Модуль 2. Математична логіка

Тема 1.

Математична логіка

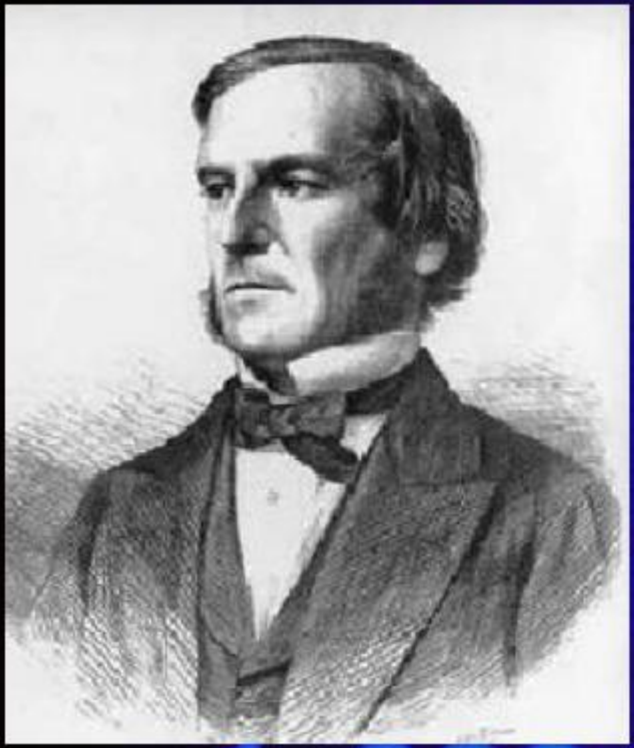
У найрізноманітніших галузях людської діяльності досить часто виникають об’єкти, явища, процеси чи ситуації, які характеризуються двома якісно різними станами або значеннями. Приклади таких альтернативних станів в техніці: «замкнено – розімкнено», «заряджено – незаряджено», «збуджено – спокійно», «працює – не працює», « є сигнал – немає сигналу» тощо. Аналогічні пари в логіці: «істинно – хибно», «так – ні», в алгебрі: «еквівалентно – нееквівалентно», «рівносильно – нерівносильно», тощо. При моделюванні таких об’єктів в математиці один з альтернативних станів (значень) позначають 1, а другий – 0. Зрозуміло, що в цьому випадку символи 0 і 1 не є числами в звичайному розумінні.

§1. Булева алгебра.
Основні поняття та визначення

Для відображення інформації в комп'ютерах використовується двійкова система числення, тобто всі операції, які виконує комп'ютер, проводяться на множині {0;1}.

Джорджем Булем у середині XIX ст. було створено апарат двійкової логіки, алгебри, яку називають *булевою*.

Ця алгебра використовується при проектуванні інтелектуальних систем, при роботі з базами даних та інше.



Джордж Буль (Boole) – англійський математик і логік, один з засновників математичної логіки. Розробив алгебру логіки (булеву алгебру), основу функціонування цифрових компьютерів. 1854 р. «Дослідження законів мислення».

1.1 Булеві змінні та булеві функції

Розглянемо двохелементну множину B={0;1}. Змінні, що приймають значення із множин B, називаються ***булевими*** або ***логічними змінними***. Значення 0 і 1 булевих змінних називаються ***булевими константами.***

Булевою функцією *n* незалежних змінних називається функція

$$y = f(x1, x2, ..., xn), n \geq 1,$$

в якій кожна змінна і сама функція набувають власних значень з множини {0; 1}, тобто

$$x_k \epsilon \{0; 1\}, k = \overline{1, n}, y = \{0; 1\}.$$

Кортеж ($x1$, $x2$, ..., xn) конкретних значень булевих змінних називається ***набором***, або ***булевим вектором.***

Якщо незалежні змінні розміщено у прямому порядку, тобто у вигляді $x = (x1, x2, ..., xn)$, то набір називається ***прямим***, а якщо їх розміщено у зворотному порядку, тобто у вигляді $x = (xn, xn-1, ..., x1)$, то набір називається ***зворотним***.

