§5 Мінімізація булевих функцій

§7 Мінімізація булевих функцій. Метод карт Карно, метод Мак-Класкі, метод послідовного застосування законів алгебри логіки.

Булеві функції, як відомо, можуть бути реалізовані різними формулами, проте для практики найбільше значення мають, такі так звані ***мінімальні*** нормальні форми, у яких число входжень символів змінних найменше.

Для довільних функцій методів знаходження таких форм не існує, мінімізацію проводять лише для диз’юнктивних нормальних форм.

Задачі знаходження (побудови) мінімальних ДНФ називаються задачами мінімізації.

Змінні $x_i \ (i = 1, n)$ та $\overline{x_i}(i = 1, n)$ досить часто називають ***термами***. Повний набір із термів утворює ***конституенту***. У процесі мінімізації деякі терми із *конституент* зникнуть. Ту частину, яка залишилась, називають ***імплікантою***.

Булева функція *g* (*x*1, *x*2, …, *xn*) називається ***імплікантою*** функції *f* (*x*1, *x*2, …, *xn*), якщо вона перетворюється на одиницю при наборі змінних, на якому сама функція також дорівнює одиниці, тобто якщо *g*=1, то й *f*=1.

Кожна конституента одиниці, яка входить до складу ДДНФ, або їхня диз'юнкція є імплікантою певної булевої функції.

Елементарна кон'юнкція $k = x\bar{y}\bar{z}$ - імпліканта функції $f = x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$, бо в разі k=1 значення функції f дорівнює 1.

Імпліканта *g* називається ***простою***, якщо жодна її частина не може бути імплікантою функції *f*.

Приклад. Для функції
$f\ (x1,x2,x3) = x1x2x3 + x1x2\overline{x3} + \overline{x1}x2x3$ знайти всі імпліканти.

$g1 = x1x2x3$;
$g2 = x1x2\overline{x3}$;
$g3 = \overline{x1}x2x3$;
$g4 = x1x2\overline{x3} + x1x2x3 = x1x2$;
$g5 = \overline{x1}x2x3 + x1x2x3 = x2x3$;
$g6 = x1x2\overline{x3} + \overline{x1}x2x3$;
$g7 = x1x2x3 + x1x2\overline{x3} + \overline{x1}x2x3 = f$.

x1	x2	x3	f	g1	g2	g3	g4	g5	g6	g7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1

ДНФ, що складається з усіх простих імплікант булевої функції, називають її ***скороченою диз'юнктивною нормальною формою*** (СДНФ).

Мінімальну ДНФ булевої функції *f* можна одержати з її СДНФ вилученням деяких елементарних кон'юнкцій.

ДНФ називають ***тупиковою*** ДНФ функції, якщо:

а) кожна елементарна кон'юнкція з ТДНФ – проста імпліканта *f;*

б) вилучення з ТДНФ довільного диз'юнктивного члена призводить до ДНФ, яка не задає функцію *f.*

Мінімальна ДНФ булевої функції являє собою її тупикову ДНФ.

Існують тупикові, але не мінімальні ДНФ, одна й та сама булева функція *f* може мати декілька різних мінімальних ДНФ.

7.1 Карта Карно

Для знаходження мінімальних ДНФ функцій невеликої кількості змінних (не більше 6) застосовується метод карт Карно. Карта Карно складається з 2^n комірок.

Карта Карно для трьох змінних

$$2^3 = 8$$

		$\bar{x}_3$	x_3	x_3	$\bar{x}_3$
	$x_1 \backslash x_2 x_3$	0;0	0;1	1;1	1;0
$\bar{x}_1$	0		1		1
x_1	1		1		
		$\bar{x}_2$	$\bar{x}_2$	x_2	x_2

$$f(x1, x2, x3) = x1x2\overline{x3} \ \vee x1\overline{x2x3} \ \vee \overline{x1}x2x3 \ \vee \overline{x1x2x3}$$

