Модуль 1. КОМБІНАТОРНИЙ АНАЛІЗ

Тема 1. Основи комбінаторики

§ 1. Проблеми комбінаторного аналізу та методи їх розв’язання.

Комбінаторика – це розділ математики, який вивчає питання вибору або розміщення елементів множини у відповідності з заданим правилом.

Комбінаторика походить від слова **combina**, що в перекладі **сполучати, з'єднувати**.

Методи розв'язування задач ***комбінаторики*** називають ***методами комбінаторного аналізу***.

Оскільки комбінаторика має справу із скінченними множинами, на природу об'єктів яких ніяких обмежень не накладають, то її часто називають ***теорією скінченних множин***.

Комбінаторика виникла у XVI столітті, коли у житті верхніх прошарків суспільства важливе місце займали азартні ігри (карти, кості, пасьянси, лотереї). Це стало рушійною силою у розвитку комбінаторики та теорії ймовірностей.

Ряд перших комбінаторних задач розв'язали такі відомі математики як Паскаль, Ферма, Ейлер, Бернуллі, Лейбніц.

Г.В. Лейбніц у 1666 році захистив дисертацію «Про комбінаторне мистецтво» і ввів термін «комбінаторика».

Комбінаторика сьогодні
Комбінаторика або комбінаторний аналіз або комбінаторна математика – це галузь математики, яка вивчає способи побудови підмножин деякої скінченної множини, причому таких, які відповідають заданим обмеженням.
Згадані підмножини часто називають комбінаторними конфігураціями або вибірками. Якщо, наприклад, враховувати порядок розміщення об’єктів, то одержимо різні комбінаторні конфігурації, як показано на рис. 2.1.

