \cap G_2$

Рисунок 3.14 – Об'єднання й перетин графів G_1 і G_2

Матриця суміжності результуючого графа $G_1 \cup G_2$ утвориться поелементним логічним додаванням матриць суміжності графів G_1 і G_2.

Матриця суміжності результуючого графа $G_1 \cap G_2$ утвориться поелементним логічним множенням матриць суміжності графів G_1 і G_2.

Композиція графів $G_1(G_2)$ будується таким чином: виписуються всі дуги (x_i, x_j) графа G_1 й відповідні їм дуги (x_j, x_k) графа G_2, у результуючий граф включаються дуги (x_i, x_k), крім повторюваних (у цьому випадку, дуга (1,3)) (рис. 3.15).

G_1	G_2	$G_1(G_2)$
(1,1)	(1,3)	(1,3)
(1,1)	(1,4)	(1,4)
(1,2)	(2,1)	(1,1)
	(2,3)	(1,3)
(2,3)	–	
(2,4)	(4,3)	(2,3)
(4,3)	–	

Рисунок 3.15 – Композиція графів $G_1(G_2)$

Граф $G_1(G_2)$ зображений на рис. 3.16. Матриця суміжності графа $G_1(G_2)$ будується множенням матриці суміжності графа G_1 на матрицю суміжності графа G_2.

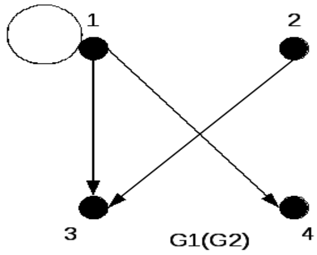


Рисунок 3.16 – Граф $G_1(G_2)$

Композиція графів $G_2(G_1)$ будується таким чином: виписуються всі дуги (x_i, x_j) графа G_2 й відповідні їм дуги (x_j, x_k) графа G_1, у результуючий граф включаються дуги (x_i, x_k) (рис. 3.17).

G_2	G_1	$G_2(G_1)$
(1,3)	–	
(1,4)	(4,3)	(1,3)
(2,1)	(1,1)	(2,1)
	(1,2)	(2,2)
(4,3)	–	

Рисунок 3.17 – Композиція графів $G_2(G_1)$

Результуючий граф $G_2(G_1)$ зображений на рис. 3.18.

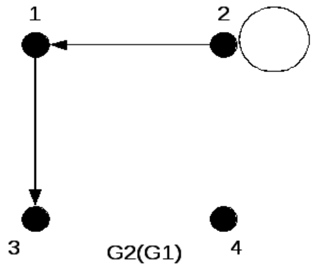


Рисунок 3.18 – Граф $G_2(G_1)$

Матриця суміжності графа $G_2(G_1)$ будується множенням матриці суміжності графа G_2 на матрицю суміжності графа G_1.

Операція композиції не є комутативною, графи $G_1(G_2)$ й $G_2(G_1)$ не ізоморфні.

Завдання 8. На рис. 3.19 наведені графи G_1 і G_2. Знайти $G_1 \cup G_2$ і $G_1 \times G_2$.

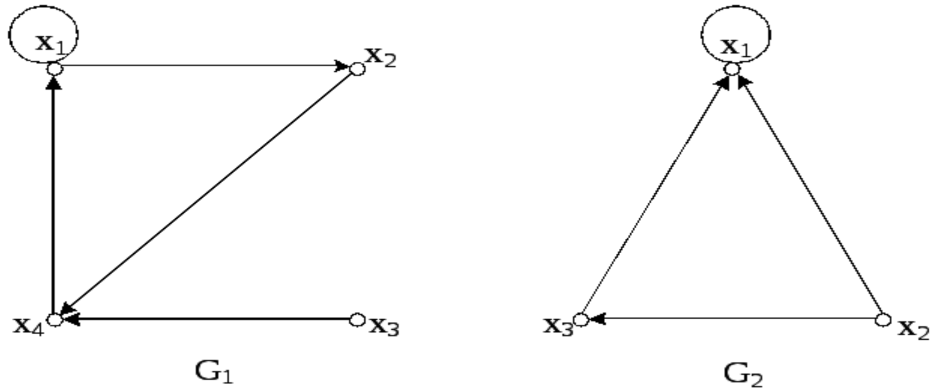


Рисунок 3.19 – Графи G_1 і G_2

Розв'язок. Об'єднанням графів G_1 і G_2 називається граф $G = (X_1 \cup X_2, Y_1 \cup Y_2)$. Тому множина вершин складається з чотирьох вершин. До множини дуг Y_1 додаємо дві дуги (x_2, x_1) и (x_2, x_3). Тоді граф G має вид, що надається на рис. 3.20 а).

