ТЕМА 4.
Функціональні відношення

§1 Основні визначення

Відношення R ($R \subset A \times B$) називають **функціональним**, якщо для кожного $x \in A$ переріз R по x містить не більше одного елемента $y \in B$ (або один або жодного!).

У цьому випадку говорять, що відношення R діє з множини A у множину B і часто використовують позначення $R: A \to B$.

Також використовується позначення функціональної залежності малими латинським буквами $f: A \to B$ або $y=f(x)$, а відношення f називають **функцією**.

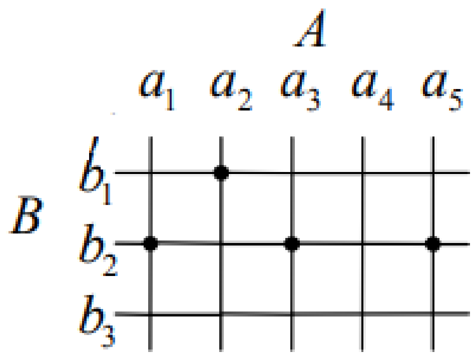
Функція f може бути задана не на всій множені A, а тільки на деякій її частині $D \subset A$. В цьому випадку множину $D(f)$ називають **областю визначення функції** f або *dom f* (*domain* — «область»): $\operatorname{Dom} f = \{a \in A \mid \exists b \in B, b = f(a)\}$.

Підмножину $Im \subset B$ називають **областю значень функції** f (Image – «зображення чи образ»:

$$\operatorname{Im} f = \{b \in B \mid \exists a \in A, b = f(a)\}.$$

Елемент $b=f(a)$, де $a \in D$, називають **образом** елемента a, а сам елемент a − **прообразом** елемента b. Якщо $D=A$, то функція f називається **всюди визначеною** на A. У цьому разі $Dom\ f = A$.

П р и к л а д. Відношення f_1, яке задано таблицею



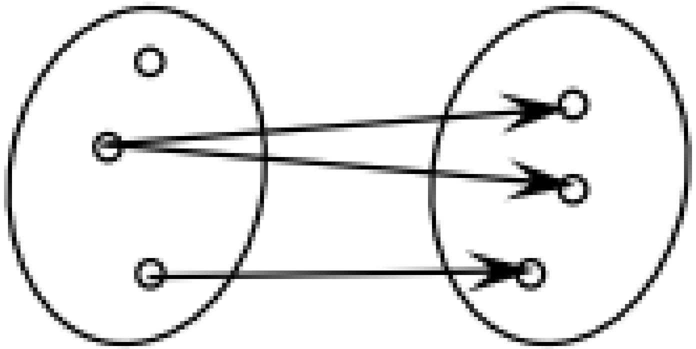
,

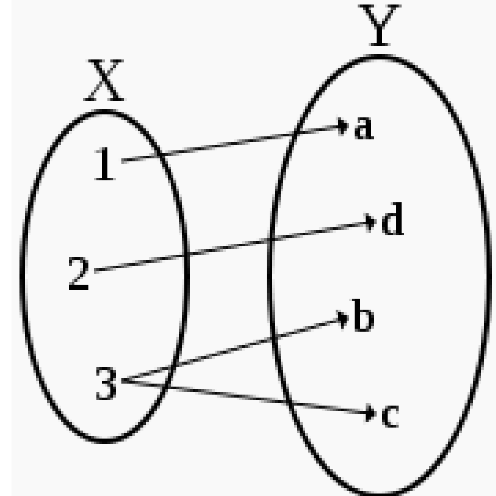
є функціональним, але не всюди визначеним. Образом елемента a_3 є елемент b_2, а прообразами елемента b_2 є елементи a_3 a_1 a_5.

Приклади.

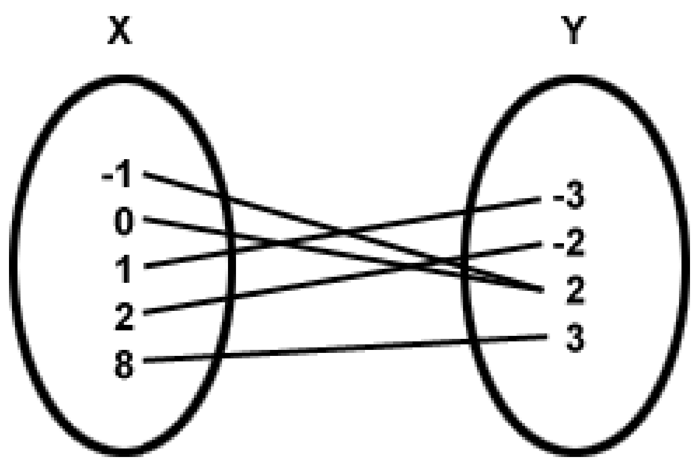
а) Нехай $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,4,9,16,25\}$, тоді $R_1 = \{(1,1),(2,4),(3,4),(4,16)\}$ – функціональне, але відношення $R_2 = \{(1,1),(1,4),(3,9)\}$ не є функціональним за означенням.

б) Англо-український словник встановлює відповідність між множинами англійських і українських слів. Це відношення не є функціональним, оскільки одному англійському слову зазвичай ставиться у відповідність кілька українських слів. Більше того, воно не є всюди визначеним, оскільки завжди можна знайти англійське слово, яке не міститься в цьому словнику.