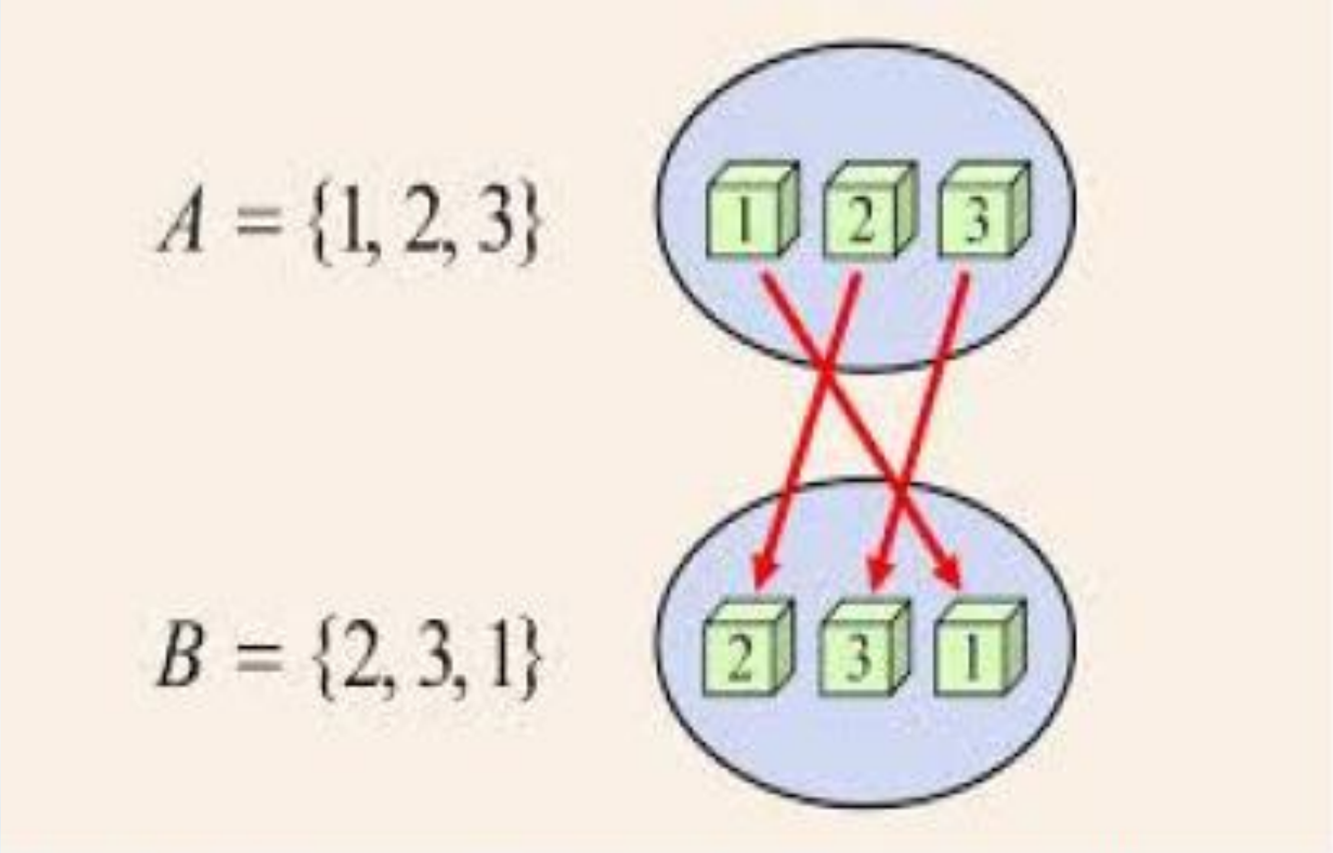


Рис. 2.1. Формування комбінаторної конфігурації

Комбінаторні методи лежать в основі розв'язку багатьох задач теорії ймовірностей і її додатків.

Комбінаторика вивчає такі види задач:

1. *Підрахунок числа комбінаторних конфігурацій.*

Приклад 2.1. При зміні порядку кольорових кульок у стовпцях одержимо скінченну кількість різних стовпців. Кожний стовпець відповідатиме одній комбінаторній конфігурації, як показано на рис. 2.2.

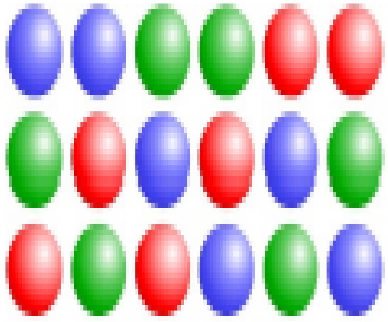


Рис. 2.2. Задача визначення кількості відмінних стовпців кульок

2. *Знаходження умов існування комбінаторної конфігурації.*

Приклад 2.2. Задача знаходження умов існування комбінаторної комбінації виникає при визначенні можливості існування певного розфарбування кубика Рубіка (рис. 2.3)

Рис. 2.3. Задача існування заданого розфарбування

3. *Розробка алгоритмів побудови комбінаторних конфігурацій.*

Приклад 2.3. Алгоритм побудови транспортних маршрутів, які відповідають заданим параметрам трафіку, дозволяє гнучко розподіляти транспортні потоки.

Рис. 2.4. Задача перерозподілу транспортних потоків

4. *Розв'язування оптимізаційних задач* (*екстремальних комбінаторних задач*).

Приклад 2.4. Перебір та порівняння варіантів вирішення задачі є одним із способів розв'язування оптимізаційної задачі. Така задача може виникнути при оптимізації WEB-сайту.

Рис. 2.5. Задача оптимізації технічного рішення

Підрахунок кількості комбінаторних конфігурацій часто зустрічається в програмних засобах. Такі задачі є предметом вивчення *рахункової комбінаторики*.

2.1.2. Основні поняття комбінаторики

У комбінаториці прийнято говорити про множину, вказуючи кількість її елементів. Наприклад, якщо є множина $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, яка складається з n елементів, то в цьому випадку її називають n-множиною A.

Визначення. Множину B називають *підмножиною* множини A і позначають $B \subset A$, якщо всі елементи множини B є також елементами множини A.

Визначення. Якщо множина C має кілька екземплярів одного і того самого елемента, то таку множину називають *мультимножиною*.

Вибірка

Визначення. Вибіркою називають довільну мультимножину, елементи якої вибирають з елементів множини A, тобто таку множину, яка, у загальному випадку, може містити кілька екземплярів одного і того самого елемента множини A, як показано на рис. 2.3.

$$\{a, b, c, e, f\}$$

$$\{a,a,b,b\} \quad \{a,c,e,e\} \quad \{b,c,f,f\}$$

Рис. 2.3. Приклади 4-вибірок з 5-множини A

Обсяг вибірки. Кількість елементів r у вибірці (таку вибірку називають також r-вибіркою) визначають як її ***обсяг***.

Інший зміст поняття «вибірка». Поняття «вибірка» використовують також для позначення **самого процесу відбору** елементів підмножини з початкової множини.

Упорядкована вибірка

Визначення. Вибірку називають *упорядкованою*, якщо порядок слідування елементів в ній заданий. Дві впорядковані вибірки, які різняться лише порядком проходження елементів, вважають різними.