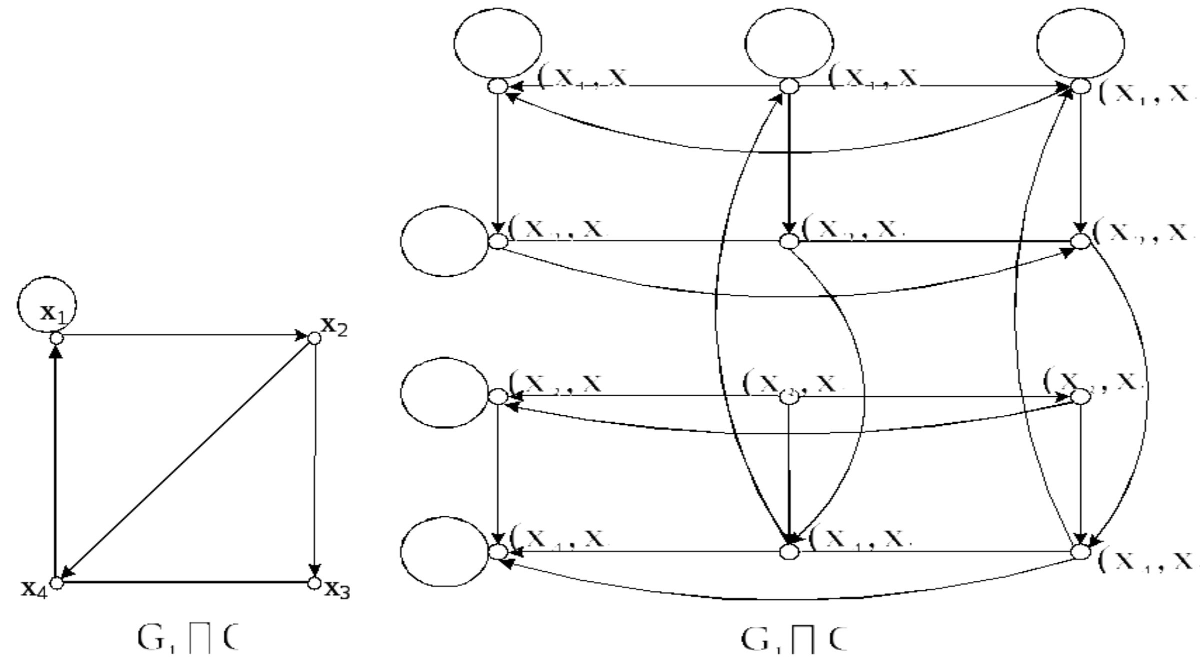
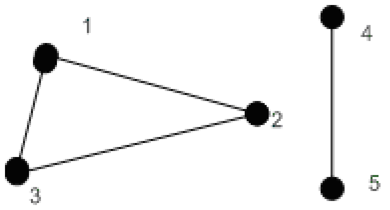


Рисунок 3.20 – Графи $G_1 \cup G_2$ і $G_1 \times G_2$

Множиною вершин графа $G_1 \times G_2$ буде декартів добуток множин $X_1 \times X_2$. Таким чином, усього вершин буде 12. Кількість ребер визначається за правилом $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in G^* = G_1 \times G_2$, якщо $x_1 = x_2$ і $(y_1, y_2) \in G_2$ або $y_1 = y_2$ і $(x_1, x_2) \in G_1$ (див. рис. 3.20 б)).

Завдання 9. Для графів G_1 і G_2, які представлені на рис. 3.21, виконати операцію диз'юнктивного об'єднання.



G_1 G_2

Рисунок 3.21 – Графи G_1 і G_2

Розв'язок. Об'єднання графів $G_1(X_1, Y_1)$ і $G_2(X_2, Y_2)$ називається диз’юнктивним, якщо $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Результат операції диз’юнктивного об'єднання графів G_1 і G_2 представлений на рис. 3.22.

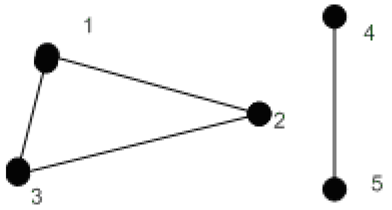
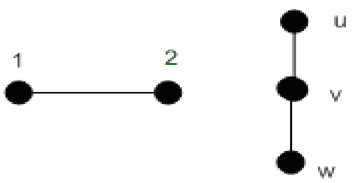


Рисунок 3.22 – Результат операції диз’юнктивного об'єднання графів G_1 і G_2

Завдання 10. Для графів G_1 і G_2, які представлено на рис. 3.23, виконати операцію з’єднання (сильного добутку).



