Модуль 2.
Математична логіка

Тема 3.

ДНФ, КНФ. Алгебра Жегалкіна

§4 Диз’юнктивні та кон`юктивні розкладання булевих функцій

Елементарною диз’юнкцією називається диз’юнкція скінченного числа булевих змінних, у якій кожна змінна зустрічається не більше одного разу в прямому чи інверсному вигляді.

$x1 + x2$, $x1 + x2 + x4$ – елементарні диз’юнкції.

Елементарною кон’юнкцією називається кон’юнкція скінченного числа булевих змінних, у якій кожна змінна зустрічається не більше одного разу в прямому чи інверсному вигляді.

$x1 \cdot x2 \cdot x3$, $x5 \cdot x7 \cdot x9 \cdot x10$ – елементарні кон’юнкції.

§5 Нормальні форми зображення булевих функцій

Диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ) називається формула, яка містить диз'юнкцію скінченного числа різних елементарних кон'юнкцій.

$x1 \cdot x2 \vee x1 \cdot x3$,

$x1 \cdot x5 \vee x6$

Кон'юнктивною нормальною формою (КНФ) називається формула, яка містить кон'юнкцію скінченного числа різних елементарних диз'юнкцій.

$(x1 \vee x2) \cdot x3$,

$(x1 \vee x3) \cdot (x1 \vee x4) \cdot (x2 \vee x5)$

ДНФ називається ***досконалою диз'юнктивною нормальною формою*** і позначається ДДНФ, якщо в кожній її елементарній кон'юнкції подано всі змінні.

$$x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3$$

КНФ називається ***досконалою кон'юнктивною нормальною формою*** і позначається ДКНФ, якщо в кожній її елементарній диз'юнкції подано всі змінні.

$$(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3 + x_4) \cdot (x_1 + \overline{x}_2 + x_3 + x_4)$$

Приведення формули до ДДНФ

1) за допомогою законів та властивостей булевої алгебри привести її до ДНФ;

2) якщо в елементарній кон'юнкції не міститься змінної x_i із загальної кількості змінних, які входять до даної формули, додати до цієї кон'юнкції співмножник $x_i + \overline{x_i}$ і розкрити дужки;

3) з однакових елементарних кон'юнкцій вилучити всі, окрім однієї.

$$x_1x_2 + \bar{x}_3 = x_1x_2(x_3 + \bar{x}_3) + (x_1 + \bar{x}_1)(x_2 + \bar{x}_2)\bar{x}_3 =$$

$$= x_1x_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 =$$

$$= x_1x_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3.$$

Приведення формули до ДКНФ

Для того щоб привести формулу до ДКНФ, доцільно спочатку привести її до ДНФ, а потім від ДНФ перейти до КНФ в такий спосіб:

Нехай ДНФ має вигляд
$f = c1 + c2 + \ldots + cm$, де ci – елементарні кон’юнкції,
$i = 1..m$.

Формулу $\overline{c1 + c2 + \ldots + cm}$ приведемо до ДНФ
$k1 + k2 + \ldots + kl$, де ki – елементарні кон’юнкції.
Тоді

$$f = \overline{\overline{c_1 + c_2 + \ldots + c_m}} = \overline{k_1 + k_2 + \ldots + k_l} = \overline{k_1} \cdot \overline{k_2} \cdot \ldots \cdot \overline{k_l} \ .$$

Застосовуючи правило де Моргана, перетворимо елементарні кон'юнкції $\overline{k_i}$ на елементарні диз'юнкції *Di*, де *i* =1..*k* .

