1.2. Основні правила комбінаторики. Принцип Діріхле

Комбінаторика – це наука про те, як можна комбінувати різні об’єкти, як можна їх сполучати. Це з однієї сторони наука про те, як порахувати кількість комбінацій визначеного типу, а з іншої сторони наука про те, як знайти якусь екстремальну комбінацію, тобто комбинацію з якимись оптимальними властивостями. Комбінувати можна що завгодно, наприклад, з групи студентів факультету автоматизації і інформаційних технологій можна вибрати групу студентів, що будуть займатися інформаційними технологіями або вибрати групу, що буде займатися кібербезпекою.

Описані задачі – комбінаторні. Можна комбінувати символи деякого алфавіту, і в цьому випадку проявляється зв’язок з такими об’єктами, як ДНК послідовності і т.д.

Розглянемо два основні правила, які використовують при розв'язуванні комбінаторних задач.

Правило суми

Визначення. Якщо елементи множини A можна вибрати n способами, а елементи множини B можна вибрати m способами, то за умови, що $A \cap B = \varnothing$, загальне число вибірок становить $n + m$.

На рисунку 2.8. показано умови застосування правила суми, у випадку, коли множини не перетинаються.

Рис. 2.8. Демонстрація правила суми

Приклад 2.5. На лекції з дискретної математики присутні 20 студентів. Квитки на концерт Лари Фабіан купило 15 студентів. Скільки всього студентів відвідали лекцію й концерт за умови, що вони відбуваються одночасно?

Розв'язок. Позначимо через X множину студентів, які були присутні на лекції, а через Y – множину студентів, які відвідали концерт. Оскільки $n = |X| = 20$, $m = |Y| = 15$ і $X \cap Y = \varnothing$, то за правилом суми: $m + n = 20 + 15 = 35$.

Приклад 1. В ящику знаходиться 7 білих і 4 чорних кульки. Скількома способами можна вибрати одну кульку?

Відповідь. $7 + 4 = 11$ способами.

Приклад 2. На полиці стоять 12 різних підручників з алгебри, 6 – з геометрії та 8 з фізики. Скількома способами можна здійснити вибір одного підручника з математики?

Відповідь. $12+6=18$ способами.

Правило добутку.

Нехай є дві множини об’єктів

A = {a1, ..., an} і B = {b1, ..., bm}, тоді кількість способів обрати спочатку один об’єкт з A, а потім обрати один об’єкт з B дорівнює n · m.

Розглянемо правило добутку більш змістовно, а саме, для множин

A = {a1, ..., an} і B = {b1, ..., bm} перерахуємо всі послідовні способи вибору:

$a_1b_1, a_1b_2, \ldots a_1b_m,$

$a_2b_1, a_2b_2, \ldots a_2b_m,$

...

$a_nb_1, a_nb_2, \ldots a_nb_m.$

Безпосереднім перерахунком впевнимося, що в цьому наборі

$n \cdot m$ елементів.

Приклад 1.Порахуємо кількість автомобільних номерів. Скільки автомобільних номерів можна скласти, якщо зафіксувати номер регіону? Ми будемо розглядати саме номера виду

$(a_1, b_2, b_3, b_4, a_5, a_6)$,

де a_i – літера з набору в 12 штук, b_j – цифра з набору {0, 1, ..., 9}, i = 1, 5, 6, j = 2, 3, 4. Тоді першій компоненті a_1 відповідає множина A_1 = {A, B, C, ..., X} з потужністю $|A_1|$ = 12, компоненті b_2 відповідає множина A_2 = {0, 1, 2, ..., 9}, компоненті b_3 відповідає множина A_3 = {0, 1, 2, ..., 9}, компоненті b_4 отвечаетвідповідає множина A_4 = {0, 1, 2, ..., 9}, компоненті a_5 відповідає множина $A_5 = A_1$, компоненті a_6 відповідає множина $A_6 = A_1$. Застосовуючи правило добутку, отримаємо, кількість автомобільних номерів орівнює $12 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 12$.

Приклад 2.6. Космонавт, що працює на орбітальній станції, може зв'язатися із центром керування двома способами: за допомогою радіозв'язку і передачі повідомлення космічним човником.

У той же час працівники центру керування польотом можуть подзвонити рідним космонавта по провідному телефону, по мобільному телефону, послати їм лист поштою, послати електронний лист, подзвонити по Skype, послати sms.

Скількома способами може потрапити інформація від космонавта його рідним?

Розв'язок. $|m| = 2,\ |n| = 6$.

Використовуючи правило множення, одержуємо $m \cdot n = 2 \cdot 6 = 12$.

Приклад 3. З міста А до міста В ведуть 4 дороги, а з міста В до С ведуть 3 дороги. Скількома способами можна проїхати з міста А до міста С ?

