§4 Реалізація булевих функцій формулами, пріоритет операцій.

§4 Реалізація булевих функцій формулами, пріоритет операцій.

Булева алгебра (загальна) — це алгебраїчна структура (A, $\wedge$, $\vee$, $\overline{}$, 0, 1) з бінарними операціями $\wedge$, $\vee$: $A^2 \to A$, унарною операцією «$\overline{}$»: $A \to A$ і виділеними елементами 0, 1 в носії A, які задовольняють властивості комутативності, асоціативності, дистрибутивності.

Якщо носій алгебраїчної структури $B = \{0, 1\}$ складається з двох елементів, то така структура (B,$\wedge$,$\vee$,$\overline{}$) називається ***двохелементною булевою алгеброю***.

Алгеброю логіки називається двохелементна булева алгебра (B, $\wedge$, $\vee$, $\overline{}$, $\to$, ~), $B=\{0,1\}$, в якій множину операцій доповнено двома бінарними операціями: імплікацією та еквівалентністю.

Формула — це вираз, що містить булеві функції та їхні суперпозиції.

Суперпозицією називається спосіб одержання нових функцій шляхом підстановки значень одних функцій замість значень аргументів інших функцій, при цьому деякі з функцій можуть тотожно співпадати з однією із змінних.

Якщо у формулі відсутні дужки, то

операції виконуються у такій послідовності:

- заперечення $\bar{\ }$
- кон'юнкція $\wedge$
- диз'юнкція $\vee$
- імплікація $\rightarrow$
- еквівалентність $\sim$

Означення . Нехай F – довільна формула. Тоді формули, що використовувалися для її побудови, називаються підформулами формули F.

Принцип суперпозиції

Функцію, що відповідає формулі F, називають суперпозицією функцій з множини функцій, а процес здобуття функції з множини функцій – операцією суперпозиції.

Приклад. Функція F1 = (((x1x2)+x1)+ x2) будується за три кроки (табл.6):

- (x1x2)
- ((x1x2)+x1)
- (((x1x2)+x1)+ x2) =F1

Таблиця 6

x_1	x_2	x_1x_2	$(x_1x_2)+x_1$	$F_1 = (((x_1x_2)+x_1)+ x_2)$
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Функція $F_2 = x_1 \ (x_2+x_3)$ будується також за три кроки (табл.7):

- (x_2+x_3)
- $(\overline{x_1})$
- $((x_2+x_3)\overline{x_1})=F_2$.

Таблиця 7

x_1	x_2	x_3	$x_2 + x_3$	$\overline{x_1}$	$F_2=\overline{x_1}\ (x_2+x_3)$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0

При складанні логічного висловлення із простих використовується принцип суперпозиції, тобто підстановка у функцію замість її аргументу інших функцій. Замість будь-якої змінної використовується як власне незалежна змінна, аргумент, так і змінна, що є функцією інших змінних. Цей принцип є правильним також у звичайній алгебрі. За допомогою принципу суперпозиції з двомісних булевих функцій можна побудувати будь-яку булеву функцію.

Принцип суперпозиції дає змогу на основі трьох основних елементарних функцій (заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція) здобути складене логічне висловлення, що описує функціонування цифрових систем й автоматів.

Якщо F_1 й F_2 – формули, то $\overline{F_1}$, $(F_1 \& F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \rightarrow F_2)$, $(F_1 \sim F_2)$ – також формули.

На відміну від табличного задання, зображення функції формулою не єдине.

Формули, що зображують одну й ту ж функцію, називаються ***еквівалентними*** або ***рівносильними***.

Приклад. Функцію штрих Шеффера можна зобразити за допомогою основних операцій булевої алгебри формулами:

$f_{14} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$ або $f_{14} = \overline{x_1 x_2}$

а функцію стрілка Пірса таким чином:

$f_8 = \bar{x}_1 \bar{x}_2$ або $f_8 = \overline{x_1 \vee x_2}$

§5. Двоїстість булевих функцій.

Логічна функція $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається ***двоїстою*** до функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо має місце рівність

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$$

Наприклад, функція $f1 = x1 \cdot x2$ має властивість двоїстості до функції $f2 = x1 + x2$, тому що

$$x_1 \cdot x_2 = \overline{\overline{x_1} + \overline{x_2}}$$

$x1$	$x2$	$f1 = x1 \cdot x2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$f2 = \overline{x_1} + \overline{x_2}$	$\overline{f_2}$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

§5. Двоїстість булевих функцій.

Логічна функція $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається ***двоїстою*** до функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо має місце рівність

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$$

Наприклад, функція $f1 = x1 \cdot x2$ має властивість двоїстості до функції $f2 = x1 + x2$, тому що

$$x_1 \cdot x_2 = \overline{\overline{x_1} + \overline{x_2}}$$

$x1$	$x2$	$f1 = x1 \cdot x2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$f2 = \overline{x_1} + \overline{x_2}$	$\overline{f_2}$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

Логічна функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається ***самодвоїстою***, якщо має місце рівність

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}).$$

Наприклад, функція $f\ (x1,\ x2,\ x3) = x1{\cdot}x2 + x2{\cdot}x3 + x1{\cdot}x3$ є самодвоїстою, тому що

$$x_1{\cdot}x_2 + x_2{\cdot}x_3 + x_1{\cdot}x_3 = \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3}$$

Перевіряється за допомогою таблиці істинності.