Областю визначення булевої функції n ***аргументів*** є сукупність 2^n булевих кортежів.

Число різних булевих функцій є скінченне і дорівнює 2^{2^n} .

За $n = 1$ число булевих функцій дорівнює 4, а за $n = 2$ дорівнює 16.

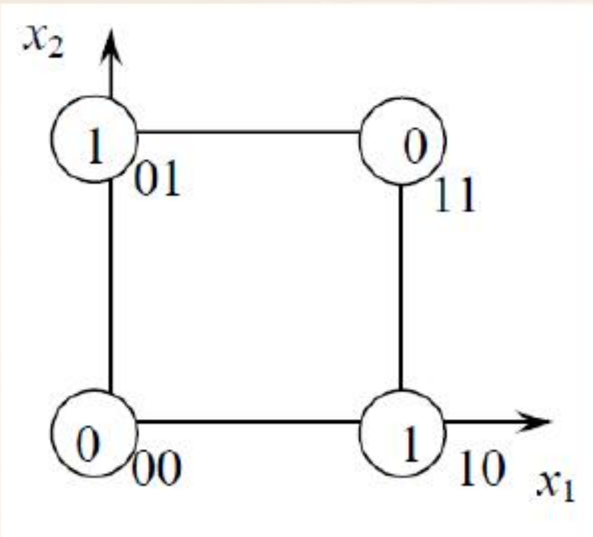
§2. Способи задання булевих функцій

1. ***Табличний.*** Функція задається у вигляді таблиці істинності.

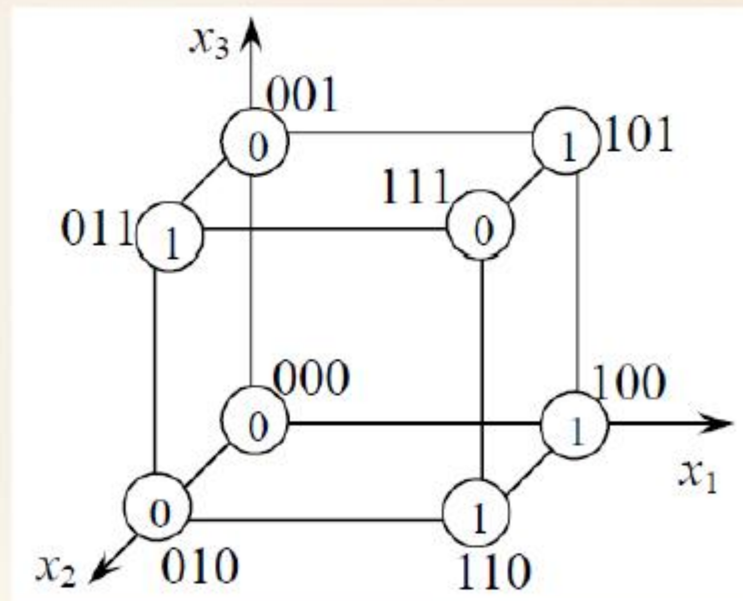
x_1	x_2	$f(x_1;\ x_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Таблиця істинності — *це прямокутна таблиця, що виражає відповідність між усіма наборами величин змінних і величин функції*. У такій таблиці, як усталено для двозначної логіки, 1 позначає істинність, 0 позначає хибність. У поданій далі таблиці істинності основних булевих функцій перші два стовпчики відведено аргументам x_1,x_2, наступний стовпчик або стовпчики — значення булевої функції.

2. ***Графічний.*** Функція задається у вигляді n-вимірного одиничного куба, у вершинах якого записано значення функції (у кружечках) та набори значень аргументів.



Двовимірний одиничний квадрат



Тривимірний одиничний куб

При геометричному способі булева функція f (x1, ..., xn) задається за допомогою n-мірного куба. У геометричному сенсі кожен двійковий набір є n-мірний вектор, який визначає точку n-мірного простору. Виходячи з цього, всі безліч наборів, на яких визначена функція n змінних, представляється вершинами n-мірного куба. Відзначаючи точками вершини куба, в яких функція приймає одиничні (або нульові) значення, отримаємо геометричне представлення функції.

