



***Лекція 7.
Графи.***

§1 Способи представлення графів

- **Графічне задання** – відображення графа за допомогою точок і ліній;
- **Матриця суміжності** - ефективна для насичених графів;
- **Матриця інцидентності** – ефективний для розріджених графів;
- **Список суміжних вершин** – ефективний для розріджених графів;
- **Список ребер** – ефективний для розріджених графів.

1.1 Матриця суміжності

Матрицею суміжності графа G , яка відповідає заданій нумерації вершин, називають булеву квадратну матрицю A з елементами a_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) де

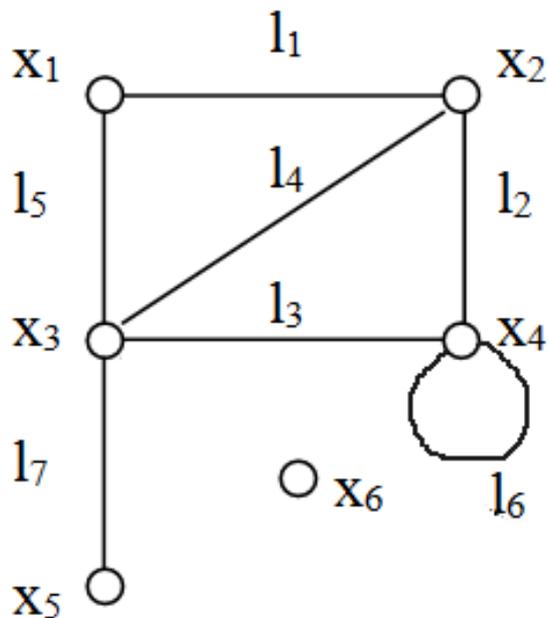
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \{v_i, v_j\} \in E, \\ 0, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Для неорієнтованого графа матриця суміжності симетрична відносно головної діагоналі.

Властивості:

- Об'єм необхідної пам'яті $O(|V|^2)$.
- Швидке визначення присутності ребра (i, j) в графі.
- За час $O(1)$ отримуємо доступ до елементу a_{ij} матриці.

Для заданого графу побудувати матрицю суміжності.

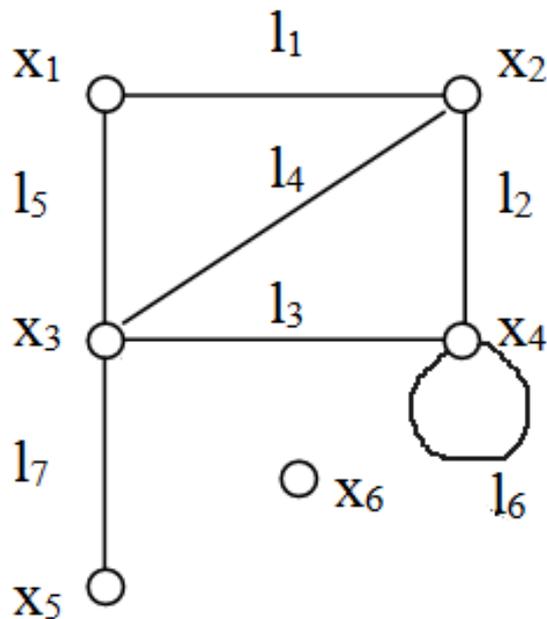


$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2 Матриця інцидентності

Матрицею інцидентності (або матрицею інциденцій) неорієнтованого графу G називається матриця $m \times n$ $V = (b_{ij})$, у якої

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершина } x_i \text{ є інцидентна до ребра } u_j; \\ 0, & \text{якщо вершина } x_i \text{ не є інцидентна до ребра } u_j. \end{cases}$$