Відношення,
але не функція

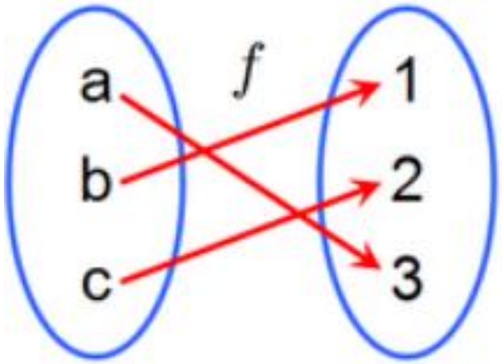


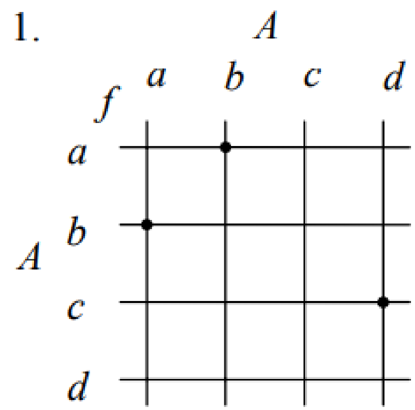
Відношення і
функція

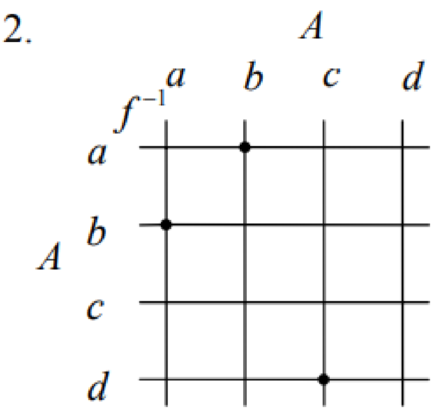
§2 Обернене функціональне відношення

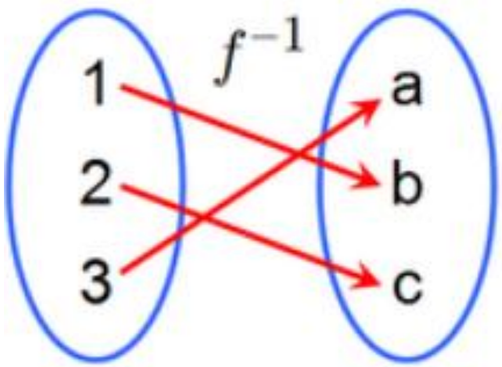
Якщо обернене відношення $R^{-1} \subset B \times A$ також є функціональним відношенням, то це відношення визначає деяку функцію, яку будемо називати оберненою до f функцією і позначати

$f^{-1}: B \to A$ або $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$.









$$f = \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & a & c \end{bmatrix}, \qquad f^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a & d \end{bmatrix}.$$

Function $f(x)$	Inverse $f^{-1}(y)$	Notes
$x + a$	$y - a$	
$a - x$	$a - y$	
mx	y / m	$m \neq 0$
$1 / x$	$1 / y$	$x, y \neq 0$
x^2	$\sqrt{y}$	$x, y \geq 0$ only
x^3	$\sqrt[3]{y}$	no restriction on x and y
x^p	$y^{1/p}$ (i.e. $\sqrt[p]{y}$)	$x, y \geq 0$ in general, $p \neq 0$
e^x	$\ln y$	$y > 0$
a^x	$\log_a y$	$y > 0$ and $a > 0$

Якщо функція задана формулою

y=f(x),

то для знаходження оберненої функції потрібно розв’язати рівняння *f(x)=y* відносно *x*, а потім поміняти місцями *x* і *y*.

$$f(x) = (2x+8)^3$$

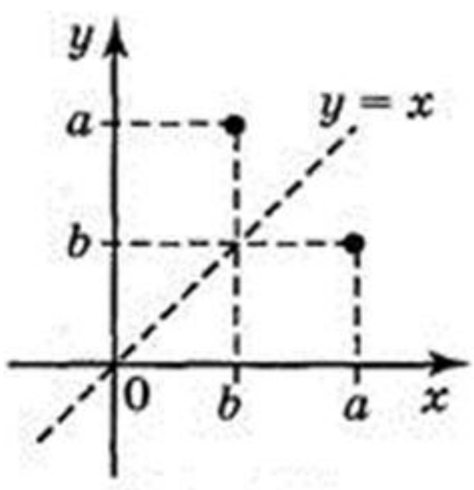
$$y = (2x+8)^3$$
$$\sqrt[3]{y} = 2x+8$$
$$\sqrt[3]{y} - 8 = 2x$$
$$\frac{\sqrt[3]{y} - 8}{2} = x.$$

$$f^{-1}(y) = \frac{\sqrt[3]{y} - 8}{2}.$$

Графіки даної функції і оберненої до даної симетричні відносно прямої $y = x$.

Якщо точка *(a; b)* належить графіку даної функції, то точка *(b; a)* належить графіку оберненої функції, а ці дві точки симетричні відносно прямої $y = x$.

Якщо функція $y=f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то вона оборотна. Обернена функція до даної, визначена області значень функції $y=f(x)$, і також є зростаючою (спадною).