x2x3 x1	00	01	11	10
0	1		1	
1	1			1

Мінімальна ДНФ

$$f_{min}(x1, x2, x3) = x1\overline{x3} \ \vee \overline{x2x3} \ \vee \overline{x1}x2x3$$

$$f(x1, x2, x3) = x1\overline{x2}x3 \ \bigvee x1\overline{x2x3} \ \bigvee \overline{x1}x2x3 \ \vee \overline{x1x2}x3 \bigvee \overline{x1x2x3}$$

x2x3 x1	00	01	11	10
0	1	1	1	
1	1	1		

Мінімальна ДНФ

$$f_{min}(x1, x2, x3) = \overline{x2} \ \bigvee \overline{x1}x3$$

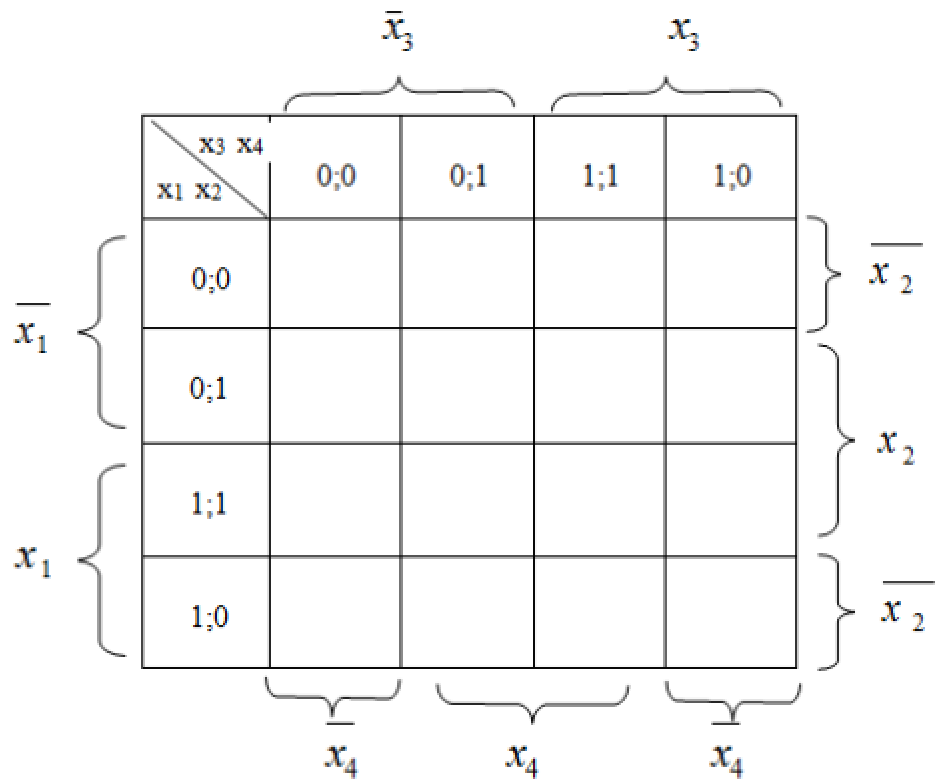
$$f(x1, x2, x3) = x1x2x3 \vee x1x2\overline{x3} \ \vee x1\overline{x2}x3 \ \vee x1\overline{x2x3} \vee$$
$$\vee \overline{x1}x2x3 \ \vee \overline{x1x2}x3 \vee \overline{x1x2x3}$$

x2x3 x1	00	01	11	10
0	1	1	1	
1	1	1	1	1

Мінімальна ДНФ

$$f_{min}(x1, x2, x3) = x1 \vee \overline{x2} \ \vee x3$$

Карта Карно для чотирьох змінних $2^4 = 16$



Знайти мінімальну ДНФ для функції

$$f(x1, x2, x3, x4) = x1x2x3\overline{x4} \vee x1x2\overline{x3}\,\overline{x4} \vee x1\overline{x2}x3x4 \vee$$
$$\vee\ x1\overline{x2}x3\overline{x4} \vee x1\overline{x2}\,\overline{x3}\,\overline{x4} \vee \overline{x1}x2x3x4 \vee \overline{x1}x2x3\overline{x4} \vee$$
$$\vee\ \overline{x1}x2\overline{x3}\,\overline{x4} \vee \overline{x1}x2\overline{x3}x4 \vee \overline{x1}\,\overline{x2}x3\overline{x4} \vee \overline{x1}\,\overline{x2}\,\overline{x3}\,\overline{x4}$$