G_1 G_2

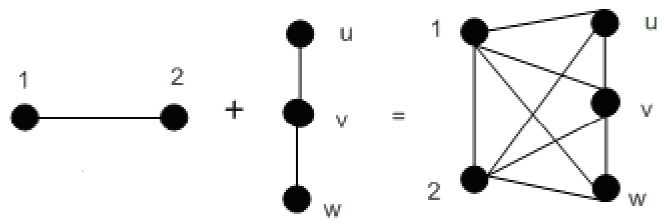
Рисунок 3.23 – Графи G_1 і G_2, для яких виконується операція з’єднання

Розв'язок. З’єднанням (сильним добутком) графів $G_1(X_1, Y_1)$ і $G_2(X_2, Y_2)$ (за умови $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$) називається такий граф $G(X, Y)$, що $X_1 \cup X_2 = X$, а

$$Y = (Y_1 \cup Y_2) \cup \{y = (x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1, \text{ і } x_2 \in X_2\}$$

.

Результат операції з'єднання графів G_1 і G_2 (позначається $G_1 + G_2$) представлений на рис. 3.24.



G_1 G_2 $G_1 + G_2$

Рисунок 3.24 – Результат операції з'єднання графів G_1 і G_2 ($G_1 + G_2$)

Завдання 1. Визначити, чи є для графа G, який представлений на рис. 4.1, відповідний маршрут ланцюгом, простим ланцюгом, циклом, простим циклом, якщо маршрут заданий як: 1) $x_1x_4x_2x_1$; 2) $x_1u_2x_4u_9x_5u_8x_4u_5x_2u_4x_1$; 3) $x_2x_4x_1x_5$; 4) $x_3u_3x_1u_2x_4u_2x_1$; 5) $x_4u_9x_5u_1x_1u_3x_3$.

Розв'язок. Відповідно до визначення ланцюга, простого ланцюг, циклу, простого циклу одержимо: 1) простий цикл (всі вершини й ребра різні); 2) цикл (всі ребра різні, а вершини ні); 3) простий ланцюг; 4) маршрут (є однакові ребра й вершини); 5) простий ланцюг.

Завдання 2. Визначити число компонент зв'язності в графі G, якщо граф задається таким чином (рис. 4.12)

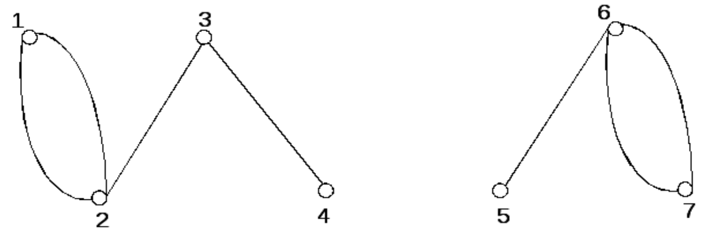


Рисунок 4.12 – Граф G, для якого визначається число компонент зв'язності

Розв'язок. Граф має дві компоненти зв'язності, в першу входять вершини $\{1, 2, 3, 4\}$, в другу– $\{5, 6, 7\}$.

Завдання 3. Розкласти орграф G, який представлений на рис. 4.13, на сильно зв'язані компоненти.

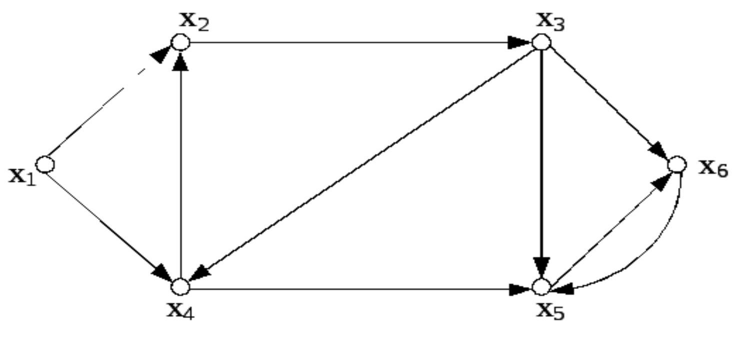


Рисунок 4.13

Розв'язок. Граф розкладається на три сильно зв'язані компоненти G_1, G_2, G_3 (рис. 4.14)

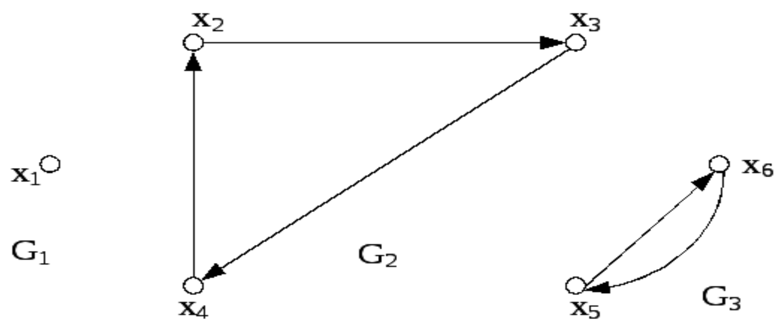


Рисунок 4.14

Завдання 4.