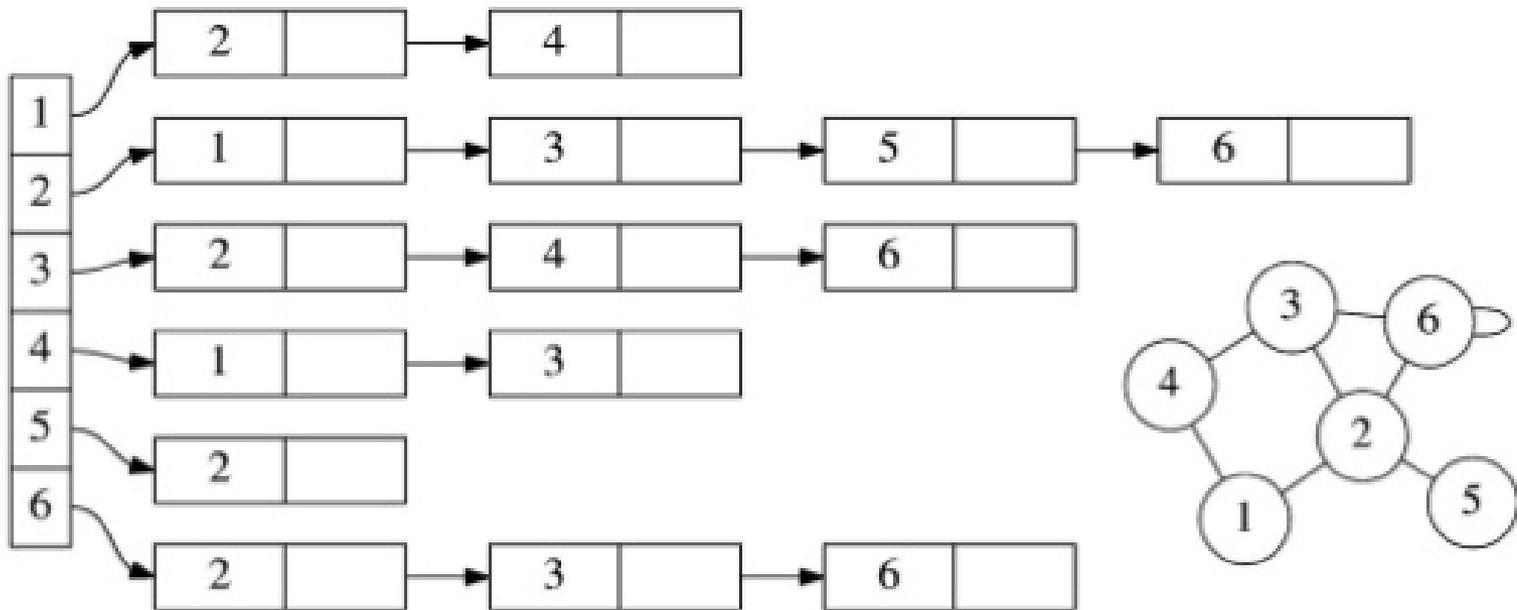


$$V = \begin{pmatrix} & l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & l_6 & l_7 \\ x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

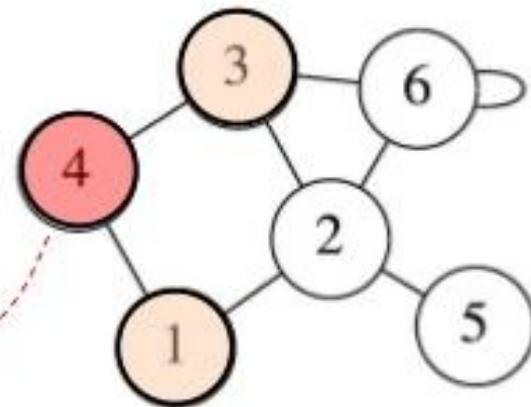
1.3 Список суміжних вершин

Список суміжних вершин – це масив $A[n]$, кожен елемент $A[i]$ якого містить список вузлів суміжних з вершиною i .

$A = \{(1,2), (1,4), (2,1), (2,3), (2,5), (2,6), (3,2), (3,4), (3,6), (4,1), (4,3), (5,2), (6,2), (6,3), (6,6)\}$



Реалізація списку суміжних вершин на основі масивів $A[n+1]$ та $L[2m]$.