Відповідь. $4 \cdot 3 = 12$.

Приклад 4. У шкільній їдальні є вибір з 3 перших і 5 других блюд. Тоді обід з першого і другого блюда можна обрати $3 \cdot 5 = 15$ способами.

Приклад 5. Скільки трицифрових чисел можна скласти з цифр 1; 2; 3; 4; 5, якщо в числі: 1) цифри не повторюються; 2) цифри повторюються.

Розв'язання.

1) Маємо 5 способів для сотень числа. Після того, як місце сотень заповнене (наприклад, цифрою 1), для десятків залишається 4 способи. Міркуючи далі, для одиниць - 3 способи. Отже, маємо: «5 способів, і після кожного з них — 4, і після кожного з них — 3 способи». За правилом добутку маємо $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ чисел.

2) Якщо цифри у числі повторюються, то на кожне з трьох місць є по 5 варіантів заповнення, і тоді всіх чисел буде $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Приклад 6. Скільки парних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 6; 7; 8; 9, якщо в числі цифри не повторюються?

Розв'язання.

Парне чотирицифрове число можна отримати, якщо останньою цифрою буде 6 або 8.

Чисел, у яких остання цифра 6 буде $3!=3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, чисел, у яких остання цифра 8 буде також 6.

За правилом суми всього парних чисел, що задовольняють умові, буде $6 + 6 = 12$.

Правило включень і виключень для двох множин

Визначення. Нехай A і B – скінченні множини. Визначимо, чому дорівнює $|A \cup B|$, якщо відомі потужності $|A|$ і $|B|$.

Дотримуючись визначення операції об'єднання:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Пояснення. Сума $|A| + |B|$ включає всі елементи множини A й множини B.

При цьому, загальні елементи множин A і B, а їх буде $|A \cap B|$, включаються в суму двічі. Тому для одержання суми об'єднання необхідно відняти один набір спільних елементів. В результаті одержуємо:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Правило включень і виключень для трьох множин

$$|A\cup B\cup C|=|A\cup(B\cup C)|=|A|+|B\cup C|-|A\cap(B\cup C)|=$$

Застосували правило включень і виключень для множин A і $(B\cup C)$

$$=|A|+|B|+|C|-|B\cap C|-|A\cap(B\cup C)|=$$

Застосували правило включень і виключень для множин $(B\cup C)$

$$=|A|+|B|+|C|-|B\cap C|-|(A\cap B)\cup(A\cap C)|=$$

Застосували дистрибутивний закон

$$=|A|+|B|+|C|-|B\cap C|-(|A\cap B|+|A\cap C|-|(A\cap B)\cap(A\cap C)|)=$$

Правило включень і виключень для множин $(A\cap B)$ і $(A\cap C)$

$$=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

Розкрили дужки

Правило включень і виключень у загальному вигляді

Розглянемо правило включень і виключень при застосуванні до n множин.

Нехай маємо $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_i, \ldots, A_n$ – деякі множини. Тоді формула для визначення потужності множини об'єднання даних множин має такий вигляд:

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right| =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left|A_i\right| -$$
$$- \sum_{1 \le i < j \le n} \left|A_i \cap A_j\right| +$$
$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| - \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1} \cdot \sum_{1 \le i < j < k < \ldots < l \le n} \left|A_i \cap A_j \cap \ldots A_k \cap \ldots A_l \cap A_n\right|$$

Правило підрахунку за даною формулою полягає в послідовному виконанні **операцій додавання і віднімання**, які чергуються між собою.
Звідси випливає назва: **правило включень і виключень.**

Приклад 2.7. Обчислення за правилом включень і виключень

Нехай дані множини

$$A = \{1,2,3,4,9\},\ B = \{3,4,5,6,9\} \text{ і } C = \{5,6,7,8,9\}.$$

Обчислити *1)* $|A \cup B|$ *2)* $|B \cup C|$ *3)* $|A \cup C|$ *4)* $|A \cup B \cup C|$.

Розв'язок. Попередньо обчислимо об'єднання трьох множин

$$A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

1) $A \cap B = \{3,4,9\},\ |A \cap B| = 3.$

Тому $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 5 + 5 - 3 = 7$

2) $B \cap C = \{5,6,9\},\ |B \cap C| = 3.$

Тому $|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C| = 5 + 5 - 3 = 7$

3) $A \cap C = \{9\},\ |A \cap C| = 1.$

Тому $|A \cup C| = |A| + |C| = 5 + 5 - 1 = 9$

4) $(A \cap B \cap C) = \{9\},\quad |A \cap B \cap C| = 1$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$

$|A \cup B \cup C| = 5 + 5 + 5 - 3 - 1 - 3 + 1 = 9$

Приклад 2.8. Записати правило включень і виключень для множин A, B, C і D.