Знайти в графі G, який надається на рис. 4.15, всі точки зчленування і мости.

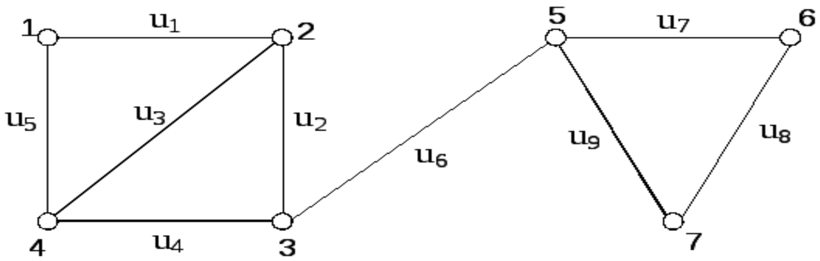


Рисунок 4.15

Розв'язок.

Послідовно розглянемо ребра графа, вилучаючи їх з графа. Тільки вилучення ребра u_6 приводить до збільшення числа компонент зв'язності, тому u_6 є мостом. Аналогічно розглядаємо вершини графа і находимо, що вершини 3 і 5 є точками зчленування, тому що вилучення їх з графа приводить до збільшення числа компонент зв'язності.

Завдання 5.

Знайти такі метричні характеристики графа G (рис. 4.16): ексцентриситети усіх вершин графа, діаметр графа, радіус графа, периферійні вершини графа, діаметральні ланцюги, центральні вершини графа, центр графа.

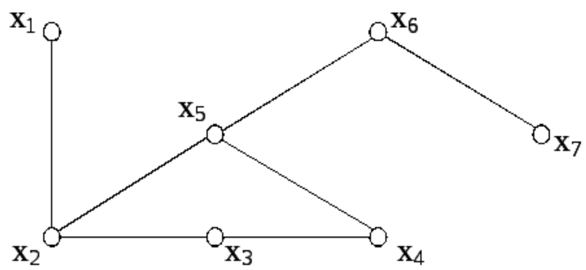


Рисунок 4.16

Розв’язок.

Ексцентриситетом $e(x_i)$ вершини x_i є відстань від x_i до найбільш віддаленої від неї вершини, тому $e(x_1)=e(x_2)=e(x_4)=e(x_6)=3$, $e(x_3)=e(x_7)=4$, $e(x_5)=2$. Максимальний з усіх ексцентриситетів є діаметром графа, тобто $d(G)=\max e(x_i)=4$. Найменший з ексцентриситетів є радіусом графа, тобто $r(G)=\min e(x_i)=2$. Вершина x_i є периферійною, якщо її ексцентриситет дорівнює діаметру графа, тобто $e(x_i)=d(G)$, тому периферійними вершинами графа G є вершини x_3 і x_7. Простий ланцюг, відстань між кінцями якої дорівнює $d(G)$, називається діаметральні ланцюги ом, тому діаметральними ланцюгами графа G є такі ланцюги: $x_3 - x_2 - x_5 - x_6 - x_7$ і $x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7$. Вершина x_i називається центральною вершиною графа, якщо на ній досягається мінімум ексцентриситетів, тобто $e(x_i)=r(G)$, тому центральною вершиною графа G є вершина x_5. Множина усіх центральних вершин графа є центром графа, тому центром графа G є $\{x_5\}$.

Завдання 6.

Визначити, чи є граф G, який зображений на рис. 4.17, ейлеревим.

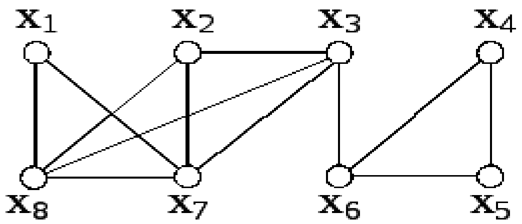


Рисунок 4.17

Розв’язок.

Використаємо теорему Ейлера: граф є ейлеревим (містить ейлерів цикл) тоді і тільки тоді, коли він зв’язний і степені всіх його вершин – парні.

Граф G є зв’язним. Степені його вершин такі: $\delta(x_1)=\delta(x_4)=\delta(x_5)=2$, $\delta(x_2)=\delta(x_6)=3$, $\delta(x_3)=\delta(x_7)=\delta(x_8)=4$. Граф не є ейлеревим, тому що не усі степені вершин є парними.