A:

1	2	3	4	5	6	7
1	3	7	10	12	13	15

– индексы начала и конца списка смежных вершин в массиве L

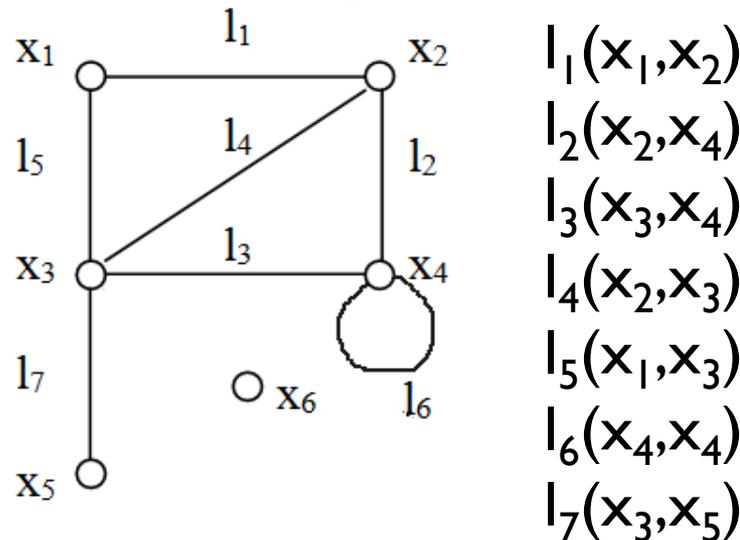
L:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4	1	3	5	6	2	4	6	1	3	2	2	3	6

1.4 Список ребер

Пара $[u, v]$ відповідає ребру $\{u, v\}$, якщо граф неорієнтований, і дузі (u, v) , якщо граф орієнтований.

Об'єм пам'яті у випадку представлення графа списком ребер дорівнює $2m$ (m - кількість ребер або дуг) - це найекономніший щодо пам'яті спосіб. Недолік - велика (порядку m) кількість кроків для знаходження множини вершин, до яких ідуть ребра або дуги із заданої вершин.



§2 Маршрути, ланцюги та цикли

Нехай $G = (X, U)$ – скінченний неорієнтований граф.

Скінчена послідовність вершин та ребер графа $x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{k-1} u_k x_k$, в якій кожне ребро u_k є ребро, яке з'єднує вершини x_{k-1} та x_k , називається *маршрутом* на графі G .

Маршрут з'єднує вершини x_0 та x_k .

Число k називають *довжиною маршруту*, тобто це кількість ребер, які входять до маршруту.

Маршрут називають *замкненим*, якщо $x_0 = x_k$.

Маршрут, в якому всі ребра є різні, називають *ланцюгом*.

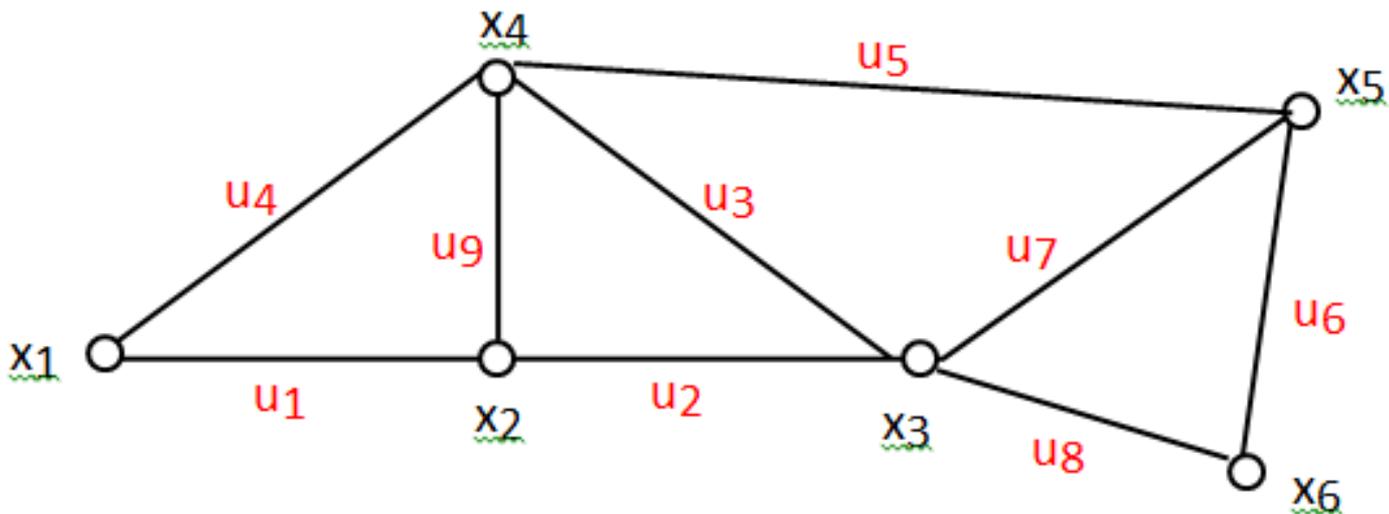
Замкнений ланцюг називають *циклом*.