Легко бачити, що булева функція від n змінних визначена на множині, яка складається з двійкових наборів значень цих змінних. Зокрема, при n=1 таких наборів 2^1=2: – 0 і 1; при n=2 таких наборів вже 2^2=4: – 00, 01, 10 і 11; при n=3 таких наборів 2^3=8: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 і 111 і т.д.

3. Координатний. Метод карт Карно

Карта Карно (**К-карта** скорочено) - метод спрощення виразів булевої алгебри, зроблене Морісом Карно в 1953 поліпшення **Діаграм Вейча,** винайдених Едвардом Вейчем в 1952. Карта Карно зменшує потребу в обширних обчисленнях, використовуючи перевагу людської можливості розпізнання шаблонів, дозволяє швидке розпізнавання і виключення потенційних станів гонитви.

В карті Карно булеві змінні переносяться (зазвичай з таблиці істинності) і впорядковуються згідно з принципами кода Грея, в якому тільки одна змінна змінюється при переході між сусідніми квадратами. Коли таблиця згенерована, і у відповідні комірки записані вихідні значення, дані організовуються в найбільші можливі групи, що містять 2^n комірок (n=0,1,2,3...)[

Призначення

Зазвичай, значні обчислення потрібні для отримання мінімального виду булевої функції, однак карта Карно зменшує потребу таких обчислень завдяки:

Використанню можливості людського розуму по розпізнаванню шаблонів для визначення які терми мають бути поєднані для отримання найпростішого виразу.

Дозволяє швидко визначити та видалити потенційні стани гонитв, які неминучі в булевих рівняннях.

Забезпечує найкращу допомогу в спрощенні до шістьох змінних, однак з більшою кількістю змінних стає складно розрізнити оптимальні шаблони.

Допомагає в навчанні про булеві функції та їх мінімізацію.

Проблеми

Карта Карно зазвичай становиться важкою для розпізнання при збільшені кількості змінних. Загальне правило таке, карта Карно добре працює до чотирьох-п'яти змінних, і не має використовуватись з більше ніж шістьома змінними. Для виразів з більшою кількістю змінних може бути використаний Метод Куайна — Мак-Класкі. Сьогодні здебільшого для процесу мінімізації використовуються комп'ютери, для яких евристичний алгоритм еспресо став стандартною програмою мінімізації.

Спосіб дії

Кожна змінна має два значення: початкове та обернене. Змінні впорядковуються згідно з кодом Грея, тобто тільки одна змінна змінюється між двома суміжними комірками. У відповідні комірки записуємо вихідні значення функції.

Коли карта Карно заповнена, для отримання мінімізованої функції "1"-ці або "0"-лі групуються в найбільші можливі прямокутні групи, в яких кількість комірок в групі має дорівнювати степеню 2.[1] Наприклад, група може складатися з 4 комірок в лінію, 2 в висоту і 4 в ширину, 2 на 2 і так далі. Байдужий стан (зазвичай позначений X) групується тільки тоді, коли група отримана з його використанням більша ніж без нього. Комірки можуть бути використані більше ніж один раз тільки якщо завдяки цьому утворюється менша кількість груп. Кожна "1" або "0" має бути задіяна як мінімум в одній групі.

3. ***Координатний (картою Карно).*** У клітинках карти записуються значення функції (нулі зазвичай не вписують, їм відповідають порожні клітини).

