1.3. Комбінаторні схеми

Комбінаторні схеми

- **РОЗМІЩЕННЯ**

Розміщення без повторення.

Розміщення з повторенням.

- **ПЕРЕСТАНОВКИ**

Перестановки без повторення.

Перестановки з повторенням.

- **КОМБІНАЦІЇ**

Комбінації без повторення.

Комбінації з повторенням.

1.3. Комбінації, розміщення і перестановки

Нехай A = {a1,...,an} – множина об’єктів, число $k \leq n$ (k може бути нулем).

Як можна вилучити з множини A рівно k об’єктів? Можна

1) вилучати ці об’єкти послідовно без повернення, один за другим k разів;

2) вилучати з поверненням, а саме, вилучити один об’єкт з множини A, повернути назад, вилучити наступний об’єкт, повернути його назад і т.д. k разів.

В цьому випадку ми отримаємо слова, літерами яких є наші об’єкти. Наприклад, так ми можемо отримати слово ЖАБА якщо вилучаємо 4 літери з поверненням з українського алфавиту;

3) вилучати без повернення, одразу всі k об’єктів, однією купою без повторів (невпорядковано);

4) вилучати невпорядкованоно k об’єктів, які можуть повторюватися. Прикладом такого вилучення буде наступна задача: нехай в магазині є бескінечна кількість лимонів, яблук і груш. Розглянемо множину A = {лимон, яблуко, груша }. Ми хочемо купити 5 фруктів. Якою кількістю способів ми зберемо в авоську 5 фруктів? Т.як порядок не важливий то ця кількість буде дорівнювати кількості способів вилучити невпорядковано 5 фруктів з A = { лимон, яблуко, груша } з повтореннями.

Розберемо їх більш докладно. Попередньо зазначимо, що ∅ – позначає порожню множину і вважається (тут n! читається n-факторіал):

0! = 1, 1! = 1, n! = n · (n − 1)! = n · (n − 1) · (n − 2) · ... · 2 · 1.

Відповідно чотирьом типам вилучень введемо позначення:
1) число k-розміщень без повторень з n об’єктів позначається A_n^k (читається ”a з n по k“);

2) число k-розміщень з повтореннями з n об’єктів позначається $\overline{A_n^k}$;
3) число k-комбінацій без повторень з n об’єктів позначається C_n^k (читається ”c з n по k“, це позначення придумав Паскаль в 17 сторіччі, але зараз в англомовному світі прийнято позначення $\binom{k}{n} = C_n^k$);
4) число k-комбінацій з повтореннями з n об’єктів позначається $\overline{C_n^k}$.

Розміщення без повторення

Нехай маємо n предметів різного виду $X=\{x_1,x_2,\ldots x_n\}$. Розглянемо розміщення з n по m такі, що вважаються відмінними одне від іншого, якщо вони відрізняються видом елементів, що в них входять, або порядком їх розміщення. Такі набори мають назву ***розміщення без повторень.***

Приклад 7. Утворити всі послідовності наборів із множини $X=\{1,2,3\}$ по два елементи:

$$\{1,2\} \qquad \{1,3\}$$
$$\{2,1\} \qquad \{3,1\}$$
$$\{2,3\} \qquad \{3,2\}$$

Поставимо задачу знайти кількість розміщень без повторень із n по m. Позначається A_n^m. Читається "розміщення з n по m".

Утворюючи такі набори на перше місце можна поставити довільний із n-предметів, на друге – лише довільний із (n-1)-предметів і т.д. На m-місце – довільний із (n-m+1)-предметів. За правилом прямого добутку отримаємо:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$(0! = 1; \quad n! = 1,2,\dots,n)$$

Приклад 8. У спортивному турнірі з шахів беруть участь десять учасників. Скількома способами можна розподілити призові місця (I, II, III) у змаганнях?

Розв'язання. Вважаючи, що всі учасники можуть зайняти призові місця однаково, отримаємо

$$A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Приклад 9. Нехай студенту необхідно скласти чотири екзамени протягом десяти днів. Скількома способами можна це зробити?

$$A_{10}^{4} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040$$

Розміщення з повтореннями

Нехай маємо n предметів різного виду $X=\{x_1,x_2,\dots x_n\}$, з яких складають набори довжиною m ($m<n$).

Наприклад, x_1,x_2, x_3; x_1,x_1, x_3; x_1,x_3, x_3 і т.д.

Такі набори називають ***розміщенням з повторенням*** із n по m.

Поставимо задачу знаходження числа всіх можливих наборів з n по m (позначаються $\overline{A_n^m}$ вважаючи різними ті, які відмінні один від одного або видом предметів, що в них входять, або порядком їх розміщення).