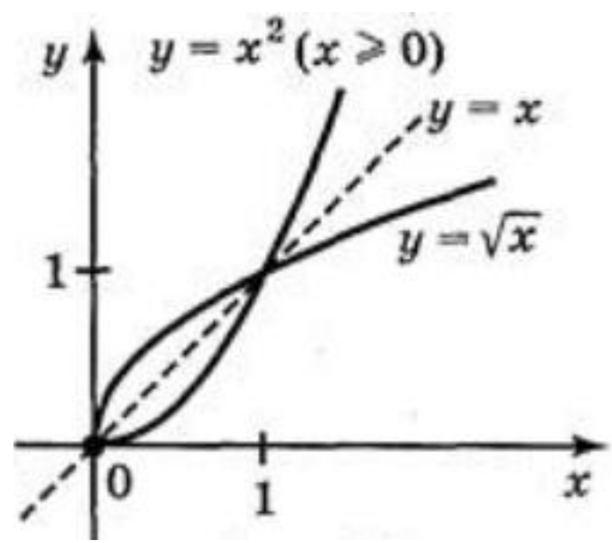


Функція, яка набуває кожного свого значення в єдиній точці області визначення, називається **оборотною,** наприклад функція $y = 2x+1$ — оборотна, а функція $y = x^2$ (визначена на всій числовій осі) не є оборотною.

Якщо рівняння *f(x)=y* відносно *x* має більше ніж один корінь, то функція *y=f(x)* не має оберненої функції.

Тригонометричні функції *y=cos x*, *y=sin x*, не є монотонними у всій області їх визначення. Тому для утворення обернених функцій виділяють інтервали монотонності.

Функція $y = x^2$ не є оборотною в області визначення.
Проте функція $y = x^2$, де $x \in [0; +\infty)$ зростає на цьому проміжку, тому має обернену.
Обернененою функцією є функція $y=\sqrt{x}$.

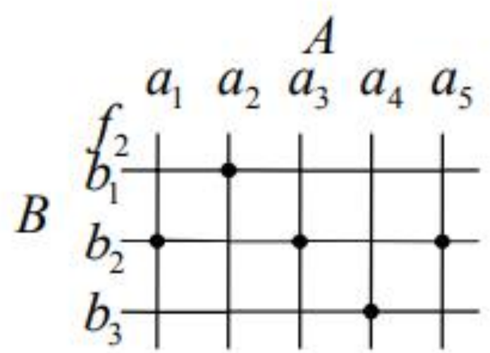


§3 Відображення

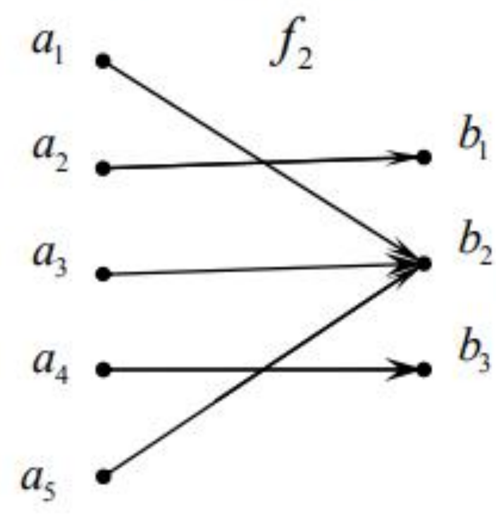
Якщо відношення водночас є функціональним та всюди визначеним на множені *A*, то воно називається **відображенням** множини *A* у множину *B*: $f{:}A\to B$.

При стрілочному зображенні відображення *f* з кожної точки повинна виходити лише одна стрілка.

П р и к л а д. Довизначемо відношення f_1 поклавши $a_4\, f_1\, b_3$, тоді здобудемо функціональне відношення f_2:



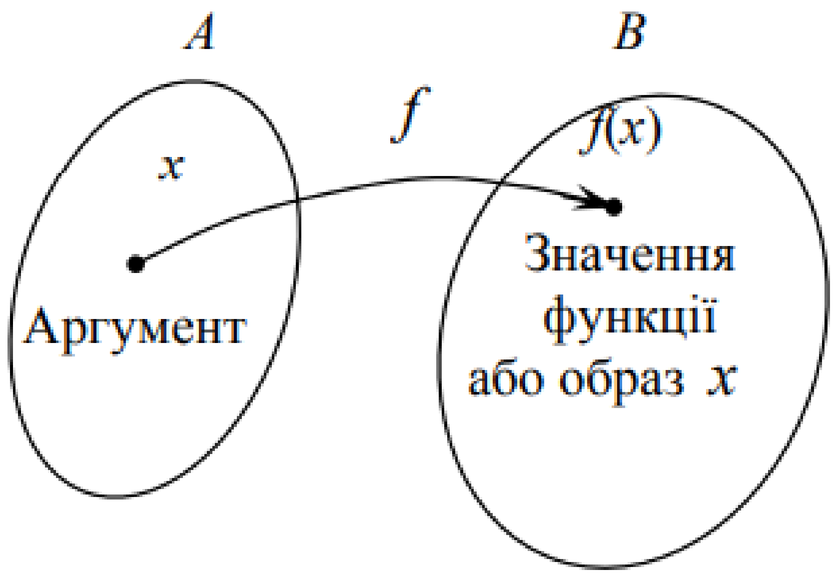
; або



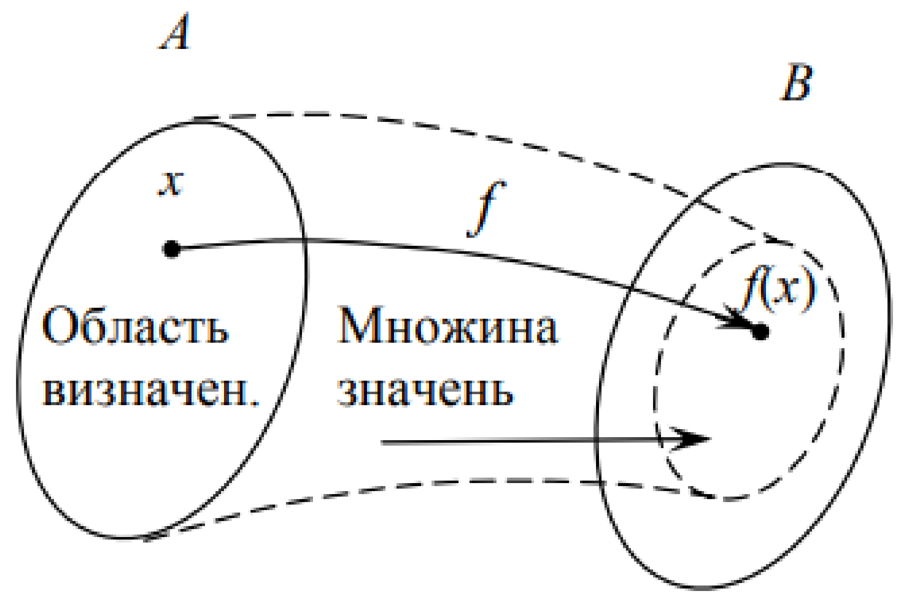
,

яке вже є відображенням.

Нехай f є відображенням множини A на множину B. Переріз $f(x)$ множини f по $x \in A$ є образом елемента x для функції f і позначається як $y = f(x)$. Елемент x називають **аргументом**, $f(x)$ – **значенням функції**. Переріз $f^{-1}(y)$ – множини B по $y \in B$ є прообразом елемента y для функції f.



Значення або образ функції f

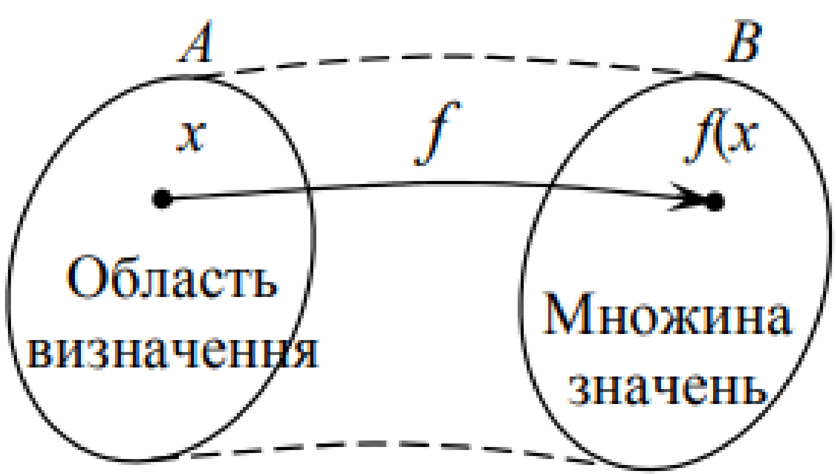


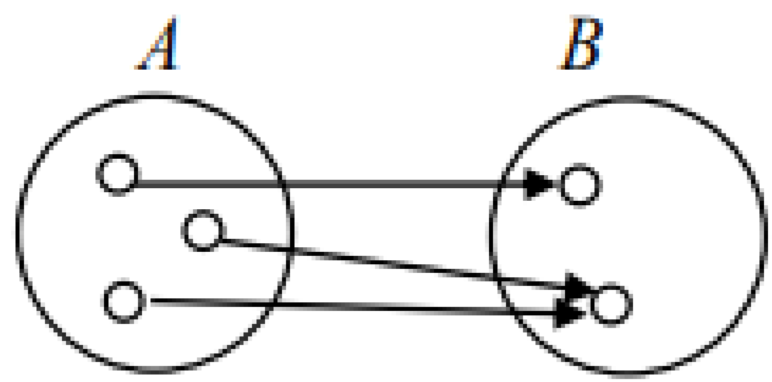
Відображення f множини A у множину B

§4 Типи відображень

Відображення *f* називається сюр'єктивним, або просто **сюр'єкцією**, якщо область значень *f* збігається з усією множиною *B* або *f(A)=B*, тобто якщо кожний елемент з множини *B* є образом хоча б одного елемента з множини *A*.

