Модуль 1.
КОМБІНАТОРНИЙ АНАЛІЗ

Тема 2.
Формула Бінома Ньютона

§ 1. Біноміальна формула

При розв'язуванні багатьох задач виникає потреба записати n-й степінь двочлена (бінома) $a + b$ в розгорнутому вигляді. Відомо, що

$(a + b)^0 = 1,$

$(a + b)^1 = a + b,$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$

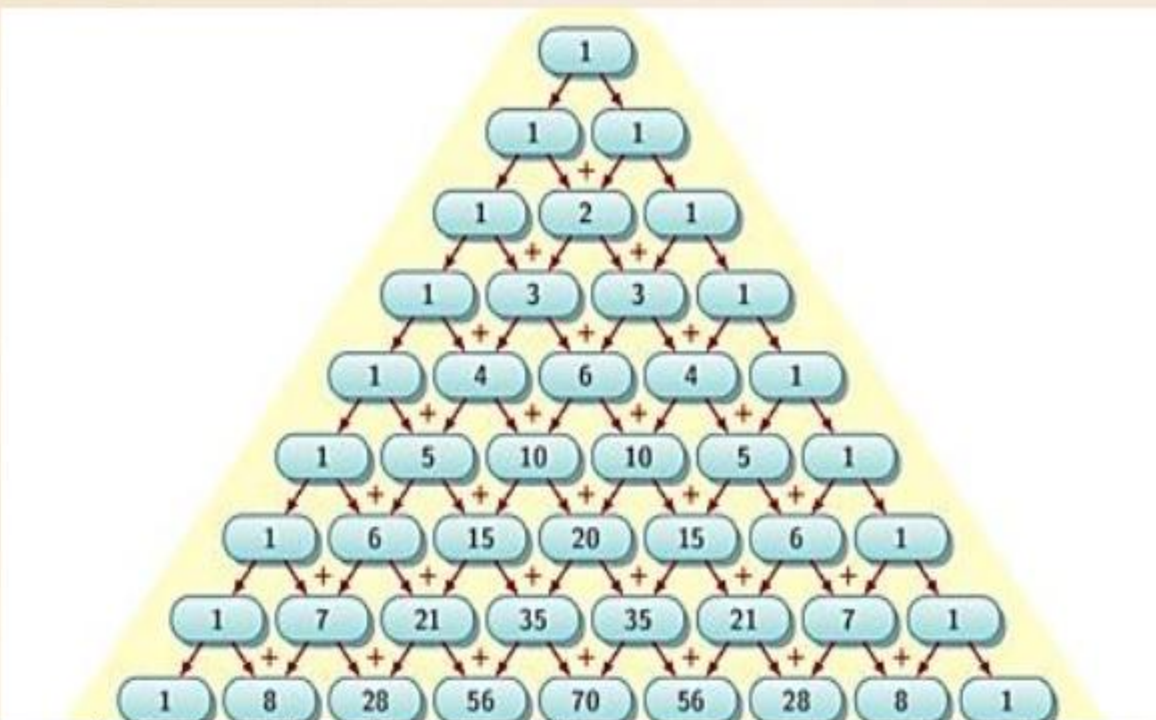
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ і т.д.

Якщо коефіцієнти розкладу $(a + b)^n$ при n=0,1,2,…виписувати у порядку зростання показника степеню числа b, то ці **коефіцієнти** утворять нескінченну трикутну таблицю.

Трикутник Паскаля

$n = 0$	1						
$n = 1$	1	1					
$n = 2$	1	2	1				
$n = 3$	1	3	3	1			
$n = 4$	1	4	6	4	1		
$n = 5$	1	5	10	10	5	1	
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1



Така таблиця в XIII ст. була відома вже арабським математикам. Вперше її властивості детально вивчив французький математик, фізик і філософ Блез Паскаль (1623-1662).

З наведеного фрагмента трикутника Паскаля можна побачити такі **закономірності**:

1. «Бічні сторони» трикутника Паскаля утворені одиницями.

2. Рядки симетричні відносно «висоти»: числа, які рівновіддалені від початку і від кінця рядка, однакові.

3. Сума двох сусідніх чисел одного рядка дорівнює числу, яке стоїть під ними в наступному рядку.

Наприклад, додавши 1 і 4 з четвертого рядка, дістанемо число 5, яке стоїть під ними в п’ятому рядку.