Завдання 7.

Чи має граф, який зображений на рис. 4.18 власний ейлерів шлях?

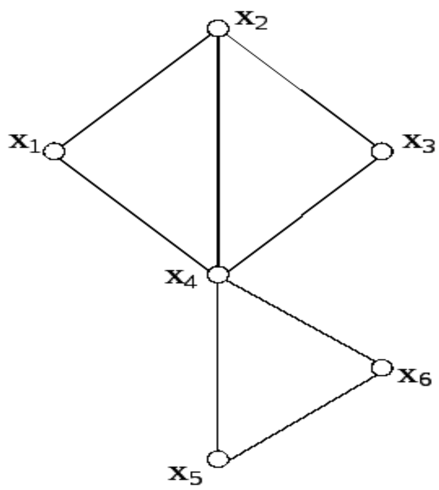


Рисунок 4.18

Розв'язок.

Використаємо наступну теорему: граф (мультограф або псевдограф) має власний ейлерів шлях тоді й тільки тоді, коли він зв'язний і рівно дві його вершини мають непарний степінь. Граф, зображений на рис. 4.18, зв'язний, має власний ейлерів шлях, тому що рівно дві його вершини (x_2 і x_4) мають непарну степінь, тобто $\delta(x_2) = \delta(x_4) = 3$.

Завдання 8.

Чи має орієнтований граф, який зображений на рис. 4.19, ейлерів цикл?

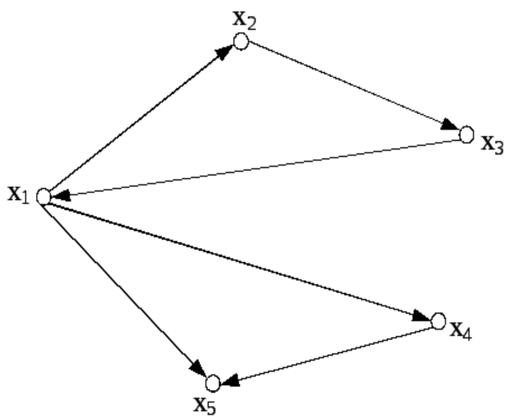


Рисунок 4.19

Розв'язок.

Використаємо наступну теорему: орієнтований граф має ейлерів цикл тоді й тільки тоді, коли він зв'язний, і півстепені виходу та заходу у вершині x_i рівні. Орієнтований граф, який зображений на рис. 4.19, не містить ейлерів цикл, тому що півстепені виходу та заходу у вершинах x_1 і x_5 не дорівнюють відповідно один одному.

Завдання 9.

Найдіть гамільтонів цикл, якщо він існує, у графі G, який зображений на рис. 4.20.

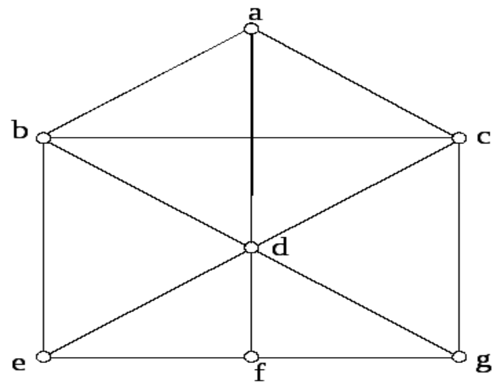


Рисунок 4.20

Розв'язок.

Гамільтонів цикл для графа G буде таким $acgfedba$.

Завдання 1. Чому дорівнює кількість позначених неорієнтованих простих графів з $n=3$ вершинами і $m=2$ ребрами? Нарисувати усі ці графи.

Розв'язок. Кількість $G_{n;\,m}=G_{3;\,2}$ позначених неорієнтованих простих графів з $n=3$ вершинами і $m=2$ ребрами дорівнює числу сполучень з множини різних неорієнтованих пар вершин $\{\overline{(x_i, x_j)}\}$ за числом ребер $m=2$. Оскільки число вказаних пар вершин дорівнює числу сполучень C_n^2, то $G_{n;\,m}=C_{C_n^2}^m=C_{C_3^2}^2$, де

$$C_n^2=C_3^2=\frac{n!}{(n-2)!\,2!}=\frac{n(n-1)}{2}=\frac{3(3-1)}{2}=\frac{3\cdot 2}{2}=3.$$

Тому $G_{n;\,m}=G_{3;\,2}=C_{C_n^2}^m=C_{C_3^2}^2=C_3^2=3$. Ці три графа представлено на рис. 5.5.