Ланцюг називають *простим*, якщо всі його вершини є різні.

Простий цикл – це цикл, у якому всі вершини, окрім першої та останньої, є різні.

Граф без циклів називається *ациклічним*, в іншому разі граф називається *циклічним*.

Кожна вершина з'єднується сама з собою маршрутом довжини 0 і цей маршрут є простим циклом. Такий цикл називають *нульовим* (якщо сказано просто цикл, то мається на увазі, що він *не є нульовий*).



Маршрут – $x_1 u_1 x_2 u_1 x_1 u_4 x_4 u_3 x_3 u_3 x_4 u_5 x_5$

Ланцюг (всі ребра різні) – $x_1 u_4 x_4 u_9 x_2 u_2 x_3 u_3 x_4 u_5 x_5$

Простий ланцюг (всі ребра і вершини різні) –
 $x_1 u_4 x_4 u_9 x_2 u_2 x_3 u_7 x_5$

Цикл – $x_1 u_1 x_2 u_9 x_4 u_3 x_3 u_7 x_5 u_5 x_4 u_4 x_1$

Простий цикл – $x_1 u_4 x_4 u_9 x_2 u_1 x_1$

§3 Орієнтовані графи

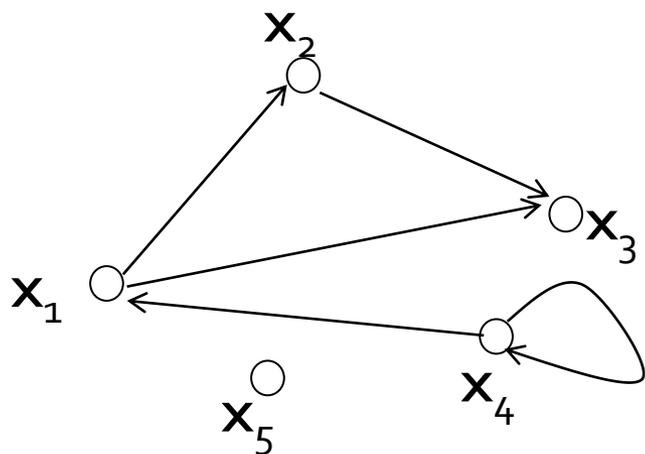
Поняття *орієнтованого* графа (*орграфа*) виникає, якщо ребрам графа надати напрямок (тобто орієнтацію) в такий спосіб, що один з кінців ребра буде початком, а інший – кінцем.

Стверджуватимемо, що задано орієнтований граф, якщо зазначено два об'єкти:

- 1) не порожня скінчена множина X – вершини графа;
- 2) множина U , утворена з *упорядкованих* пар вершин.

Елементи множини U називають *дугами*. Дуга орієнтованого графа зображується відрізком із зазначенням напрямку (стрілкою)





Орієнтований граф $G = (X, U)$,
де

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\};$$

$$U = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_4, x_1), (x_4, x_4)\}.$$

Якщо $u_1 = (x_1, x_2)$ – дуга орграфа, то стверджують, що дуга u_1 виходить з вершини x_1 і закінчується у вершині x_2 .

Для орієнтованих графів замість степеня вершини x вводять поняття **півстепенів**: додатні $d_+(x)$ й від'ємні $d_-(x)$ півстепені вершини x :

$d_+(x)$ – число дуг, які входять до вершини x ;

$d_-(x)$ – число дуг, які виходять з вершини x .