Отже, дістанемо КНФ

$$f = D1 \cdot D2 \cdot \ldots \cdot Dl.$$

І, врешті, використовуючи закон протиріччя та закон дистрибутивності, зробимо перехід від КНФ до ДКНФ.

$$x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1x_2 = \overline{\overline{x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1x_2}} = \overline{\overline{x_1\bar{x}_2} \cdot \overline{\bar{x}_1x_2}} = \overline{(\bar{x}_1 + x_2)\cdot(x_1 + \bar{x}_2)} =$$

$$= \overline{\bar{x}_1\bar{x}_2 + x_1x_2} = \overline{\bar{x}_1\bar{x}_2} \cdot \overline{x_1x_2} = (x_1 + x_2)\cdot(\bar{x}_1 + \bar{x}_2).$$

$$\overline{x_1 x_2 x_3} \cdot (x_1 x_2 \to x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3) = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot (\overline{x_1 \cdot x_2} + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3) =$$

$$= (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3) = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot$$

$$\cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_1) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_2) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) =$$

$$= (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3 \cdot \bar{x}_3) =$$

$$= (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) =$$

$$= (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3)$$

Елементарна диз'юнкція, яка містить усі змінні, називається ***конституентою нуля***.

Наприклад, якщо загальна кількість змінних n = 3, то $\overline{x1}$+x2+x3 – конституента нуля.

Конституента нуля перетворюється на нуль лише за одного набору значень змінних. У нашому прикладі конституенті нуля відповідає набір (1, 0, 0).

Елементарна кон'юнкція, яка містить усі змінні, називається ***конституентою одиниці***.

Наприклад, якщо n = 3, то x1·$\overline{x2}$·x3 – конституента одиниці.

Конституента одиниці перетворюється на одиницю лише за одного набору.

Наприклад, конституенті одиниці x1·$\overline{x2}$·x3 відповідає набір (1, 0, 1).

§6 Алгебра Жегалкіна. Лінійні функції. Монотонні функції. Класи булевих функцій

6.1 Алгебра Жегалкіна

Алгебра, що утворена множиною B{0;1} разом з операціями ^ (кон'юнкцією), $\oplus$ (сума за модулем 2) і константами 0, 1 називається ***алгеброю Жегалкіна*** $(B, \wedge; \oplus; 0, 1)$.

В алгебрі Жегалкіна операція кон'юнкції повністю ідентична множенню, а операція $\oplus$ зображує додавання за модулем для скінчених множин.

Властивості операції кон'юнкції:

$(x_1 \wedge x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3)$ – асоціативність.

$x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1$ – комутативність.

$x \wedge 0 = 0, x \wedge 1 = x$ – дії з константами.

$x \wedge x = x$ – ідемпотентність.

Властивості операції додавання за модулем 2:

$x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$ – комутативність.

$x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3$ – асоціативність.

$x \oplus x = 0$ –закон зведення подібних доданків.

$x \oplus 0 = x$ – операція з константою 0.

$x_1 \wedge (x_2 \oplus x_3) = x_1 x_2 \oplus x_1 x_3$ – дистрибутивність ^ відносно $\oplus$.

Решта операцій алгебри логіки виражаються через базис цієї алгебри в такий спосіб:

$$\bar{x} = x \oplus 1;$$

$$x_1 + x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 \cdot x_2;$$

$$x_1 \to x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_1 \cdot x_2;$$

$$x_1 \downarrow x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 \cdot x_2;$$

$$x_1 \sim x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2;$$

$$x_1 \leftarrow x_2 = x_1 \oplus x_1 \cdot x_2;$$

$$x_1 / x_2 = 1 \oplus x_1 \cdot x_2.$$

Операція $\oplus$ відіграє важливу роль у програмуванні, бо має важливу властивість – наявність оберненого елементу x' для кожного $x \in \{0; 1\}$ ($x' = x$). Це дозволяє розв'язувати рівняння шляхом додавання до обох його частин однакових елементів.