Визначення. Нехай $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – множина з n елементів. Упорядкованою вибіркою обсягом r з n – множини A називають будь-яку впорядковану підмножину з r її елементів, як показано на рис. 2.4.

$$\{a,b,c,d\}$$

$$\{a,b,c\}\{b,a,c\}\{c,b,a\}\{b,c,a\}$$

Рис. 2.4. Упорядковані 3-вибірки з 4-множини

Висновок. Упорядковані вибірки відрізняються порядком слідування одних і тих самих елементів.

Неупорядкована вибірка

Якщо порядок слідування елементів не є істотним, то таку вибірку називають *неупорядкованою*. Приклад такої вибірки показаний на рис. 2.5.

$$\{a,b,c,d\}$$

$$\{a,b,c\}\{a,b,d\}\{a,c,d\}\{b,c,d\}$$

Рис. 2.5. Приклад неупорядкованої 3-вибірки з 4-множини

Висновок. Неупорядковані вибірки відрізняються елементами, а не порядком їх слідування.

Вибірки з повтореннями та без повторень

Визначення. *Вибірки з повтореннями* – це вибірки, які допускають повторення елементів. Приклад вибірки з повтореннями показаний на рис. 2.6.

$$\{a,b,c,d\}$$

$$\{a,a,b\}\{b,b,c\}\{c,c,d\}\{d,d,a\}$$

Рис. 2.6. Приклад 3-вибірок з повтореннями з 4-множини

Визначення. *Вибірки без повторень* – це вибірки, які не допускають повторення елементів. Приклад вибірки без повторень показаний на рис. 2.7.

$$\{a,b,c,d\}$$

$$\{a,b,c\}\{a,b,d\}\{a,c,b\}\{a,c,d\}$$

Рис. 2.7. Приклад 3-вибірок без повторень з 4-множини

Загальноприйняті назви вибірок

Вибірки, у яких усі елементи різні, а їх порядок у вибірці так само є суттєвим, називаються **розміщеннями без повторень**. Їх також позначатимемо $(a_{i1},\ldots,a_{ik})$.

З цього означення виділимо такі характеристичні ознаки розміщень без повторень:

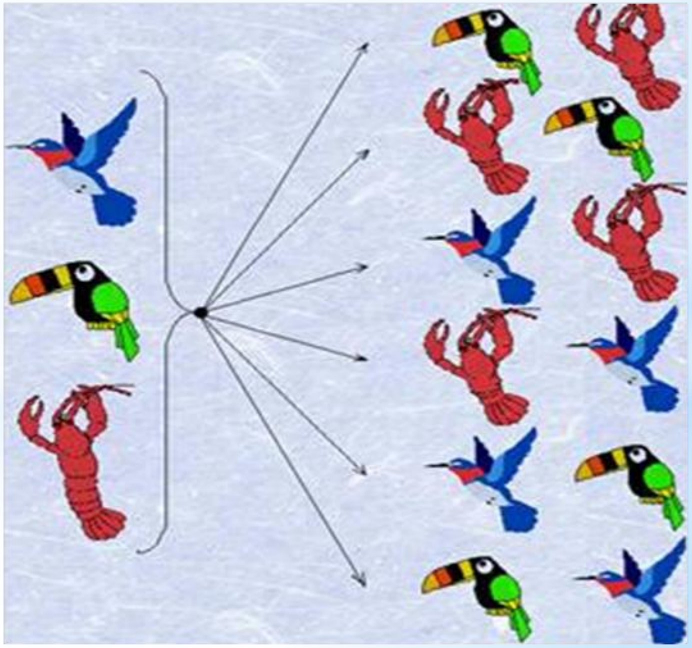
1) елементи вибірки різні;

2) порядок елементів важливий;

3) $0 \le k \le n$ **.**

Розглянемо **задачу 1:**

З трьохелементної множини можна скласти шість двохелементних вибірок. Кожна така вибірка не містить однакових елементів. Порядок елементів у вибірці є суттєвим, оскільки, наприклад, перша і друга вибірка вважаються різними, хоча складаються з однакових елементів. Отже, кожна така вибірка є розміщенням без повторень з 3-х елементів по 2.



Кількість розміщень без повторень із n елементів по *k* елементів позначають через A_n^k .

Після введення позначення, ми можемо записати, що нам треба знайти A_3^2**.** Скількома способами ми могли б обрати одного представника живої природи? Оскільки всі вони різні, то 3 різними способами (обравши або першого, або другого, або третього з них). Тому $A_3^1 = \mathbf{3}$. Після нашого вибору першого представника, залишилось 2 необраних. З цих 2-х ми обираємо когось на роль другого у вибірці. Скількома різними способами це можна зробити? Так, двома, адже, кожний з 2-и ще необраних може стати другим у вибірці. За правилом добутку кількість способів вибору двох представників дорівнює 3*2, тобто $A_3^2 = \mathbf{3 \cdot 2}$ = 6 .