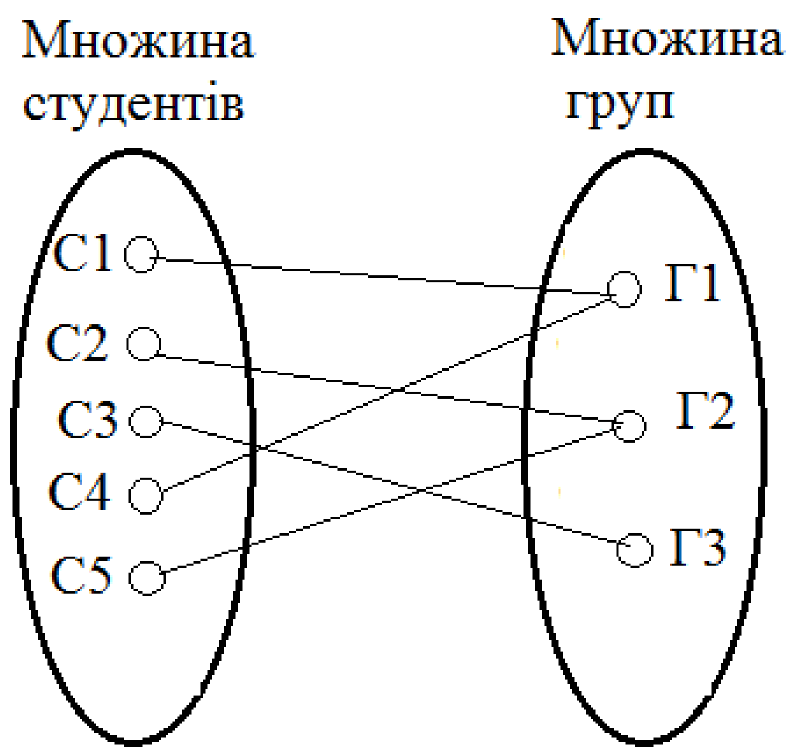
Тобто, $f : A \to B,\ \forall b \in B\ \ \exists a \in A : b = f(a)$.



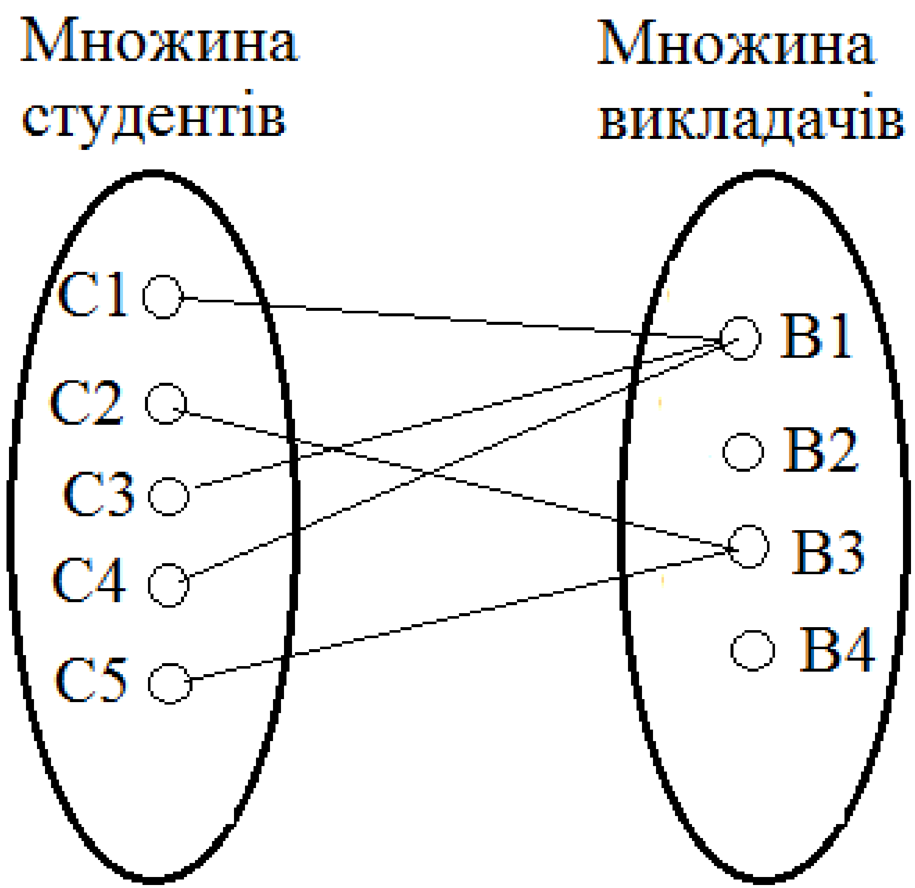


Приклади:

1. Відповідність між множиною всіх студентів університету і множиною груп. Це відношення сюр’єктивне, оскільки кожній групі відповідає хоча б один студент.