Наприклад, рівняння виду $a \oplus x = b$ розв'язується так:

$$a \oplus a \oplus x = a \oplus \mathrm{b}; \qquad 0 \oplus x = a \oplus \mathrm{b};$$

$$x = a \oplus \mathrm{b}.$$

Для зображення будь-якої булевої функції формулою алгебри Жегалкіна достатньо виразити диз'юнкцію та заперечення через кон'юнкцію і $\oplus$.

$$x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1 \vee x_2}} = \overline{\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}} = \overline{(x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1)}$$
$$= (x_1 \oplus 1)\,(x_2 \oplus 1) \oplus 1 = x_1\,x_2 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus 1 \oplus 1$$
$$= x_1 x_2 \oplus x_2 \oplus x_1$$

6.2 Поліномом Жегалкіна

Поліномом Жегалкіна називається скінченна сума за модулем 2 попарно різних елементарних кон'юнкцій над множиною змінних $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Кількість змінних, що входять до елементарної кон'юнкції називається ***рангом елементарної кон'юнкції***. Кількість попарно різних елементарних кон'юнкцій у поліномі називається ***довжиною полінома***.

Функція $f(x_1, x_2, x_3)$ від трьох змінних буде мати наступний поліном Жегалкіна:

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_{123}x_1x_2x_3$$

Коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots .. \in \{0,1\}$, Для будь-якої функції існує єдиний поліном Жегалкіна.

Способи побудови полінома Жегалкіна

Метод еквівалентних перетворень	Метод трикутника Паскаля	Метод невизначених коефіцієнтів

Метод еквівалентних перетворень

Для функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ записують ДДНФ, потім виражають диз'юнкцію та заперечення через операції кон'юнкції та додавання за модулем 2. Використовуючи тотожності алгебри Жегалкіна, отримують поліном.

Зобразити поліном Жегалкіна для функції $x{\sim}y$.

$$
\begin{gathered}
x{\sim}y = xy \vee \bar{x}\bar{y} = xy\bar{x}\bar{y} \oplus xy \oplus \bar{x}\bar{y} = \\
= xy(\bar{x}\bar{y} \oplus 1) \oplus \bar{x}\bar{y} = xy \oplus \bar{x}\bar{y} = \\
= xy \oplus (x \oplus 1)(y \oplus 1) = \\
= xy \oplus xy \oplus x \oplus y \oplus 1 = \\
= x \oplus y \oplus 1.
\end{gathered}
$$

Метод трикутника Паскаля

Розглянемо на прикладі.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3 = (00010111)$$

Крок 1. Побудувати таблицю істиності.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

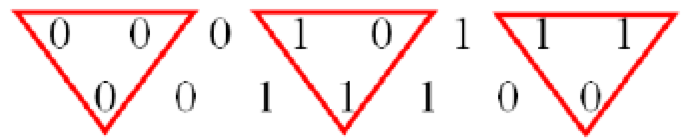
Крок 2. Стовпчик – вектор значень функції записуємо по горизонталі.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

0 0 0 1 0 1 1 1

Крок 3. Заповнюємо трикутник Паскаля, додаючи попарно сусідні значення за модулем 2.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

```
0   0   0   1   0   1   1   1
  0   0   1   1   1   0   0
    0   1   0   0   1   0
      1   1   0   1   1
        0   1   1   0
          1   0   1
            1   1
              0
```

Крок 4. Визначення коефіцієнтів a_0, a_1, a_2, a_3 … ..

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

0 0 0 1 0 1 1 1
0 0 1 1 1 0 0
0 1 0 0 1 0
1 1 0 1 1
0 1 1 0
1 0 1
1 1
0

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

1	**0**	0	0	1	0	1	1	1
x_3	**0**	0	1	1	1	0	0	
x_2	**0**	1	0	0	1	0		
x_2x_3	**1**	1	0	1	1			
x_1	**0**	1	1	0				
x_1x_3	**1**	0	1					
x_1x_2	**1**	1						
$x_1x_2x_3$	**0**							

x_1	x_2	x_3	f		
0	0	0	0	1	**0** 0 0 1 0 **1** 1 1
0	0	1	0	x_3	**0** 0 1 **1** 1 0 0
0	1	0	0	x_2	**0** 1 0 0 1 0
0	1	1	1	x_2x_3	**1** 1 0 1 1
1	0	0	0	x_1	**0** 1 1 0
1	0	1	1	x_1x_3	**1** 0 1
1	1	0	1	x_1x_2	**1** 1
1	1	1	1	$x_1x_2x_3$	**0**

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3.$$

Метод невизначених коефіцієнтів

Нехай *P*(*x*) поліном Жегалкіна, який реалізує задану функцію.