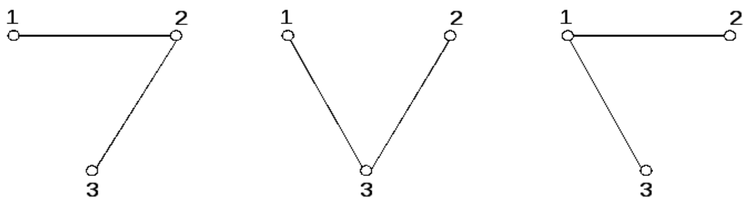


Рисунок 5.5 – Позначені неорієнтовані прості графи з $n=3$ вершинами і $m=2$ ребрами

Завдання 8. Побудувати остовне дерево у графі G, який зображено на рис. 5.12, використовуючи алгоритм пошуку в глибину.

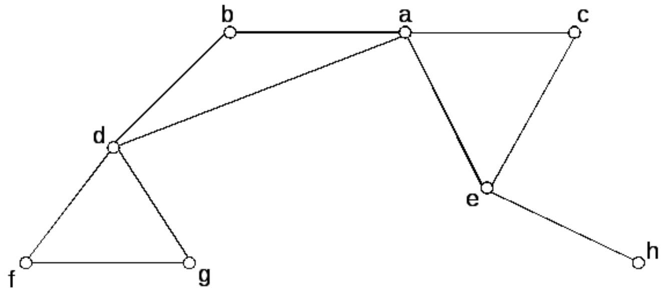


Рисунок 5.12 – Граф G

Розв'язок. Для розв'язання завдання використаємо такий алгоритм пошуку остовного дерева в глибину.

Крок 1. Позначити кожну вершину графа G символом n.

Крок 2. вибрати довільний елемент v_0 графа G та назвати його коренем дерева.

Крок 3. Замінити позначку вершини v_0 з «нов» на «вик» і назначити $v = v_0$.

Крок 4. Поки є вершини, які ще не вибрані, суміжні з v, виконати такі дії:

а) вибрати вершину w, суміжну з v;

б) якщо w має позначку «нов», додати (v, w) в множину R_G (множину ребер остовного дерева, яке будується), замінити позначку w на «вик», назначити $w = v$ і повторити шаг 4;

в) якщо w має позначку «вик» і не є «батьком» v, додати (v, w) в множину Z_G (множину зворотних ребер) і повторити шаг 4.

Крок 5. Якщо $v \neq a$, назначити $v = (v)$ і повторити шаг 4. поки для вершини v є суміжна невикористована вершина w, продовжується шлях від v до w. Тільки в тому випадку, коли рухатися далі не можна, переходимо до шагу 5, повертаємось до «батька» вершини v.

Використаємо цей алгоритм для пошуку остовного дерева графа G, що надається на рис. 5.12.

Як корінь довільним способом виберемо вершину a. Змінюємо позначку a з «нов» на «вик». Оскільки вершина b суміжна з a і має позначку «нов», додаємо ребро $\{a, b\}$ в множину R_G і замінюємо позначку вершини b на «вик», як наведено на рис. 5.13 а).

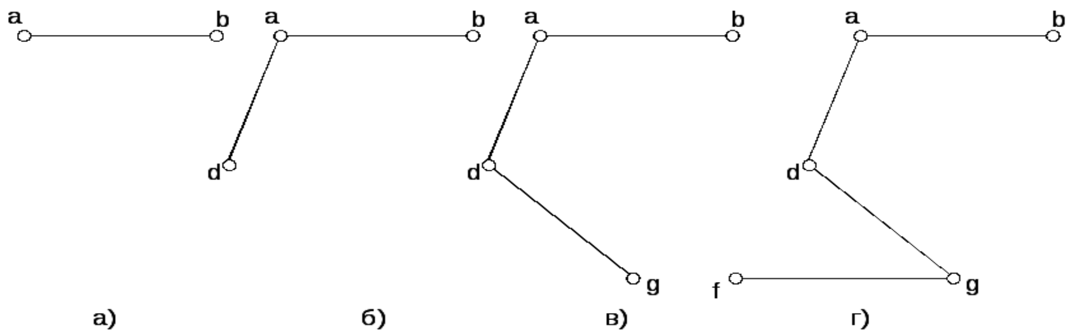


Рисунок 5.13

Від вершини b переходимо до вершини d , оскільки вона є суміжною з b . Вершина d має позначку «нов», тому додаємо ребро $\{b,\ d\}$ в множину R_G і заміняємо позначку вершини d на «вик», як наведено на рис. 5.13 б).