Характеристичні ознаки розміщень з повтореннями:
1) елементи можуть бути однаковими;
2) порядок елементів важливий.

Для розв'язання задачі розглянемо множини

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_m = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Розміщення з повторенням складуть множину

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$$

Тоді за правилом прямого добутку:

$$|X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m| = n \cdot n \cdot n \cdot \cdots n = n^m$$

Тобто число всіх розміщень з повторенням із n по m обчислюється за формулою

$$\overline{A_n^m} = n^m$$

Теорема 1.1.

$$\overline{A_n^m} = n^m$$

Доведення. Візьмемо *n* об’єктів {a1, ..., an}. Ми хочемо вибирати об’єкт з цієї множини і повертати назад і так *m* разів. Цю дію можна представити як послідовний вибір об’єктів по одному з множини

$$A_1 = \{a_1, \ldots, a_n\}; \quad A_2 = \{a_1, \ldots, a_n\}; \quad A_m = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

В силу правила добутку ми отримаємо кількість способів вибрати *m* об’єктів, що дорівнює

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{m} = n^m$$

Приклад 10. Знайти загальну кількість всіх натуральних чотиризначних чисел.

Розв'язання. Введемо множини

$$A_1 = \{1,2,\ldots,9\} \qquad A_2 = A_3 = A_4 = \{0,1,2,\ldots,9\};$$

$$|A_1| = 9 \qquad |A_2| = |A_3| = |A_4| = 10.$$

Чотиризначні числа утворять прямий добуток

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$$

в заданому порядку. За правилом прямого добутку

$$|A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4| = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000.$$

Приклад 11. Скількома способами можна розфарбувати 6 дошок в 4 кольори?

Розв'язання.

$$\overline{A_6^4} = 6^4$$

Приклад 12. Дано цифри 1;2;3;4. Скільки різних двозначних чисел можна скласти, якщо цифри в числі можуть повторюватися?

Розв'язання:

Так як цифри в числі можуть повторюватися, потрібно використовувати формулу числа розміщень з повтореннями з n елементів по k, де n=4 (множина всіх елементів), k=2 (тому що потрібно скласти двозначні числа)

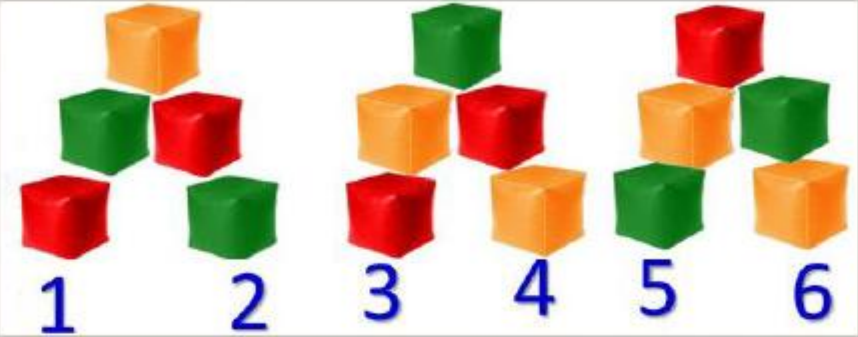
$$\overline{A_4^2} = 4^2 = 16$$

Перестановки з повтореннями і без повторень

Нехай множина $X=\{x_1,x_2,\ldots x_n\}$ містить n предметів різного виду.

Розглянемо розміщення з n елементів по n, що відмінні одне від другого лише *порядком* елементів, що в них входять. Такі розміщення називають ***перестановками***, їх число позначають P_n:

$$\boxed{P_n = A_n^n = n!}$$



Скількома різними способами можна розставити 3 рінокольорових кубики?

Перестановкою з повтореннями з n елементів називають будь-яке впорядкування n-множини, серед елементів якої є однакові. Якщо серед елементів множини M є n_1 елементів першого типу, n_2 елементів другого типу, n_k елементів k-го типу $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$, то кількість всіх перестановок такої множини з повтореннями позначують $\overline{P_n}(n_1, n_2, \ldots, n_k)$:

$$\boxed{\overline{P_n}(n_1, n_2, \ldots n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}}$$

Приклад 13. Маючи шість олівців різного кольору, малюк малює веселку з шести кольорів. Скільки різних веселок він може намалювати?

Розв'язання: Число веселок – це число перестановок із шести по шість, тому малюк може намалювати

$P_6 = 6!$ веселок.

Приклад 14. Скільки перестановок можна зробити з літер слова "Міссісіпі"?