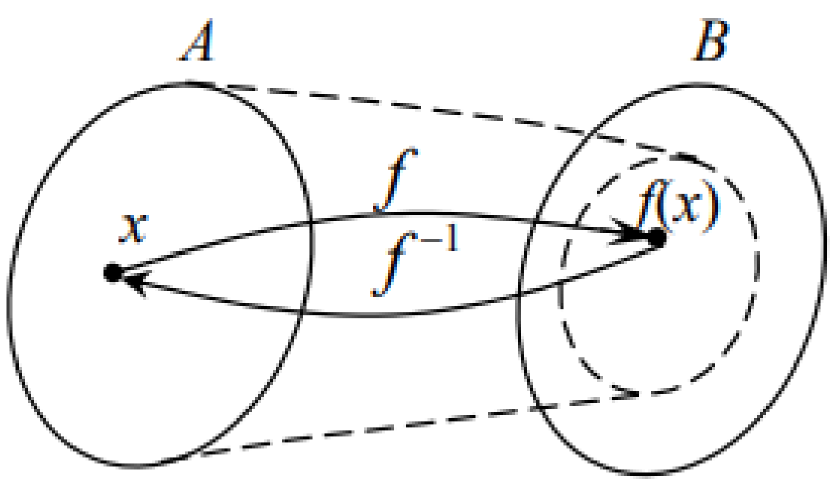


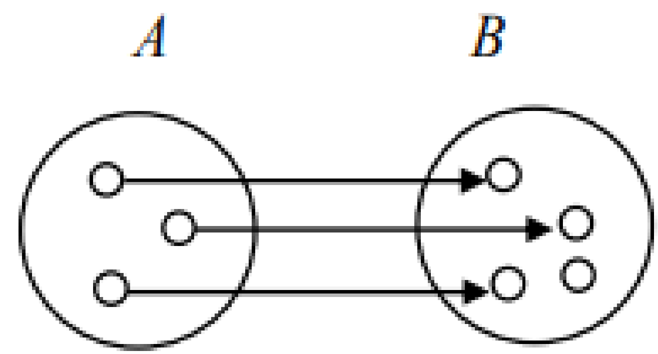
2. Відповідність між множиною студентів 2 курсу університету і множиною викладачів. Це відношення не сюр'єктивне, оскільки на другому курсі викладають не всі викладачі.



Відображення fназивається ін'єктивним, або просто **ін'єкцією**, якщо відношення f^{-1} є функціональне, тобто різні елементи множини A переводяться в різні елементи множини B. У цьому разі кожний елемент з області значень fмає єдиний прообраз, тобто

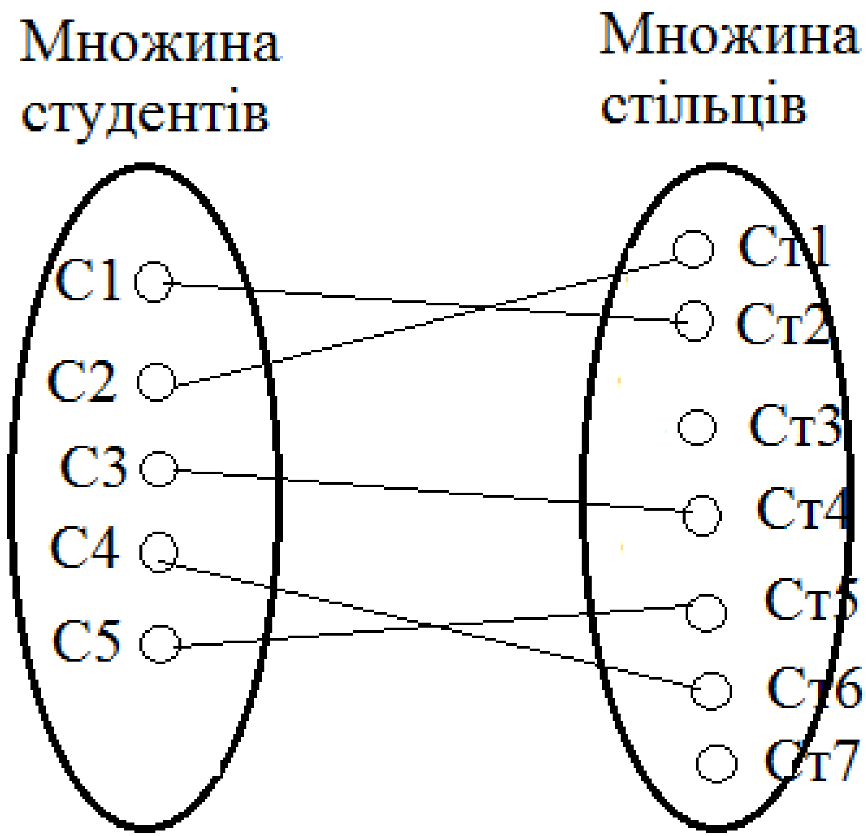
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$