Інколи трикутник Паскаля записують так:

$n=0$	C_0^0				
$n=1$	C_1^0	C_1^1			
$n=2$	C_2^0	C_2^1	C_2^2		
$n=3$	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3	
$n=4$	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4

Розглянемо числа із третього рядка трикутника Паскаля:

$$C_3^0=\frac{3!}{3!\cdot 0!}=1,\quad C_3^1=\frac{3!}{2!\cdot 1!}=3,\quad C_3^2=\frac{3!}{1!\cdot 2!}=3,\quad C_3^3=\frac{3!}{0!\cdot 3!}=1.$$

Провівши обчислення, можна переконатися, що четвертий його рядок утворюють числа

$$C_4^0,\ C_4^1,\ C_4^2,\ C_4^3,\ C_4^4.$$

Виникає припущення, що n-й рядок трикутника Паскаля утворюють числа: $C_n^0,\ C_n^1,\ C_n^2,\ldots,C_n^{n-1},\ C_n^n.$

Теорема. *Формула бінома Ньютона.* *Які б не були вирази a і b і яке б не було натуральне число n, має місце рівність:*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-k} a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n$$

або $$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m$$

Для доведення формули бінома Ньютона застосуємо метод математичної індукції.

1. Базис індукції: при n=1 $\Rightarrow (a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b$

$$C_1^0 = C_1^1 = 1 \Rightarrow (a+b)^1 = a+b$$

2. Припустимо, що вірною є рівність:

$$(a+b)^n = C_n^0 a + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-k} a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n$$

3) Доведемо, що рівність вірна при $n=k+1$

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{k+1-m} b^m$$

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)\cdot(a+b)^k = (a+b)\cdot \sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{k-m} b^m =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{k+1-m} b^m + \sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{k-m} b^{m+1} =$$

В другому доданку почнемо додавання з $m = 1$, тоді в другому доданку замість m треба взяти $m-1$

$$= \sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{k+1-m} b^m + \sum_{m=1}^{k+1} C_k^{m-1} a^{k-(m-1)} b^{m-1+1} =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{k+1-m} b^m + \sum_{m=1}^{k+1} C_k^{m-1} a^{k+1-m} b^m =$$

В першій сумі окремо випишемо перший доданок, а в другій сумі – останній доданок. Тоді додавання в обох сумах буде з $m = 1$ по $m = k$ І під знаками цих сум степені у чисел a, b співпадають

$$= C_k^0 a^{k+1} + \sum_{m=1}^{k} (C_k^m + C_k^{m-1}) a^{k+1-m} b^m + C_k^k b^{k+1} =$$

$$= \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{k+1-m} b^m$$

$$C_k^0 = C_{k+1}^0 = C_k^k = C_{k+1}^{k+1} = 1$$

$$C_k^m + C_k^{m-1} = \frac{k!}{m!\,(k-m)!} + \frac{k!}{(m-1)!\,(k-(m-1))!} =$$

$$= \frac{k!}{m(m-1)!\,(k-m)!} + \frac{k!}{(m-1)!\,(k+1-m)(k-m)!} =$$

$$= \frac{k!\,(k+1-m+m)}{m!\,(k+1-m)!} = \frac{(k+1)!}{m!\,((k+1)-m)!} = C_{k+1}^m$$

Властивості формули бінома Ньютона

1) Показник степеня a послідовно зменшується на 1, а b - збільшується на 1. Внаслідок цього *сума показників степенів a і b в кожному члені розкладу стала і дорівнює показнику степені бінома n.*

2) Позначимо k-ий член розкладу через T_k.

$$T_1 = C_n^0 a^n b^0 \qquad T_2 = C_n^1 a^{n-1} b^1 = na^{n-1}b$$

$$T_3 = C_n^2 a^{n-2} b^2 \qquad T_k = C_n^{k-1} a^{n-k+1} b^{k-1}$$

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

- формула загального члена розкладу степені бінома.

3) Коефіцієнти членів, рівновіддалених від початку і кінця розкладу, рівні між собою.

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

4) Сума біноміальних коефіцієнтів дорівнює 2^n.

У правій частині ми можемо отримати суму коефіцієнтів (біноміальних) тоді, коли покладемо a=b=1, отримаємо

$$(1+1)^n = C_n^0 1^n + C_n^1 1^{n-1} 1 + C_n^2 1^{n-2} 1^2 + \ldots + C_n^k 1^{n-k} 1^k + \ldots + C_n^n 1^n$$

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n$$

5) Сума коефіцієнтів парних членів розкладу дорівнює сумі коефіцієнтів непарних членів розкладу, тобто

$$C_n^0 + C_n^2 + \ldots + C_n^{2m} + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + \ldots + C_n^{2m+1} + \ldots$$

причому кожна з цих сум дорівнює 2^{n-1}.

$$C_n^0 + C_n^2 + \ldots + C_n^{2m} + \ldots - (C_n^1 + C_n^3 + \ldots + C_n^{2m+1} + \ldots) = 0$$

$$(1-1)^n = 0^n = 0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n$$

6) $\sum_{k=0}^{n} k C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$.

7) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (m-1)^{n-k} = m^n$.

8) $C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^{k} C_n^i C_m^{k-i}$

Обчислити значення біноміальних коефіцієнтів, за допомогою трикутника **Паскаля.**

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 +$$
$$+21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

Приклад 1. Знайти восьмий член розкладу $(x\text{-}a)^{12}$.

$$(x-a)^{12} = (x+(-a))^{12}$$

$$T_8 = T_{7+1} = C_{12}^7 x^{12-7}(-a)^7 = -C_{12}^7 x^5 a^7 =$$

$$= -\frac{12!}{7!5!} x^5 a^7 = -792 x^5 a^7$$

Приклад 2. Визначити той член розкладу, який не залежить від x: $\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{x}\right)^{12}$

Запишемо k-ий член розкладу:

$$T_k = C_{12}^k(\sqrt[3]{x})^{12-k}\left(-\frac{1}{x}\right)^k = (-1)^k C_{12}^k x^{\frac{12-k}{3}-k}$$

Цей член не залежить від x тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{12-k}{3}-k=0 \;\Rightarrow\; k=3$$

Тому шуканим членом є

$$T_3 = (-1)^3 C_{12}^3 = -\frac{12!}{3!9!} = -220$$

Приклад 3. У заданому розкладі знайти член, який містить після спрощення x у сьомому степені:

$$(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})^{12}$$

$$T_{k+1}=C_n^k a^{n-k} b^k$$

$$T_{k+1}=C_{12}^k a^{12-k} b^k=C_{12}^k(\sqrt{x})^{12-k}(\sqrt[3]{x^2})^k=$$

$$=C_{12}^k(x^{\frac{1}{2}})^{12-k}(x^{\frac{2}{3}})^k=C_{12}^k x^{6-\frac{k}{2}} x^{\frac{2k}{3}}=C_{12}^k x^{6+\frac{k}{6}}$$

За умовою задачі $6+k/6=7$, отже $k=6$, а шуканий член сьомий. Він дорівнюватиме

$$T_7=T_{6+1}=C_{12}^6 x^7=\frac{12!}{6!6!}x^7=924x^7$$

§ 2. Поліноміальна формула

Формула

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_i)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_i=n} \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \ldots \cdot n_i!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_i^{n_i}$$

називається поліноміальною, сума виконується по всіх розв'язках рівняння

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_i = n$$

в цілих невід'ємних числах, $n_j \geq 0; \quad j = 1,2,\ldots,i.$

Приклад 4. Розкрити дужки у виразі $(x + y + z)^5$.

Число 5 можна представити у вигляді суми трьох доданків наступними способами:

5=5+0+0=4+1+0=3+2+0=3+1+1=2+2+1

$$5 = 5 + 0 + 0 \quad \frac{5!}{5!0!0!} = 1 \quad x^5(3 \ - x^5, y^5, z^5)$$

$$5 = 4 + 1 + 0 \quad \frac{5!}{4!1!} = 5 \quad x^4y(6)$$

$$5 = 3 + 2 + 0 \quad \frac{5!}{3!2!0!} = 10 \quad x^3y^2(6)$$

$$5 = 3 + 1 + 1 \quad \frac{5!}{3!1!1!} = 20 \quad x^3yz(3)$$

$$5 = 2 + 2 + 1 \quad \frac{5!}{2!2!1!} = 30 \quad x^2y^2z(3)$$

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^5 \quad &= x^5 + y^5 + z^5 + \\
&+5(x^4y + x^4z + y^4x + y^4z + z^4x + z^4y) + \\
&+10(x^3y^2 + x^3z^2 + y^3x^2 + y^3z^2 + z^3x^2 + z^3y^2) + \\
&+20(x^3yz + y^3xz + z^3xy) + \\
&+30(xy^2z^2 + yx^2z^2 + zx^2y^2)
\end{aligned}$$

Приклад 5. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} A_x^y + 3C_x^y = 90 \\ A_x^y - 2C_x^y = 40 \end{cases}$$

Від першого рівняння віднімемо друге і поділим на 5.

$$C_x^y = 10$$

Підставимо це значення в перше рівняння, одержимо, що

$$A_x^y = 60$$

Тоді $C_x^y = \frac{A_x^y}{P_y} \rightarrow 10 = \frac{60}{P_y} \rightarrow y! = 6 = 3! \rightarrow y = 3$

$$A_x^3 = 60 \rightarrow x(x-1)(x-2) = 60 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \rightarrow x = 5$$