x3x4 x1x2	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1	1	1
11	1			1
10	1		1	1

$$f_{min} = \overline{x4} \vee \overline{x1}x2 \vee x1\overline{x2}x3$$

7.2 Метод Куайна

За методом Куайна прості імпліканти знаходяться по доскональній диз'юнктивній нормальній формі (ДДНФ) булевої функції в результаті застосування до неї закону неповного склеювання та операції поглинання.

$$xy \vee x\bar{y} = x(y \vee \bar{y}) = x$$

$$x \vee (y \wedge x) = x$$

$$x \wedge (y \vee x) = x$$

Мінімізувати булеву функцію

$$f(x1,x2,x3,x4) = x1x2x3\overline{x4} \vee x1x2\overline{x3x4} \vee x1\overline{x2}x3x4 \vee$$
$$\vee\, x1\overline{x2}x3\overline{x4} \vee x1\overline{x2x3x4} \vee \overline{x1}x2x3x4 \vee \overline{x1}x2x3\overline{x4} \vee$$
$$\vee\, \overline{x1}x2\overline{x3x4} \vee \overline{x1}x2\overline{x3}x4 \vee \overline{x1x2}x3\overline{x4} \vee \overline{x1x2x3x4}$$

1) $x1x2x3\overline{x4}$ – *1110*
2) $x1x2\overline{x3x4}$ – *1100*
3) $x1\overline{x2}x3x4$ – *1011*
4) $x1\overline{x2}x3\overline{x4}$ – *1010*
5) $x1\overline{x2x3x4}$ – *1000*
6) $\overline{x1}x2x3x4$ – *0111*
7) $\overline{x1}x2x3\overline{x4}$ – *0110*
8) $\overline{x1}x2\overline{x3x4}$ – *0100*
9) $\overline{x1}x2\overline{x3}x4$ – *0101*
10) $\overline{x1x2}x3\overline{x4}$ – *0010*
11) $\overline{x1x2x3x4}$ – *0000*

Застосуємо закон склеювання конституент

1) та 2) 1110∨1100=11_0
1) та 4) 1110∨1010=1_10
1) та 7) 1110∨0110=_110
2) та 8) 1100 ∨0100=_100
2) та 5) 1100 ∨1000=1_00
3) та 4) 1011 ∨1010=101_
4) та 5) 1010 ∨1000=10_0
4) та 10) 1010 ∨0010=_010
5) та 11) 1000 ∨0000=_000
6) та 7) 0111 ∨0110=011_
6) та 9) 0111 ∨0101=01_1
7) та 8) 0110 ∨0100=01_0
7) та 10) 0110 ∨0010=0_10
8) та 9) 0100 ∨0101=010_
8) та 11) 0100 ∨0000=0_00
10) та 11) 0010 ∨0000=00_0

12) 11_0
13) 1_10
14) _110
15) _100
16) 1_00
17) 101_
18) 10_0
19) _010
20) _000
21) 011_
22) 01_1
23) 01_0
24) 0_10
25) 010_
26) 0_00
27) 00_0

Застосуємо закон склеювання імплікант, враховуючи позицію прочерка

12) та 18) 11_0∨10_0=1_ _0
12) Та 23) 11_0 ∨01_0=_1_0
13) Та 16) 1_10 ∨1_00=1_ _0
13) Та 24) 1_10 ∨0_10=_ _ 10
14) Та 15) _110 ∨_100=_1_0
14) Та 19) _110 ∨_010=_ _10
15) Та 20) _100 ∨_000=_ _ 00
16) Та 26) 1_00 ∨0_00=_ _00
18) Та 27) 10_0 ∨00_0=_0_0
19) Та 20) _010 ∨_000=_0_0
21) Та 25) 011_ ∨010_=01_ _
22) Та 23) 01_1 ∨01_0=01_ _
23) Та 27) 01_0 ∨00_0=0_ _0
24) Та 26) 0_10 ∨0_00=0_ _ 0