Принцип двоїстості:

Для того, щоб одержати двоїсту формулу булевої алгебри, необхідно замінити в ній всі кон'юнкції на диз'юнкції, диз'юнкції на кон'юнкціїї, 0 на 1, 1 на 0 і використовувати дужки, де необхідно, щоб порядок операцій залишався попереднім.

Приклад. Знайти функцію двоїсту до функції

$$f = x_1 \vee \overline{x_2} x_3 \vee 1.$$

Розв'язання. Скористаємося правилом отримання двоїстих функцій $f^* = x_1 \wedge (\overline{x_2} \vee x_3) \wedge 0$.

Доведемо за допомогою таблиці істинності.

x_1	x_2	x_3	$\overline{x_2}$	$\overline{x_2}x_3$	$x_1 \vee \overline{x_2}x_3$	$x_1 \vee \overline{x_2}x_3 \vee 1$
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1

x_1	x_2	x_3	$\overline{x_1}$	$\overline{x_3}$	$x_2 \vee \overline{x_3}$	$\overline{x_1} \wedge (x_2 \vee \overline{x_3})$	$f^* = x_1 \wedge (\overline{x_2} \vee x_3) \wedge 0$	$\overline{f^*}$
0	0	0	1	1	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1

§3 Закони булевої алгебри

1. Комутативність кон'юнкції та диз'юнкції:

$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1;$

$x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1.$

2. Асоціативність диз'юнкції та кон'юнкції:

$(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3);$

$(x_1 \wedge x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3).$

3. Дистрибутивність кон'юнкції та диз'юнкції відносно одна одній:

$(x_1 \wedge x_2) \vee x_3 = (x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3);$

$(x_1 \vee x_2) \wedge x_3 = (x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3).$

4. Ідемпотентність кон’юнкції та диз’юнкції :

$x \vee x = x; \quad x \wedge x = x.$

5. Закон виключення третього:

$x \vee \bar{x} = 1.$

6. Закон протиріччя:

$x \wedge \bar{x} = 0.$

7. Тотожності з константами:

$x \vee 0 = x; \quad x \wedge 1 = x;$

$x \vee 1 = 1; \quad x \wedge 0 = 0.$

8. Закони елімінації:

$x \wedge (x \vee y) = x;$

$x \vee (x \wedge y) = x.$

9. Закон подвійного заперечення:

$\bar{\bar{x}} = x.$

10. Закони де Моргана:

$\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2};$

$\overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}.$

Решта функцій двох змінних логіки виражаються через базис булевої алгебри в такий спосіб:

$x_1 \to x_2 = \bar{x}_1 + x_2;$

$x_1 \leftarrow x_2 = x_1 \cdot \bar{x}_2;$

$x_1 / x_2 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2;$

$x_1 \downarrow x_2 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2;$

$x_1 \oplus x_2 = x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2;$

$x_1 \sim x_2 = x_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2.$

У справедливості цих формул легко переконатися за допомогою таблиці істинності.

Закони булевої алгебри та її властивості надають можливість виконувати перетворювання логічних виразів з метою побудови найбільш простих (компактних) формул.

Довести справедливість формул поглинання:

$$x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_1; \qquad x_1 \cdot (x_1 + x_2) = x_1.$$

Д о в е д е н н я

$$x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot 1 + x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot (1 + x_2) = x_1 \cdot 1 = x_1;$$

$$x_1 \cdot (x_1 + x_2) = x_1 \cdot x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_1.$$

Спростити:

$$((x_1 \downarrow x_2) / x_3) \to (x_1 \to x_3).$$

Р о з в я з а н н я

$$((\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2) / x_3) \to (\bar{x}_1 + x_3) = (\overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + \bar{x}_3) \to (\bar{x}_1 + x_3) =$$

$$= \overline{\overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + \bar{x}_3} + \bar{x}_1 + x_3 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 + x_3 =$$

$$= \bar{x}_1 + x_3 (1 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2) = \bar{x}_1 + x_3.$$

В і д п о в і д ь: $\bar{x}_1 + x_3$.

Приклад 1. Побудувати функції f_1, f_2, f_3 **, що реалізуються формулами:**

$$F_1 = (x_1 \cdot x_2) \vee (x_1 \cdot \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1} \cdot x_2)$$

$$F_2 = (x_1 \cdot x_2 \oplus x_1) \oplus x_2$$

$$F_3 = x_1 \cdot x_2 \to x_1$$

***Розв'язання*. Відповідно визначенню формули** F_1, F_2, F_3

реалізують функції, що задані таблицями істинності.

$$F_1 = (x_1 \cdot x_2) \vee (x_1 \cdot \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1} \cdot x_2)$$

Таблиця 6.

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_1} \cdot x_2$	$x_1 \cdot \overline{x_2}$	$x_1 \cdot x_2$	$x_1 \cdot \overline{x_2} \vee \overline{x_1} \cdot x_2$	F_1
0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	1

З таблиці 6 видно, що формула реалізує функцію $f_1(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$

2) $F_2 = ((x_1 \cdot x_2) \oplus x_1) \oplus x_2$

Таблиця 7.

x_1	x_2	$x_1 \cdot x_2$	$x_1 \cdot x_2 \oplus x_1$	F_2
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	1

Формула реалізує функцію $f_2(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$

3) $F_3 = x_1 \cdot x_2 \to x_1$

Таблиця 8.

x_1	x_2	$x_1 \cdot x_2$	F_2
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

F_3 реалізує константу $f_3 = 1$