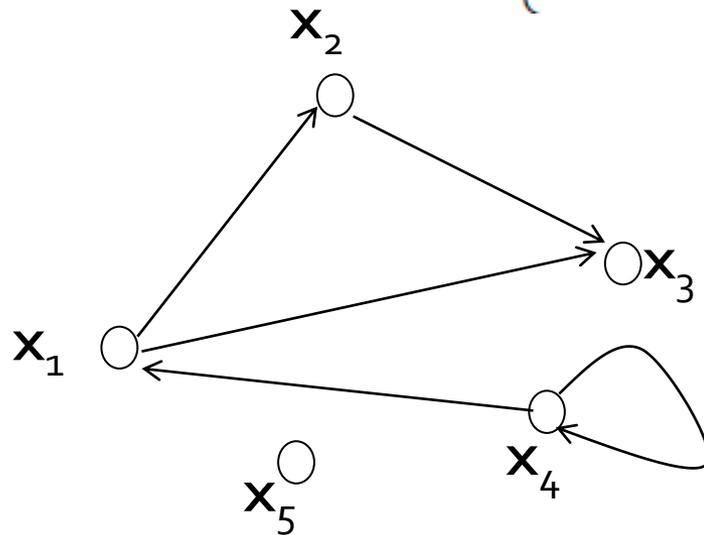
$$d_+(x_1) = 1 \quad d_-(x_1) = 2$$

§4 Способи задання орієнтованих графів

4.1 Матриця суміжності

Матрицею *суміжності* орграфу G називається квадратна матриця $A(G) = [a_{ij}]$ порядку n , в якій:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (x_i, x_j) \in U; \\ 0, & \text{якщо } (x_i, x_j) \notin U. \end{cases}$$

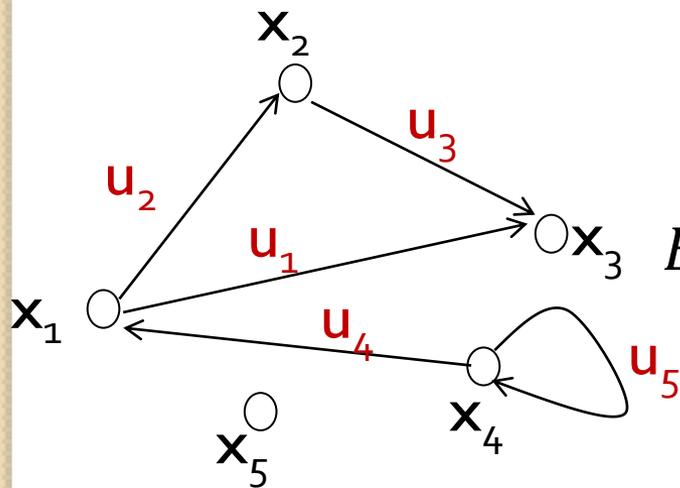


$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{В} \\ \text{З} \end{matrix} & \begin{matrix} x1 & x2 & x3 & x4 & x5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \end{matrix} & & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

4.2 Матриця інцидентності

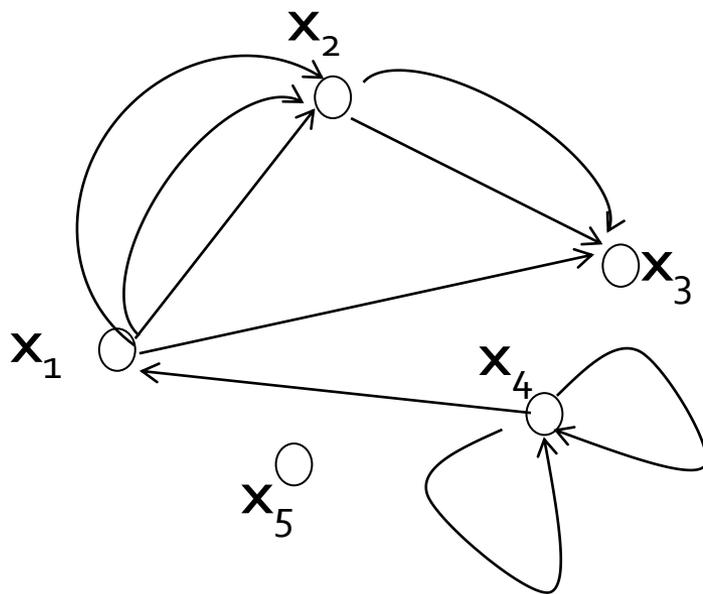
Матрицею *інцидентності* (або матрицею *інциденцій*) орграфа G називається матриця $B(G) = [b_{ij}]$ порядку $n \times m$, в якій елементи:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершина } x_i \text{ є кінцем дуги } u_j; \\ -1, & \text{якщо вершина } x_i \text{ є початком дуги } u_j; \\ 0, & \text{якщо вершина } x_i \text{ не є інцидентна до дуги } u_j. \end{cases}$$