1_ _0
_1_0
1_ _0
_ _ 10
_1_0
_ _10
_ _ 00
_ _00
_0_0
_0_0
01_ _
01_ _
0_ _0
0_ _ 0

Видаляємо
імпліканти,
що повторюються

1_ _0
_1_0
_ _ 10
_ _00
_0_0
01_ _
0_ _0

Застосуємо закон склеювання імплікант, враховуючи позицію прочерка

1_ _0∨0_ _0=_ _ _ 0
_1_0 ∨_0_0=_ _ _ 0
_ _ 10 ∨_ _00=_ _ _ 0

Видаляємо
імпліканти,
що повторюються

_ _ _0

Мінімальна ДНФ формується з імплікант, котрі жодного разу не склеїлися (виділені червоним кольором):

101_ 01_ _ _ _ _0

$$f_{min} = x1\overline{x2}x3 \vee \overline{x1}x2 \vee \overline{x4}$$

7.2 Метод Мак-Класкі

Метод застосовують тоді, коли булева функція задана нормальною формою.

Алгоритм методу використовує наступні етапи:

1) Кожній констинуенті присвоюється індекс - число одиниць термів та номер – відповідне число в десятковій системі числення.
2) Отримані результати заносяться в таблицю, в першому рядку якої записують індекси, а в другому – номери констинтуент.

Індекс (число одиниць термів)	0	1	2	3	4
Номер (відповідне число в двійковій системі)					

3) Виконується склеювання за правилом: нехай *i* – індекс, *j* – індекс, *j* >i.

Склеюються ті конституенти, різниця між m_i та n_j є степінь двійки:

$$n_j - m_i = 2^n; n = 0;1;2;4;\dots$$

При склеюванні, справа вказується величина різниці. Склеювання продовжується доти, поки воно можливе (різниці степені-двійки). Склеювати можна лише сусідні індекси.

X1	X2	X3	X4	Десяткове число
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	2
0	0	1	1	3
0	1	0	0	4
0	1	0	1	5
0	1	1	0	6
0	1	1	1	7
1	0	0	0	8
1	0	0	1	9
1	0	1	0	10
1	0	1	1	11
1	1	0	0	12
1	1	0	1	13
1	1	1	0	14
1	1	1	1	15

$$f(x1, x2, x3, x4) = x1x2x3\overline{x4} \vee x1x2\overline{x3x4} \vee x1\overline{x2}x3x4 \vee$$
$$\vee\ x1\overline{x2}x3\overline{x4} \vee x1\overline{x2x3x4} \vee \overline{x1}x2x3x4 \vee \overline{x1}x2x3\overline{x4} \vee$$
$$\vee\ \overline{x1}x2\overline{x3x4} \vee \overline{x1}x2\overline{x3}x4 \vee \overline{x1x2}x3\overline{x4} \vee \overline{x1x2x3x4}$$

1) $x1x2x3\overline{x4}$ – $(1110)_3 - 14$
2) $x1x2\overline{x3x4}$ – $(1100)_2 - 12$
3) $x1\overline{x2}x3x4$ – $(1011)_3 - 11$
4) $x1\overline{x2}x3\overline{x4}$ – $(1010)_2 - 10$
5) $x1\overline{x2x3x4}$ – $(1000)_1 - 8$
6) $\overline{x1}x2x3x4$ – $(0111)_3 - 7$
7) $\overline{x1}x2x3\overline{x4}$ – $(0110)_2 - 6$
8) $\overline{x1}x2\overline{x3x4}$ – $(0100)_1 - 4$
9) $\overline{x1}x2\overline{x3}x4$ – $(0101)_2 - 5$
10) $\overline{x1x2}x3\overline{x4}$ – $(0010)_1 - 2$
11) $\overline{x1x2x3x4}$ – $(0000)_0 - 0$