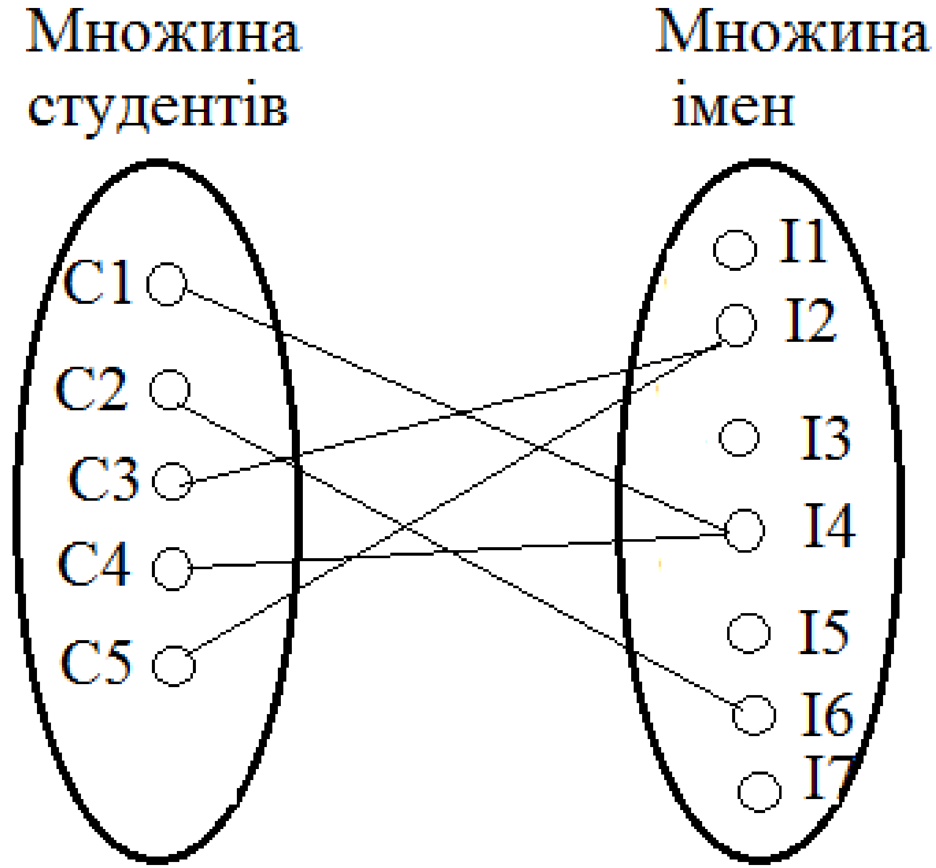


Приклади:

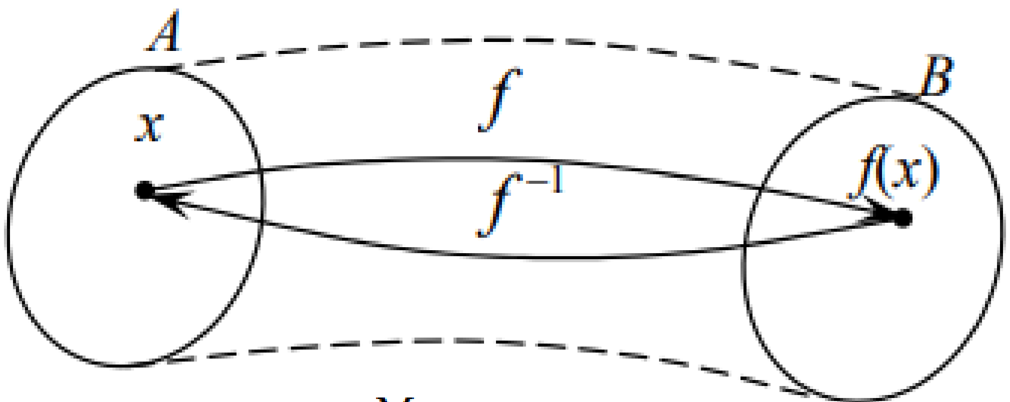
1. Відповідність між множиною студентів і стільців в аудиторії. Це відношення ін’єктивне, оскільки різні студенти сидять на різних стільцях.

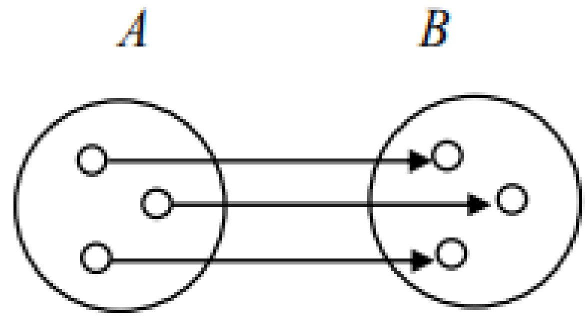


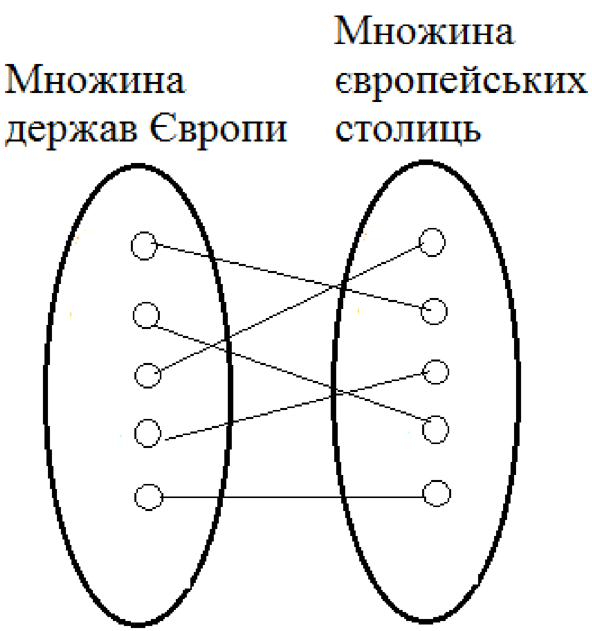
2. Відображення множини студентів університету на множину імен. Це відношення не ін’єктивне, оскільки є студенти з однаковими іменами.