Карта Карно для трьох змінних

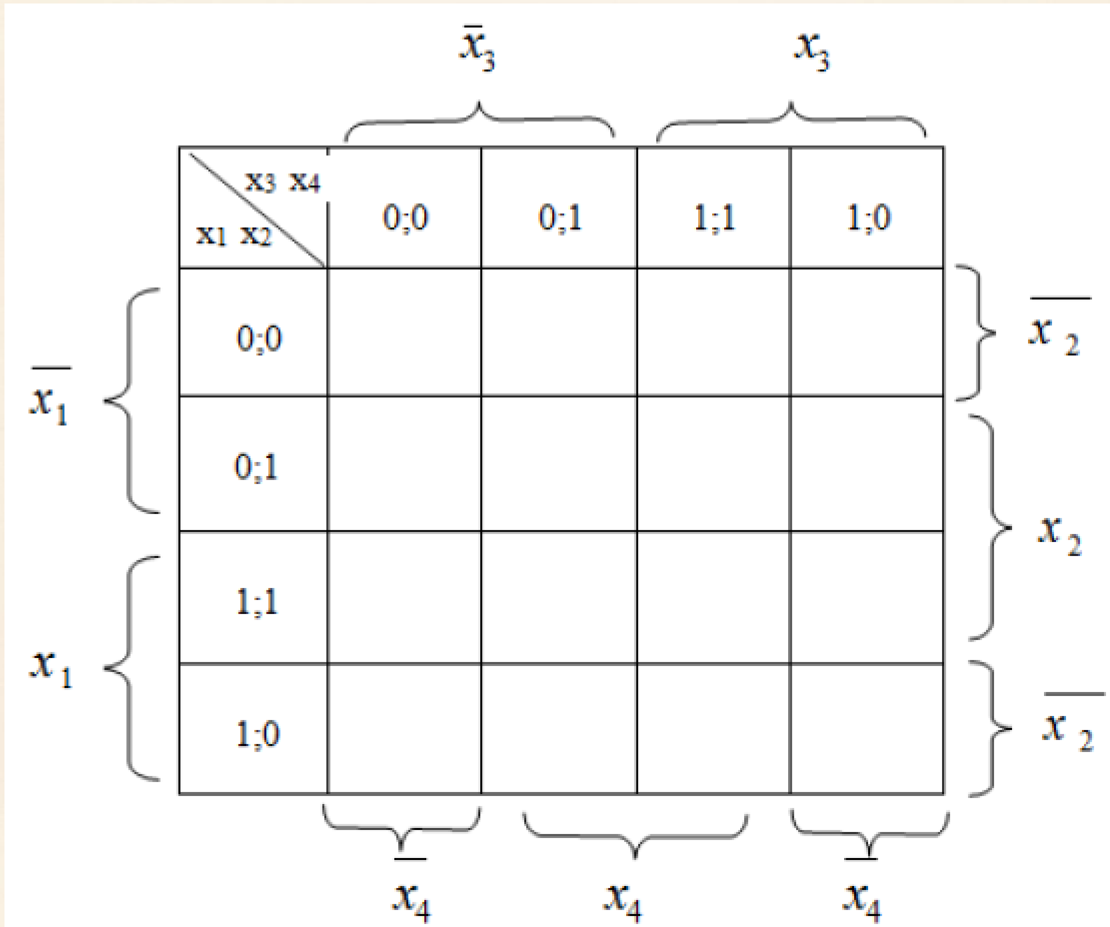
$$\bar{x}_3 \qquad \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{x_3} \qquad \bar{x}_3$$

	$x_1 \backslash x_2 x_3$	0;0	0;1	1;1	1;0
$\overline{x_1}$	0		1		1
x_1	1		1		

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\overline{x_2}} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{x_2}$$

Функція $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ на наборах (0,0,1), (1,0,1), (0,1,0) або $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, x_3), (x_1, \overline{x_2}, x_3), (\overline{x_1}, x_2, \overline{x_3})$.

Карта Карно для чотирьох змінних



4. Числовий спосіб зображення булевих функцій

Числовий спосіб використовується для спрощення зображення функцій алгебри логіки. Він ґрунтується на зв’язку двійкової й десяткової систем числення. Оскільки номерами двійкових наборів є їхні десяткові еквіваленти, у числовому способі можна перераховувати тільки ті набори, де функція приймає одиничні значення, тобто замість повного перерахування термів вказуються десяткові еквіваленти (порядкові номери) двійкових наборів, на яких функція приймає значення 1, що дійсно спрощує форму запису.

4. ***Числовий.*** Функція задається у вигляді цілих десяткових (вісімкових, шістнадцяткових) чисел, які є еквівалентами тих наборів значень аргументів, на яких функція набуває значення 1.