Розв'язання. Оскільки літера "м" входить до слова 1 раз, літера "і" – 4 рази, "с" – 3 рази, "п" – 1 раз, а всіх літер у слові 9, то

$$\overline{P_9}(1,4,3,1) = \frac{9!}{1!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 1!} = 2520.$$

Комбінації з повтореннями і без повторень

Розглянемо набори з n різних елементів по m ($m<n$) в яких нас цікавить склад набору, і не цікавить порядок елементів у наборі. Такі розміщення називають ***комбінаціями***.

Тобто комбінаціями з n різних елементів по m називають всі можливі розстановки довжини m, утворені з цих елементів і відмінні одна від другої *складом*, але не порядком елементів.

Загальне число комбінацій позначають $C_n^m = \binom{n}{m}$ і читають «число комбінацій із n по m ».

$$\boxed{C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^{n-m}}$$

Теорема 1.2

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

Доведення. З вихідного набору об’єктів $\{a_1, \ldots, a_n\}$ створимо m штук комбінацій: перша комбінація – $\{a_1, \ldots, a_m\}$, і т.д., остання комбінація – $\{a_{n-m+1}, \ldots, a_n\}$.

Номер останньої комбінації за визначенням є C_n^m. Потім ми кожну з отриманих комбінацій впорядковуємо $m!$ числом способів і отримуємо розміщенииня. Отже, число розміщень – це з одноієїй сторони A_n^m, а з іншої сторони $C_n^m \cdot m!$. Тому ми отримали підтвердження нашої теореми.

Приклад 15. Студент хоче гарантовано вгадати п’ять номерів лотереї “5 із 36”. Скільки білетів він повинен купити?

Розв’язання. Очевидно, що мова йде про число комбінацій 5 із 36, а саме:

$$C_{36}^{5} = \frac{36!}{31!5!} = 376992$$

Приклад 16. У кошику лежать 8 різних яблук і 4 різні груші. Треба вибрати 3 яблука і 2 груші. Скількома способами це можна зробити?

$$C_8^3 \cdot C_4^2 = \frac{8!}{3!\,5!} \cdot \frac{4!}{2!\,2!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336$$

Нехай маємо множину з n-предметів різного виду. Число елементів кожного виду необмежене. Поставимо задачу визначити кількість наборів довжиною m, які не залежать від порядку. Такі набори називають ***комбінаціями з повторенням***, кількість яких визначають так:

$$\boxed{\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^{m}.}$$

Теорема 1.3

Доведення. З вихідного набору об'єктів $\{a_1, ..., a_n\}$ створимо m штук комбінацій: перша комбінація – $\{a_1, ..., a_m\}$, і т.д., остання комбінація – $\{a_{n-m+1}, ..., a_n\}$.

Номер останньої комбінації за визначенням є C_n^m . Потім ми кожну з отриманих комбінацій впорядковуємо $m!$ числом способів і отримуємо розміщенння. Отже, число розміщень – це з одноієїй сторони A_n^m, а з іншої сторони $C_n^m \cdot m!$. Тому ми отримал ли підтвердженіня нашої теореми.

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m$$

Доведення. Ми хочемо встановити взаємно однозначну відповідність між m-комбінаціями з повтореннями з n об'єктів і m-комбінаціями без повторень з $n + m - 1$ об'єктів.

На прикладі обсудимо спосіб доведення цієї теореми: нехай в нас є число n = 33, український алфавіт { а, б, в, ..., ю, я }, число m = 4.

Візьмемо 4-комбінацію з повтореннями з алфавіту, наприклад

{ ж, а, б, а } = {а, а, б, ж },

створимо для неї ”паспорт“ виду

$$\underbrace{1,1,0,1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,\ldots,0,}_{36=33+4-1}$$

перебираючи всі літери алфавіту, виписуючи нулі і одиниці, де 1 означає, що літера є, 0 означає перегородку між літерами, якщо літери не має – то нічого не ставимо. Зазначимо, що між ”паспортами“ і словами з повтореннями є взаємооднозначна відповідність, тому що за ”паспортом“ ми можемо встановити слово.

В загальному випадку, використовуючи множину $\{a_1, \ldots, a_n\}$ створюємо m-комбінацію з повтореннями і потім, створюємо для неї ”паспорт“ виду

$$\underbrace{\underbrace{1,\ldots,1,}_{кількість_1} ,0, \underbrace{1,\ldots,1}_{кількість_2} ,0,\ldots,0, \underbrace{1,\ldots,1,}_{кількість_n}}_{n+m-1 цифр}$$

так само, як ми це робили в прикладі.