Тепер вибираємо вершину, яка суміжна з вершиною d . Можна вибрати $a,\ f$ або g . Вибір визначає форму дерева, тому пошук в глибину не продукує дерево єдиним способом. Припустимо, що наступною вершиною буде вершина g . Вершина g має позначку «нов», тому додаємо ребро $\{d,\ g\}$ в множину R_G і замінюємо позначку вершини g на «вик», як наведено на рис. 5.13 в). З вершини g вибираємо вершину f , тому що вона є суміжною з g . Вершина f має позначку «нов», тому додаємо ребро $\{g,\ f\}$ в множину R_G і заміняємо позначку вершини f на «вик», як наведено на рис. 5.13 г). З вершини f вибираємо вершину d , тому що вона є суміжною з вершиною f . Однак вершина d вже має позначку «вик», тому додаємо ребро $\{d,\ f\}$ в множину Z_G , як наведено на рис. 5.14 а).

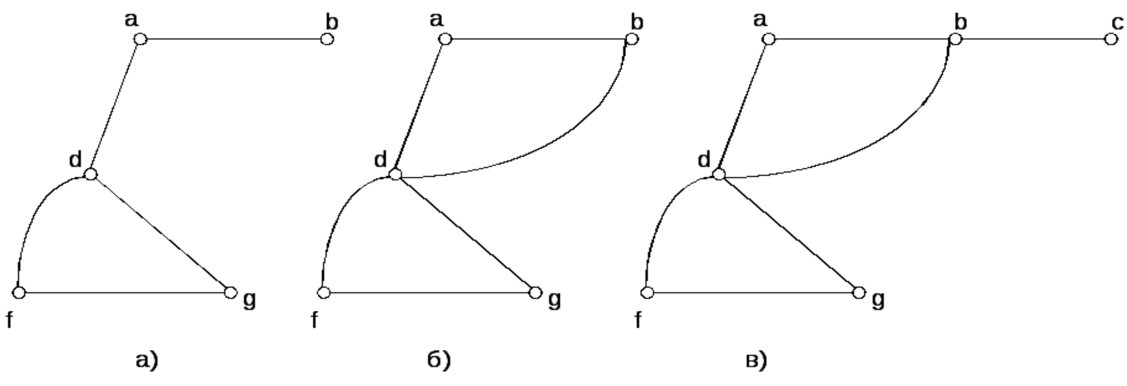


Рисунок 5.14

Оскільки більше немає ребер для перевірки на суміжність з вершиною f , окрім «батька», вертаємось до вершини g (далі не будемо згадувати «батька» як можливу суміжну вершину). Інших ребер для перевірки на суміжність з вершиною g теж немає, тому вертаємось до d . Тут є єдиною вершиною для перевірки є вершина a , але вершина a вже має позначку «вик», тому ребро $\{d,\ f\}$ додаємо в Z_G і вертаємось в вершину b , як наведено на рис. 5.14 б).

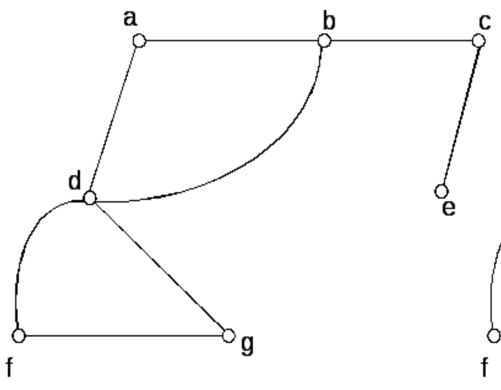
Ребер для перевірки на суміжність з вершиною b більш немає, тому повертаємось до вершини a . Помітимо, що якби була можливість досягти кожну вершину, побудувавши шлях з b , то поки дерево не побудовано повністю, не треба було б повертатися у вершину a . Повернувшись у вершину a , можна вибрати c або e . Припустимо, що вибрали вершину c . Так як вершина c має позначку «нов», тому додаємо ребро $\{a, c\}$ в множину R_G і заміняємо позначку вершини c на «вик», як наведено на рис. 5.14 в).

Вершина e суміжна з вершиною c і має позначку «нов». Додаємо ребро $\{c, e\}$ в множину R_G і замінюємо позначку вершини e на «вик», як наведено на рис. 5.15 а).

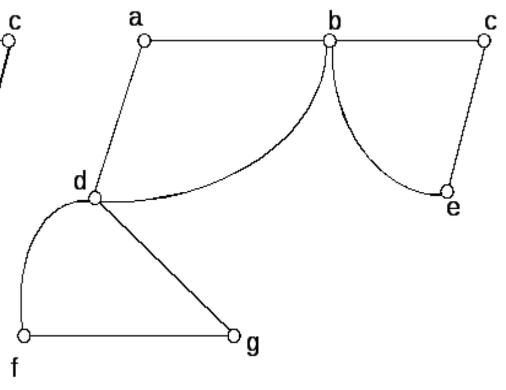
Припустимо тепер, що вибрана вершина a , тому що вона є суміжною з вершиною e . Але вершина a вже має позначку «вик», тому ребро $\{e, a\}$ додаємо в Z_G і вертаємось в вершину e , як наведено на рис. 5.15 б).