Індекс (число одиниць термів)	0	1	2	3	4
Номер (відповідне число в двійковій системі)	0	2 4 8	5 6 10 12	7 11 14	

I
(індекси 1 та 0)
(0,2) (2)
(0,4) (4)
(0,8) (8)

II
(індекси 2 та 1)
(2,6) (4)
(4,6) (2)
(2,10) (8)
(4,12) (8)
(8, 12) (4)
(4,5) (1)
(8,10) (2)

III
(індекси 3 та 2)
(5,7) (2)
(10,11) (1)
(10,14) (4)
(6,14) (8)
(12, 14) (2)
(6,7) (1)

IV

(етапи **I** та **II**)

(0,2,4,6) (2,4)

(0,2,8,10) (2,8)

~~(0,4,2,6) (2,4)~~

(0,4,8,12) (4,8)

~~(0,4,8,12) (4,8)~~

~~(0,2,8,10) (2,8)~~

V

(етапи **III** та **II**)

(2,6,10,14) (4,8)

(8,10,12,14) (2,4)

(4,5,6,7) (1,2)

(4,6,12,14) (2,8)

~~(2,6,10,14) (4,8)~~

~~(4,6,12,14) (2,8)~~

~~(4,5,6,7) (1,2)~~

IV

(етапи **IV** та **V**)

(0,2,4,6,8,10,12,14) (2,4,8)

~~(0,4,8,12,2,6,10,14) (2,4,8)~~

~~(0,4,8,12,2,6,10,14) (2,4,8)~~

(10,11) (1)

$x1\overline{x2}x3x4 - (1011)_3 - 11$ $x1\overline{x2}x3\ (101\_)$

$x1\overline{x2}x3\overline{x4} - (1010)_2 - 10$

(4,5,6,7) (1,2)

$\overline{x1}x2x3x4 - (0111)_3 - 7$ $\overline{x1}x2\ (01\_\ \_)$

$\overline{x1}x2x3\overline{x4} - (0110)_2 - 6$

$\overline{x1}x2\overline{x3}\overline{x4} - (0100)_1 - 4$

$\overline{x1}x2\overline{x3}x4 - (0101)_2 - 5$

(0,2,4,6,8,10,12,14) (2,4,8)

$$x1x2x3\overline{x4} – (1110)_3 − 14 \qquad \overline{x4}\ (\_\ \_\ \_0)$$

$$x1x2\overline{x3x4} – (1100)_2 − 12$$

$$x1\overline{x2}x3\overline{x4} – (1010)_2 − 10$$

$$x1\overline{x2x3x4} – (1000)_1 − 8$$

$$\overline{x1}x2x3\overline{x4} – (0110)_2 − 6$$

$$\overline{x1}x2\overline{x3x4} – (0100)_1 − 4$$

$$\overline{x1x2}x3\overline{x4} – (0010)_1 − 2$$

$$\overline{x1x2x3x4} – (0000)_0 − 0$$

Після склеювання отримуємо скорочену диз'юнктивну нормальну форму (СДНФ).

$$f_{\text{скор}} = \overline{x4} \vee \overline{x1}x2 \vee x1\overline{x2}x3$$

Для отримання мінімальної ДНФ складемо таблицю Куайна , в якій помістимо отримані спрощенням імпліканти та вихідні констинтуенти. Одиницю ставимо там, де імпліканта “покриває” констинтуенту, це тому, що констинтуента може бути замінена імплікантою за законом поглинання.

x1	x2	x3	x4	1110	1100	1011	1010	1000	0111	0110	0100	0101	0010	0000
_	_	_	0	1	1		1	1		1	1		1	1
1	0	1	_			1	1							
0	1	_	_						1	1	1	1		

Отже мінімальна ДНФ:

$$f_{min} = x1\overline{x2}x3 \vee \overline{x1}x2 \vee \overline{x4}$$