Наприклад, $f = \{2; 4; 5; 7\}$ для трьох змінних $x1, x2, x3$.

Десяткова система числення	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

5. ***Аналітичний.*** Функція задається у вигляді формули. Наприклад: $f = x1 + x2 \cdot x3$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\left(\left(\overline{x_1 | x_2 | \overline{x_3} | x_4}\right) \to \left(\overline{\overline{x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3}}\right)\right) \to\right.$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) =$$
$$= \left(\left(\left(\overline{x_1 \downarrow x_2 \downarrow \overline{x_3} \downarrow \overline{x_4}}\right) \to (\overline{x_1} \downarrow x_2)\right) \oplus\right.$$

§3. Булеві функції однієї та двох змінних.

Булеві функції однієї та двох незалежних змінних прийнято називати ***елементарними*** булевими функціями. Вони використовуються як логічні операції над булевими змінними при побудові булевих функцій багатьох незалежних змінних.

Алгебра з такими логічними операціями називається ***алгеброю логіки***, а булеві функції називаються ще ***функціями алгебри логіки***.

Загальне число різних елементарних функцій (логічних операцій) дорівнює загальному числу функцій двох змінних, тобто $2^{2^n} = 16$ (функції однієї змінної є окремим випадком функцій двох змінних).

Булеві функції однієї змінної

$F(x)$ \ x	0	1	Позначення
$f_1(x)$	0	0	**0**
$f_2(x)$	0	1	x
$f_3(x)$	1	0	$\overline{x}$
$f_4(x)$	1	1	**1**

Функція $f1$ − константа нуль.

Функція $f\ 2$ − тотожність (повторення).

Функція $f\,3$ − заперечення.

Функція $f4$ − константа один.

За допомогою алгебри логіки можна, наприклад, описувати роботу релейно-контактних схем. Для конкретики обмежимося розгляданням двополюсних схем, у яких поміж полюсами можуть існувати релейні контакти, з’єднані послідовно чи паралельно. При цьому стан контакту – 1 (0) означає, що він замкнений (розімкнений), тобто сигнал 1 (0) переводить електронний елемент у відкритий (закритий) стан.
Розглянемо спочатку схеми з одним контактом (рис. 2.1), на яких сам контакт та його стан позначено через *x*, а стан двополюсника позначатимемо літерою *y*.

Вочевидь, змінна *x* є незалежною, а змінна *y* – залежною булевою змінною. У разі першої схеми коло буде замкнене, якщо буде змінено стан контакту (замкнено), тобто змінна *y* набуде істинного значення (y = 1) тоді й лише тоді, коли змінна *x* також набуде істинного значення (x = 1). У разі другої схеми, навпаки, змінна *y* набуде істинного значення (y = 1), коли змінна *x* збереже хибне значення, тобто стан контакту не зміниться (x = 0).