$$B = \begin{matrix} & u1 & u2 & u3 & u4 & u5 \\ \begin{matrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Матрицю суміжності можна визначити і для псевдографів. Тоді в разі орієнтованого (неорієнтованого) псевдографа $a_{ij}=k$, де k – кратність дуги (x_i, x_j) (ребра $\{x_i, x_j\}$) у цьому псевдографі.



$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} x1 & x2 & x3 & x4 & x5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

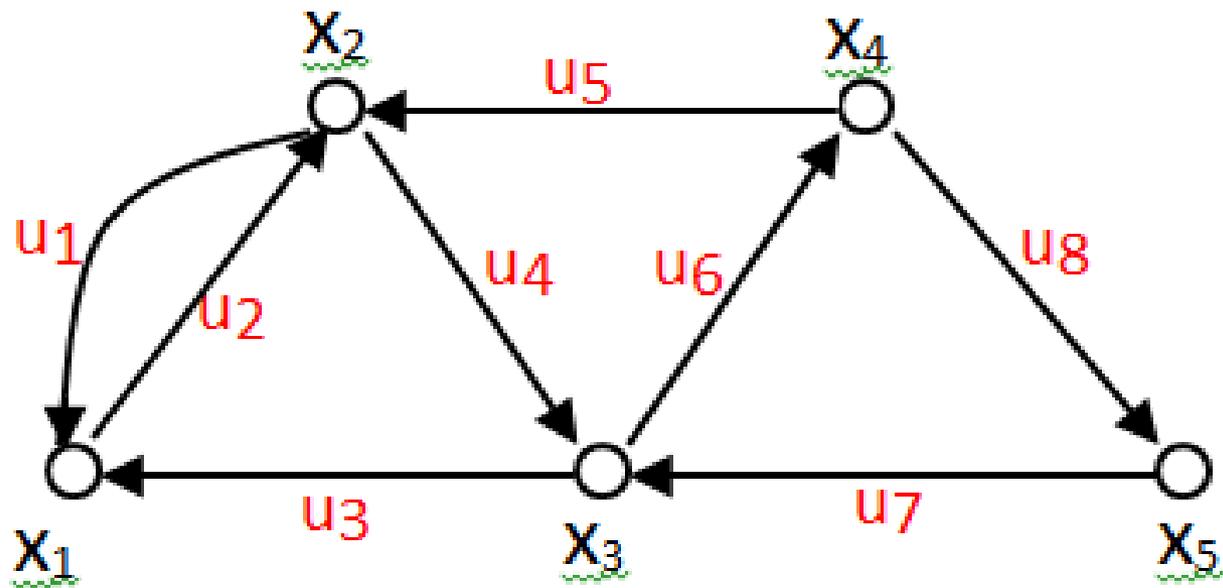
§5 Маршрути, шляхи та контури орієнтованого графа

Орієнтовані маршрути: в орграфі рух за маршрутом допускається лише в напрямках, зазначених стрілками.

Маршрут, який не містить повторних дуг, називається *шляхом*, а той, що не містить повторних вершин, – *простим шляхом*.

Замкнений шлях називається *контуром*, а простий замкнений шлях – *простим контуром*.

Граф без циклів називається *безконтурним*, в іншому разі орграф називається *контурним*.



Маршрут – $x_1 u_2 x_2 u_4 x_3 u_6 x_4 u_5 x_2 u_4 x_3$

Шлях (всі ребра різні) – $x_3 u_6 x_4 u_8 x_5 u_7 x_3 u_3 x_1$

Простий шлях (всі ребра і вершини різні) –

$x_5 u_7 x_3 u_6 x_4 u_5 x_2 u_1 x_1$

Контур – $x_1 u_2 x_2 u_4 x_3 u_6 x_4 u_5 x_2 u_1 x_1$

Простий контур – $x_1 u_2 x_2 u_4 x_3 u_3 x_1$