Для двох змінних:

$$P(x_1, x_2) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_{12}x_1x_2$$

Для трьох змінних:

$$P(x_1, x_2, x_3) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus$$
$$\oplus\ a_{13}x_1x_3 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_{123}x_1x_2x_3$$

Коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots$ - це невизначені коефіцієнти, які необхідно знайти.

Кожну змінну $x_1, x_2, x_3 \ldots$ розглядаємо двійковим набором $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ....(наприклад, x_1=001, $x_2 = 101$).

Для кожного двійкового набору значень змінних записують 2^n рівнянь $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = P(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

Розв'язавши їх, отримують коефіцієнти полінома.

P(x_1, x_2, x_3)= $a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus$
$\oplus\ a_{13}x_1x_3 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_{123}x_1x_2x_3$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1

$$a_0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 0 \oplus a_3 \cdot 0 \oplus a_{12} \cdot 0 \cdot 0 \oplus$$
$$\oplus\ a_{13} \cdot 0 \cdot 0 \oplus a_{23} \cdot 0 \cdot 0 \oplus a_{123} \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = \boldsymbol{a_0} \mathbf{=0}$$

$$a_0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 0 \oplus a_3 \cdot 1 \oplus a_{12} \cdot 0 \cdot 0 \oplus$$
$$\oplus\ a_{13} \cdot 0 \cdot 1 \oplus a_{23} \cdot 0 \cdot 1 \oplus a_{123} \cdot 0 \cdot 0 \cdot 2 = \boldsymbol{a_0} \oplus \boldsymbol{a_3} \mathbf{=}$$

$$a_0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_3 \cdot 0 \oplus a_{12} \cdot 0 \cdot 1 \oplus$$
$$\oplus\ a_{13} \cdot 0 \cdot 0 \oplus a_{23} \cdot 1 \cdot 0 \oplus a_{123} \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0 = \boldsymbol{a_0} \oplus \boldsymbol{a_2} \mathbf{=0}$$

$$a_0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_3 \cdot 1 \oplus a_{12} \cdot 0 \cdot 1 \oplus$$
$$\oplus\ a_{13} \cdot 0 \cdot 1 \oplus a_{23} \cdot 1 \cdot 1 \oplus a_{123} \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 = \boldsymbol{a_0} \oplus \boldsymbol{a_2} \oplus \boldsymbol{a_3} \oplus \boldsymbol{a_{23}} \mathbf{=1}$$

x_1	x_2	x_3	f
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 0 \oplus a_3 \cdot 0 \oplus a_{12} \cdot 1 \cdot 0 \oplus$$
$$\oplus a_{13} \cdot 1 \cdot 0 \oplus a_{23} \cdot 0 \cdot 0 \oplus a_{123} \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0 =$$
$$= \boldsymbol{a_0 \oplus a_1} \mathbf{=0}$$

$$a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 0 \oplus a_3 \cdot 1 \oplus a_{12} \cdot 1 \cdot 0 \oplus$$
$$\oplus a_{13} \cdot 1 \cdot 1 \oplus a_{23} \cdot 0 \cdot 1 \oplus a_{123} \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1 = \boldsymbol{a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_{13}} \mathbf{=1}$$

$$a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_3 \cdot 0 \oplus a_{12} \cdot 1 \cdot 1 \oplus$$
$$\oplus a_{13} \cdot 1 \cdot 0 \oplus a_{23} \cdot 1 \cdot 0 \oplus a_{123} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 = \boldsymbol{a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12}} \mathbf{=1}$$

$$a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_3 \cdot 1 \oplus a_{12} \cdot 1 \cdot 1 \oplus$$
$$\oplus a_{13} \cdot 1 \cdot 1 \oplus a_{23} \cdot 1 \cdot 1 \oplus a_{123} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 =$$
$$= \boldsymbol{a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_{123}} \mathbf{=1}$$