Оскільки ми встановили взаємно однозначну відповідність між m-комбінаціями з повтореннями з n об'єктів і m-комбінаціями без повторень з $n+m-1$ об'єктів (тобто "паспортами"), отримуємо, що $\overline{C_n^m}$, що нас цікавить дорівнює кількості всіх таких "паспортів".

Якою кількістю способів ми можемо створити "паспорт", в якому m одиниць і $n-1$ нуль? Ми можемо з $n+m-1$ позицій в векторі вибрати m позицій, на які поставимо 1, на інші місця ми поставимо 0. Зробити цео можна C_{n+m-1}^m числом способів.

Приклад 17. Скількома способами четверо дітей можуть поділити між собою 80 цукерок?

Розв'язання. Поставимо у відповідність кожному розподілу цукерок комбінації з повторенням. Нехай типами елементів будуть діти – x_1, x_2, x_3, x_4, тобто $n = 4$, для яких треба скласти всі комбінації довжиною m=80 Належність у наборі будь-якого елемента відповідає належності даної цукерки відповідній дитині x_i причому порядок в такому наборі не має значення, все одно яка з цукерок дістанеться тій чи іншій дитині. За таких умов, число способів розподілу цукерок між дітьми

$$\overline{C_{80}^{4}} = C_{4+80-1}^{80} = \frac{83!}{3!80!} = 9188.$$

Приклад 18. Скількома способами можна розмістити m-прибулих гостей серед n-гостей, що вже сидять за круглим столом?

Розв'язання. Очевидно, що між n-гостями, які сидять за столом, існують m-проміжків, у яких можна розмістити m-прибулих гостей. Це можна зробити

$$\overline{C}_{n+m-1}^{m} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-m)!}$$

Приклад 19. У кондитерський відділ завезли 4 види тістечок. Скількома способами можна купити 7 тістечок?

$$\overline{C_4^7} = C_{7+4-1}^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = 120$$

Чи повторюються елементи у вибірці?

Так → **Чи враховується порядок розміщення елементів?**

- **Так** → **Чи всі елементи входять у вибірку?**
  - **Так** → **Перестановки з повтореннями**

    $$P_n(m_1, m_2, \dots, m_n) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_n!}$$

  - **Ні** → **Розміщення з повтореннями**

    $$\overline{A}_n^k = n^k$$

- **Ні** → **Комбінації з повтореннями**

  $$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

Ні → **Чи враховується порядок розміщення елементів?**

- **Так** → **Чи всі елементи входять у вибірку?**
  - **Так** → **Перестановки**

    $$P_n = n!$$

  - **Ні** → **Розміщення**

    $$A_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$$

- **Ні** → **Комбінації**

  $$C_m^n = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

Впорядковані та невпорядковані розбиття множин

Розглянемо деяку множину A, потужність якої $|A|=n$. Підрахуємо число розбиттів даної множини на m різних підмножин, таких що

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m = A; \quad A_j \cap A_i = \emptyset, i \neq j$$

$$|A_i| = n_i, \quad \sum_{i=1}^{m} n_i = n.$$

Розглянемо послідовність підмножин A_1 ,$A_2,\ldots,A_m$ як впорядковану. Тоді на перше місце підмножину A_1 можна вибрати $C_n^{n_i}$ способами, на друге місце множину A_2 – $C_{n-n_1}^{n_i}$, на останнє місце A_m можна вибрати із залишку $C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{m-1}}^{n_m}$ способами.

За правилом прямого добутку число розбиттів множини A на m-підмножин дорівнює:

$$C_n^{n_i} C_{n-n_1}^{n_i} \dots C_{n-n_1-n_2-\dots-n_{m-1}}^{n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!},$$

що співпадає з числом перестановок із повторенням.

Приклад 20. В групі з 30 студентів обирають делегата на конференцію. “За” дану кандидатуру проголосувало 20 студентів, “проти” – 6, “утрималося” – 4. Скількома способами могло бути проведено таке голосування?

Розв’язання. Розглянемо множини: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$.

$A = \{x | \text{x - студент, x} \in \overline{1,30}\};$

$A_1 = \{x | \text{x - студент, що голосує "за", x} \in \overline{1,20}\};$

$A_2 = \{x | \text{x - студент, що голосує "проти", x} \in \overline{1,6}\};$

$A_3 = \{x | \text{x - студент, що "утримався", x} \in \overline{1,4}\};$

$|A_1| = 20; \quad |A_2| = 6; \quad |A_3| = 4.$

$$C_{30}^{20} C_{10}^{6} C_4^4 = \frac{30!}{20!\ 6!\ 4!}.$$