Технічна реалізація функцій однієї змінної

$\varphi_0 = 0$

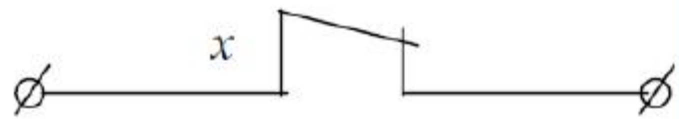
Константа 0

$\varphi_3 = 1$

Константа 1

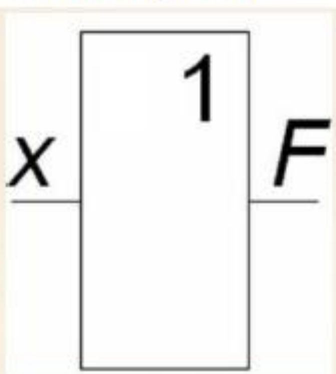
$\varphi_1 = x$

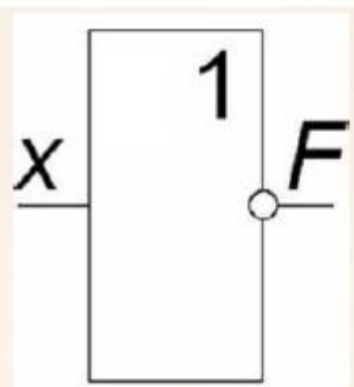
Повторення

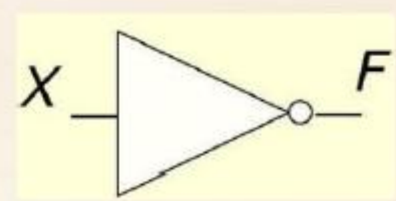


$\varphi_3 = \overline{x}$

Заперечення







Булеві функції двох змінних

Функція	Позначення	Назва	Прочитання
$f_0(x, y)$	0	константа 0	константа 0
$f_1(x, y)$	$x \wedge y = xy$	кон'юнкція (логічне «і»)	x і y
$f_2(x, y)$	$x \leftarrow y$	заперечення імплікації	x і не y
$f_3(x, y)$	x	повторення першого аргументу	як x
$f_4(x, y)$	$y \leftarrow x$	заперечення оберненої імплікації	не x і y
$f_5(x, y)$	y	повторення другого аргументу	як y
$f_6(x, y)$	$x \oplus y$	що виключає «або» (сума за модулем 2)	x не як y
$f_7(x, y)$	$x \vee y$	диз'юнкція (логічне «або»)	x або y

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
f_0	0	0	0	0
f_1	0	0	0	1
f_2	0	0	1	0
f_3	0	0	1	1
f_4	0	1	0	0
f_5	0	1	0	1
f_6	0	1	1	0
f_7	0	1	1	1

Булеві функції двох змінних

Функція	Позначення	Назва	Прочитання
$f_0(x, y)$	0	константа 0	константа 0
$f_1(x, y)$	$x \wedge y = xy$	кон'юнкція (логічне «і»)	x і y
$f_2(x, y)$	$x \leftarrow y$	заперечення імплікації	x і не y
$f_3(x, y)$	x	повторення першого аргументу	як x
$f_4(x, y)$	$y \leftarrow x$	заперечення оберненої імплікації	не x і y
$f_5(x, y)$	y	повторення другого аргументу	як y
$f_6(x, y)$	$x \oplus y$	що виключає «або» (сума за модулем 2)	x не як y
$f_7(x, y)$	$x \vee y$	диз'юнкція (логічне «або»)	x або y

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
f_0	0	0	0	0
f_1	0	0	0	1
f_2	0	0	1	0
f_3	0	0	1	1
f_4	0	1	0	0
f_5	0	1	0	1
f_6	0	1	1	0
f_7	0	1	1	1

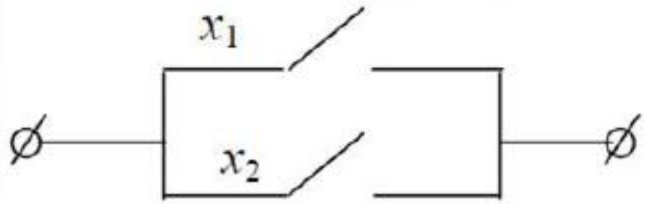
Функція	Позначення	Назва	Прочитання
$f_8(x, y)$	$x \downarrow y$	заперечення диз'юнкції (стрілка Пірса)	не x і не y
$f_9(x, y)$	$x \sim y$	еквівалентність	x як y
$f_{10}(x, y)$	$\bar{y}$	заперечення другого аргументу	не y
$f_{11}(x, y)$	$y \rightarrow x$	обернена імплікація	x, якщо y (x або не y)
$f_{12}(x, y)$	$\bar{x}$	заперечення першого аргументу	не x
$f_{13}(x, y)$	$x \rightarrow y$	імплікація	якщо x, то y (не x або y)
$f_{14}(x, y)$	$x \mid y$	заперечення кон'юнкції (штрих Шеффера)	не x або не y
$f_{15}(x, y)$	1	константа 1	константа 1

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
f_8	1	0	0	0
f_9	1	0	0	1
f_{10}	1	0	1	0
f_{11}	1	0	1	1
f_{12}	1	1	0	0
f_{13}	1	1	0	1
f_{14}	1	1	1	0
f_{15}	1	1	1	1