Розв'язуємо отриману систему

$$a_0 = 0$$
$$a_0 \oplus a_3 = 0$$
$$a_0 \oplus a_2 = 0$$
$$a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{23} = 1$$
$$a_0 \oplus a_1 = 0$$
$$a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_{13} = 1$$
$$a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12} = 1$$
$$a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_{123} = 1$$

Закон зведення подібних доданків: $\mathbf{1 \oplus 1 = 0}, \mathbf{0 \oplus 0 = 0}$.

Операція з константою 0: $1 \oplus 0 = 1, 0 \oplus 1 = 1$

$a_0 = 0$, $a_3 = 0$, $a_2 = 0$, $a_{23} = 1$, $a_1 = 0$, $a_{13} = 1$, $a_{12} = 1$, $a_{123} = 1$

Отже поліном Жегалкіна: P= $x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3$

6.3 Лінійні функції. Монотонні функції

Булева функція називається ***лінійною***, якщо її поліном Жегалкіна не містить кон'юнкцій змінних.

$x \sim y = x \oplus y \oplus 1$–лінійна булева функція.

Булева функція f називається ***монотонною***, якщо для будь-яких пар наборів значень змінних $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ для яких виконується відношення $(x_1, x_2, \dots, x_n) \le (y_1, y_2, \dots, y_n)$ правильна і нерівність $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \le f(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Дослідити на монотонність функцію $f(x,y) = x{\sim}y$. Запишемо всі набори значень змінних, для яких виконується відношення порядку, визначимо значення функцій на даних наборах та порівняємо їх.

$f(x,y) = x{\sim}y$

x_1	x_2	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$(0;0) \leq (0;1) \quad f(0;0) = 1 \quad f(0;1) = 0$

$f(0;0) \not\leq f(0;1);$

$(0;0) \leq (1;0) \quad f(0;0) = 1 \quad f(1;0) = 0$

$f(0;0) \not\leq f(1;0);$

$(0;0) \leq (1;1) \quad f(0;0) = 1 \quad f(1;1) = 1$

$f(0;0) \leq f(1;1);$

$(0;1) \leq (1;0) \quad f(0;1) = 0 \quad f(1;0) = 0$

$f(0;1) \leq f(1;0);$

$(0;1) \leq (1;1) \quad f(0;1) = 0 \quad f(1;1) = 1$

$f(0;1) \leq f(1;1);$

$(1;0) \leq (1;1) \quad f(1;0) = 1 \quad f(1;1) = 1$

$f(1;0) \leq f(1;1).$

$f(x,y) = x{\sim}y$ не є монотоною.

Дослідити на монотонність функцію $g(x, y) = x \wedge y$.

x_1	x_2	f
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$g(x, y) = x \wedge y$ є монотонною.

$(0;0) \le (0;1) \quad f(0;0) = 0 \quad f(0;1) = 0$

$f(0;0) \le f(0;1);$

$(0;0) \le (1;0) \quad f(0;0) = 0 \quad f(1;0) = 0$

$f(0;0) \le f(1;0);$

$(0;0) \le (1;1) \quad f(0;0) = 0 \quad f(1;1) = 1$

$f(0;0) \le f(1;1);$

$(0;1) \le (1;0) \quad f(0;1) = 0 \quad f(1;0) = 0$

$f(0;1) \le f(1;0);$

$(0;1) \le (1;1) \quad f(0;1) = 0 \quad f(1;1) = 1$

$f(0;1) \le f(1;1);$

$(1;0) \le (1;1) \quad f(1;0) = 0 \quad f(1;1) = 1$

$f(1;0) \le f(1;1).$

6.4 Класи булевих функцій

Класами Поста називаються такі п'ять множин булевих функцій:

T_0 – клас функцій, що зберігає 0;

$T_0 = \{f \in P_2 \mid f(0,0,\ldots,0) = 0\}$.