Оскільки вершина h суміжна з e , додаємо ребро $\{e, h\}$ в множину R_G і замінюємо позначку вершини h на «вик», як наведено на рис. 5.15 в).

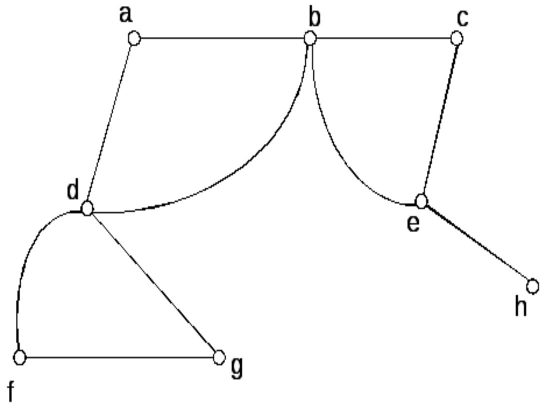
Більш немає вершин для перевірки з вершини h , тому повертаємось у вершину e . Але більш немає вершин для перевірки з вершини e , тому повертаємось у вершину c . Оскільки немає більш вершин для перевірки з вершини c , повертаємось у вершину a . Інших вершин для перевірки з вершини a теж немає, тому процес завершується.



а)



б)



в)

Рисунок 5.15

Остовним деревом графа G є дерево, яке наведено на рис. 5.16.

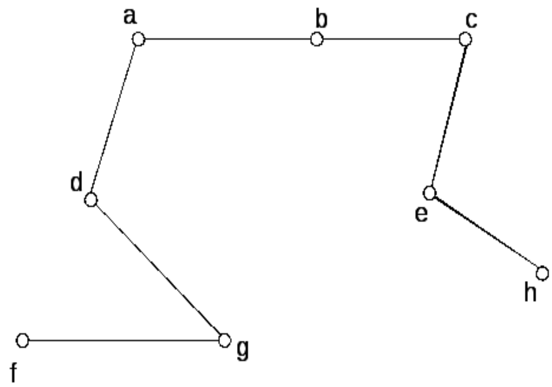


Рисунок 5.16

Завдання 9. Нехай існує орієнтоване упорядковане дерево D (рис. 5.17). Для цього дерева визначити: висоту дерева; глибину, висоту, рівень вершини 8; листя, їх рівні, глибину, висоту.

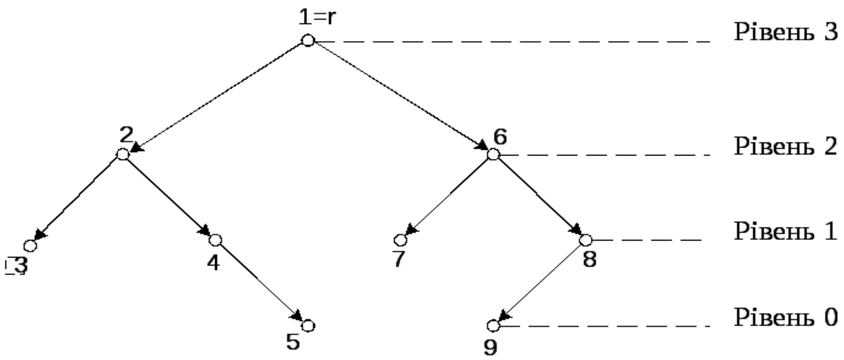


Рисунок 5.17 – Кореневе дерево, упорядковане за рівнями

Розв'язок. Дерево D упорядковане, множина синів кожної вершини упорядкована зліва направо: $2 \prec 6, \quad 3 \prec 4, \quad 7 \prec 8$. Висота дерева, яке зображене на рис. 5.17, тобто число дуг найдовшого шляху (висота кореня) дорівнює 3. Вершина 8 має глибину 2, тобто довжина шляху з кореневої вершини $1 = r$ у вершину 8 дорівнює 2. Вершина 8 має висоту 1, тобто довжина найдовшого шляху з вершини 8 до будь-якого листа (до листа 9) дорівнює 1. Рівень вершини 8, тобто різниця між висотою всього дерева і глибиною цієї вершини, дорівнює 1.

Листям дерева є вершини 3, 5, 7, 9. Їх рівні та глибина такі: листя 3,7 мають рівень 1, глибину 2; листя 5, 9 мають рівень 0, глибину 3. Висота будь-якого листа дорівнює 0.