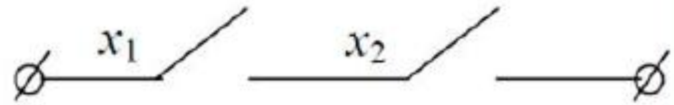
Усі можливі логічні функції *n* змінних можна створити за допомогою трьох основних операцій:

- *логічне заперечення* (інверсія, операція НІ) – це такий зв’язок між аргументом x та функцією y, за якого y істинна тоді і тільки тоді, коли значення x помилкове, і навпаки;
- *логічне додавання* ($\vee$, диз’юнкція, операція АБО) декількох змінних – це така функція, яка помилкова тоді і тільки тоді, коли одночасно помилкові всі змінні, що додаються.
- *логічне множення* ($\wedge$, кон’юнкція, операція І) декількох змінних – це така функція, яка істинна тоді і тільки тоді, коли одночасно істинні всі логічні змінні.

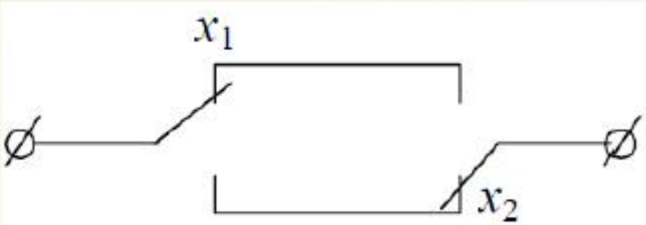
Технічна реалізація функцій двох змінних



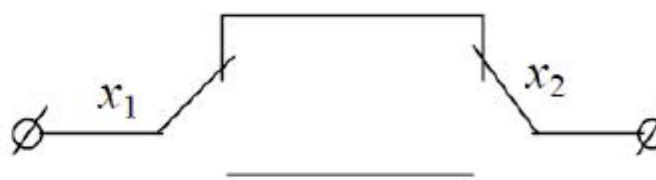
x_1+x_2
Диз'юнкція



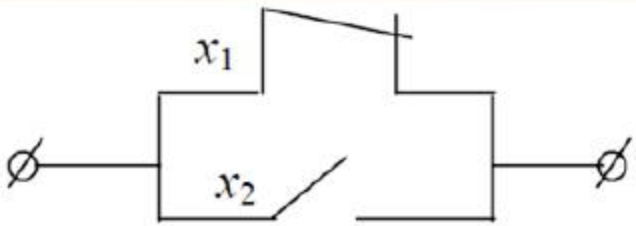
$x_1 \cdot x_2$
Кон'юнкція



$x_1 \oplus x_2$
Додавання за модулем 2

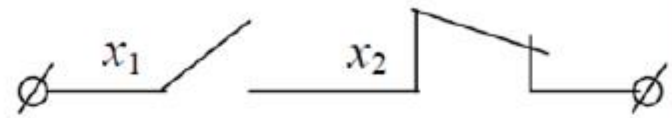


$x_1 \sim x_2$
Еквівалентність



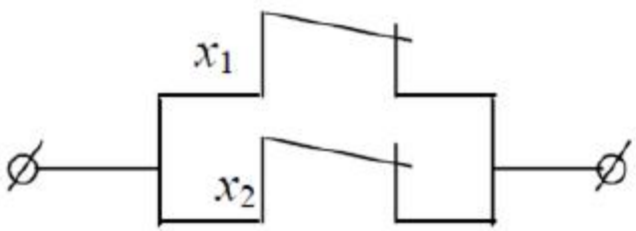
$x_1 \rightarrow x_2$

Імплікація



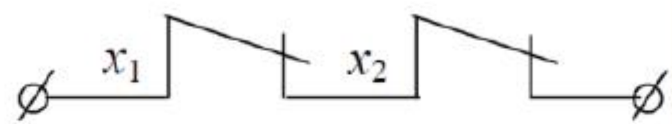
$x_1 \leftarrow x_2$

Заборона



x_1 / x_2

Штрих Шеффера



$x_1 \downarrow x_2$

Стрілка Пірса