T_1 – клас функцій, що зберігає 1;

$T_1 = \{f \in P_2 \mid f(1,1,\ldots,1) = 1\}$.

S – клас самодвоїстих функцій ;

$S = \{f \in P_2 \mid \forall_{(a1,\ldots,an)}\ f(a_1,\ldots,a_n) = \bar{f}(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n)\}$.

M – клас монотонних функцій;

$M = \{f \in P_2 \mid \forall_\alpha \forall_\beta\ \alpha \preceq \beta \to f(\alpha) \le f(\beta)$.

L – клас лінійних фнкцій ;

$L = \{f \in P_2 \mid f(x_1, x_{2, \ldots, xn}) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus \ldots \oplus a_nx_n\}$.

Булева функція $f(x_1, .., x_n)$ може належати одному або кільком класам, та не належати до жодного.

Теорема 1. Кожний з класів Поста замкнений.
Це означає, що будь-яка суперпозиція функцій з одного й того ж класу Поста призводить до функції того ж класу.

Теорема 2. Критерій повноти Поста. Система ∑ булевих функцій повна тоді і тільки тоді, коли вона містить хоча б одну функцію, що не зберігає нуль, хоча б одну функцію, що не зберігає одиницю, хоча б одну немонотонну функцію, хоча б одну несамодвоїсту функцію і хоча б одну нелінійну.

Ненадлишковий повний набір функцій називається **базисом** ("ненадлишковий" означає, що якщо якусь функцію видалити з набору, то цей набір перестане бути повним).

Відповідно до теореми Поста набір функцій буде повним тоді і тільки тоді, коли в кожному стовпчику таблиці Поста є хоча б один мінус.

f	T_0	T_1	L	M	S
f_1	+	–	+	–	–
f_2	+	–	–	–	+
f_3	–	+	–	–	–
f_4	+	+	–	+	–

З наведеної таблиці випливає, що дані 4 функцій утворюють повний набір але ці функції не є базисом. З цих функцій можна утворити 2 базиси: f3, f1 і f3, f2. Повними наборами будуть будь-які набори що містять, будь-який базис.

Визначити за допомогою теореми Поста, чи є система $\{x \vee y, \bar{x}\}$ функціонально повною.

x	y	x∨y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1
$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

1) $f(x) = x \vee y = xy \oplus x \oplus y$, функція нелінійна.
2) Зберігає 0: $f(0{,}0) = 0$.
3) Зберігає 1: $f(1{,}1) = 1$.
4) Монотонна:

$f(0;0) \leq f(0;1), f(1;0), f(1;1)$

$f(0;1) \leq f(1;0), f(1;1)$

$f(1;0) \leq f(1;1)$

5) Несамодвоїста:

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq \bar{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$.

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

1) $f(x) = \bar{x} = x \oplus 1$ функція лінійна.
2) Не зберігає 0: $f(0,0) \neq 0$.
3) Не зберігає 1: $f(1,1) \neq 1$.
4) Немонотонна:

$$f(0) \nleq f(1)$$

5) Самодвоїста:

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$.

$\bar{x}$	$\bar{\bar{\bar{x}}}$
1	1
0	0

Зведемо всі дані в таблицю:

Назва властивості	$\bar{x}$	$x \vee y$
Лінійність	+	–
Монотонність	–	+
Зберігання 0	–	+
Зберігання 1	–	+
Самодвоїстість	+	–

В кожному рядку таблиці присутній знак «–». Отже, для кожного класу є хоча б одна функція, яка цьому класу Поста не належить. За теоремою Поста така система функцій є функціонально повною.