Відображення називається взаємнооднозначним, або бієктивним, або просто **бієкцією**, якщо воно є сюр'єктивне й ін'єктивне, інакше кажучи, якщо обернене відношення є відображенням.

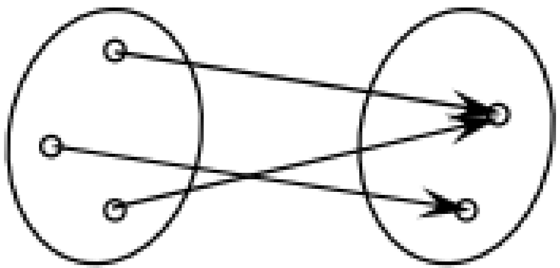




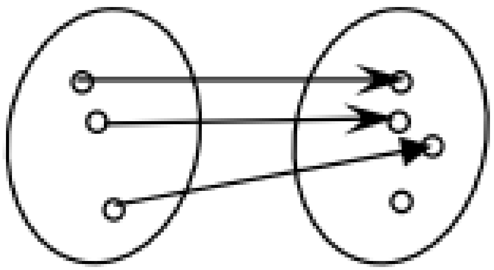


- Список студентів в журналі (номер→прізвище)
- Нумерація сторінок в книзі (сторінка →номер)

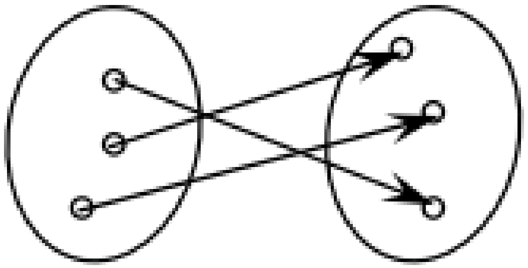
Приклади відношень



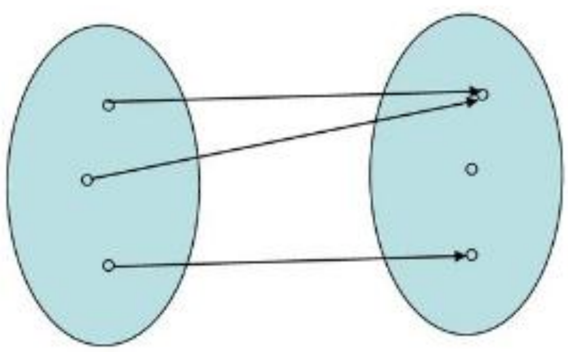
Сюр'єкція,
не ін'єкція



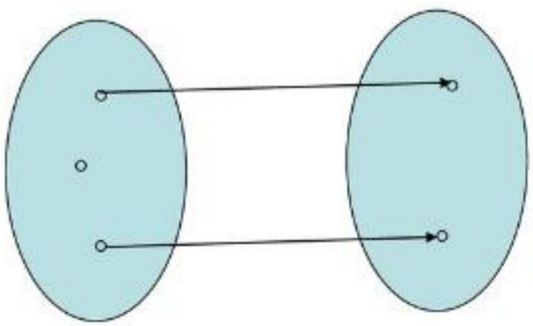
Ін'єкція,
не сюр'єкція



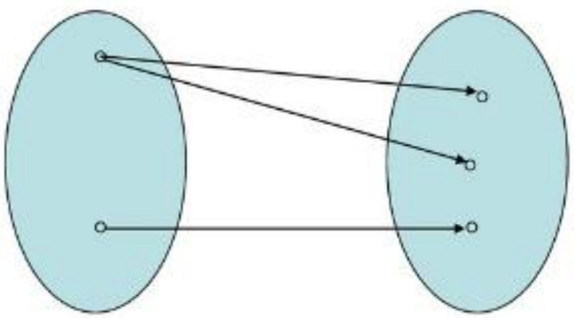
Бієкція



Не ін'єкція,
не сюр'єкція



Не відображення

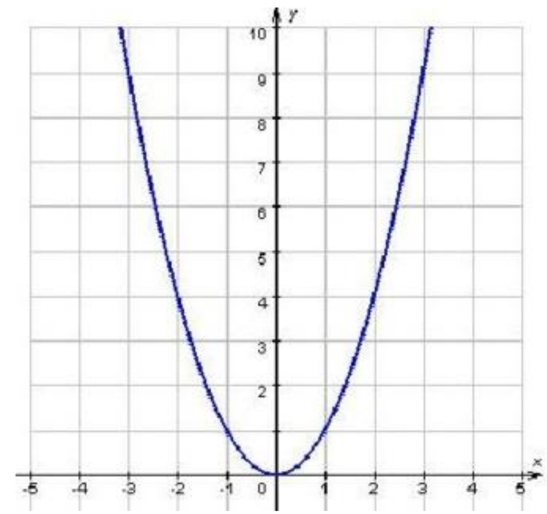


Не відображення

Визначити множини на яких відображення є бієкцією.

$$f(x) = x^2$$

а) R→R Не ін'єкція, не сюр'єкція (не використовуються від'ємні значення y, і для двох різних x одне значення y);



б) R→[0;+∞) Не ін'єкція, сюр'єкція (використовуються всі значення x та y, і для двох різних x одне значення y);

в) [0;+∞) → [0;+∞) Ін'єкція, сюр'єкція – бієкція (для кожного x одне значення y)