Розв'язок. Скористаємося загальною формулою:

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|A_i\right| - \sum_{1 \le i < j \le n}\left|A_i \cap A_j\right| +$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n}\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| - \ldots + (-1)^{n-1} \sum_{1 \le i < j < k < \ldots < l \le n}\left|A_i \cap A_j \cap \ldots A_k \cap \ldots A_l \cap A_n\right|$$

Перепишемо дану формулу, враховуючи, що $n = 4$. В результаті одержимо:

$$\begin{aligned}
&\left|A + B + C + D\right| = \left|A\right| + \left|B\right| + \left|C\right| + \left|D\right| - \\
&-\left|A \cap B\right| - \left|A \cap C\right| - \left|A \cap D\right| - \left|B \cap C\right| - \left|B \cap D\right| + \\
&+\left|A \cap B \cap C\right| + \left|A \cap C \cap D\right| + \left|B \cap C \cap D\right| - \\
&-\left|A \cap B \cap C \cap D\right|
\end{aligned}$$

Вибір правила

або *A*, або *B*

і *A*, і *B*

Правило суми

A – *m* способами
B – *n* способами
жоден зі способів вибору A не збігається з якимось способом вибору B

↓

«або A, або B» – *m*+*n* способами

Правило добутку

A – *m* способами
B – *n* способами

↓

«A і B» – *mn* способами

Принцип Діріхле.

Нехай є n ящиків і n + 1 кролик. Якщо розсадити всіх кроликів по цим ящикам, то обов'язково знайдеться ящик, в якому не менше двох кроликів.

Приклад 2.9. Розглянемо твердження: ”Є квадрат на площині зі стороною 2. В цьому квадраті довільним чином обирають 5 точок. Тогді, завжди знайдуться 2 точки серед цих 5, відстань між якими не більше, ніж $\sqrt{2}$“. Доведемо це твердження. Див. рисунок 1. Якщо ми хочемо тут застосувати принцип Діріхле, то ми повинні вважати, що ”кролики“ - це точки, цих ”кроликів“ – п'ять, і, відповідно, ”ящиків“ - чотири. Цими ”ящиками“ є клітинки (зі стороною одиниця) на які ми розбили наш квадрат, див. рисунок. В силу принципу Діріхле хоча б 2 точки попадуть в одну клітинку. Відстань між цими точками не може перевищувати довжину діагоналі клітинки, яка дорівнює $\sqrt{2}$ в силу теореми Піфагора.

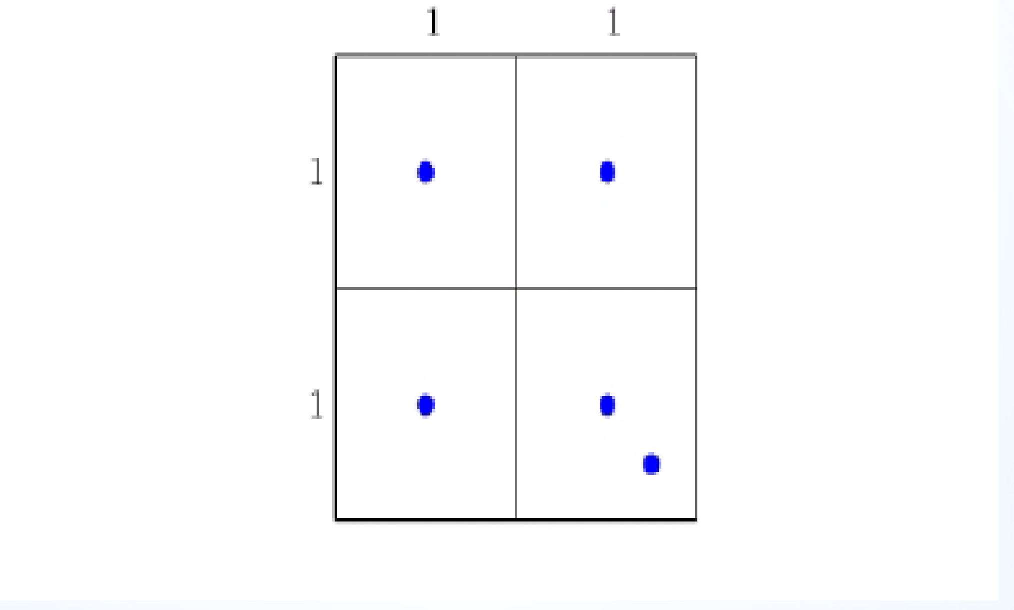

Рисунок 1. Ілюстрація принципа Діріхле в прикладі 2.9