Розглянемо ще одну задачу:

Задача 2.

Скількома способами можна скласти розклад занять з 5 різних уроків, якщо у класі вивчається 10 різних предметів?

Розв'язання.

Кожний розклад - це вибір 5 **різних** предметів зі списку, в якому 10 предметів. Нам **важливий** не лише набір з 5 предметів, а і **їх порядок**. Отже, кожен розклад - це впорядкована підмножина з 5 різних елементів множини з 10 елементів, тобто розміщення без повторень з 10 елементів по 5. Нам треба підрахувати кількість таких множин, тобто A_{10}^{5}.

Скількома способами ми могли б скласти розклад з одного предмету? Оскільки всі вони різні, то 10 різними способами (обравши або перший, або другий, або ..., або десятий предмет). Тому $A_{10}^{1} = 10$. Після нашого вибору першого предмету у розкладі, у списку залишилось 9 предметів. З цих 9-и ми обираємо якийсь предмет на роль другого у розкладі. Скількома різними способами це можна зробити? Так, 9-а, адже, кожний з 9-и ще не обраних предметів може стати другим за розкладом. За правилом добутку кількість способів вибору у розклад двох перших предметів дорівнює 10*9, тобто $A_{10}^{2} = 10 \cdot 9$. Аналогічно міркуючи, можемо підрахувати кількість способів вибору у розклад перших трьох і чотирьох предметів. Це $A_{10}^{3} = 10 \cdot 9 \cdot 8$ і $A_{10}^{4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ відповідно. Тоді кількість способів скласти розклад з 5 **різних** предметів буде дорівнювати $A_{10}^{5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$.

Розміщення з повтореннями

Вибірки, у яких елементи можуть бути однаковими і порядок їх розташування є суттєвим (тобто вибірки будуть різними, навіть якщо вони відрізняються тільки порядком розташування в них елементів) називаються **розміщеннями з повтореннями**. Такі вибірки позначатимемо $(\mathbf{a_{i1},...,a_{ik}})$.

З цього означення виділимо такі характеристичні ознаки розміщень з повтореннями:

1) елементи можуть бути однаковими;

2) порядок елементів важливий.

Кількість розміщень з повтореннями з n елементів по k елементів позначають через $\overline{A}_n^k$, і обчислюють за формулою $\overline{A}_n^k = n^k$.

Це випливає із узагальненого правила добутку: на першому місці може бути будь-який із n даних елементів, на другому - також будь-який із n даних елементів, ..., на *k*-му місці - також будь-який із n даних елементів.

Задача 1.

Скільки чотирилітерних "слів" можна скласти з літер "М" і "А"? Випишіть ці слова і перевірте отриманий результат.

Розв'язання.

Складемо декілька таких "слів": ММMA, MAMA, MAAA ... Бачимо, що склад вибірки змінюється, порядок елементів у вибірці істотний. Значить, це - розміщення з повтореннями з 2 літер "М" і "А" по 4:

$$\overline{A}_2^4 = \mathbf{2^4} = \mathbf{16}$$

Випишемо всі ці 16 «слів»:

ММММ, МММА, ММАМ, МАММ, АМММ, ММАА, МАМА, АММА, АМАМ, ААММ, МААМ, АМАА, ААМА, АААМ, МААА, АААА.

Відповідь. 16.

Задача 2.

Вздовж дороги розташовані 6 світлофорів, кожен з яких має 3 стани: "червоний", "жовтий", "зелений". Скільки може бути різних ситуацій на дорозі, що спричинені станами цих світлофорів?

Розв'язання.

Випишемо декілька комбінацій: ЧЧЖЗЗЧ, ЖЖЖЖЖЖ, ЗЖЖЗЧЧ... Ми бачимо, що склад вибірки змінюється і порядок елементів істотний (адже якщо, наприклад, у вибірці ЧЧЖЗЗЧ поміняти місцями Ж і З, ситуація на дорозі буде іншою). Тому застосовуємо формулу розміщень з повтореннями з 3 по 6: $\overline{A}_3^6 = \mathbf{3^6} = \mathbf{729}$.

Відповідь. 729.

2. Сполука (C_n^k без повторень, $\bar{C}_n^k$ з повтореннями)

(неупорядкована вибірка з повтореннями або без повторень).

Вибірки, у яких не враховуються порядок запису елементів і які відрізняються між собою хоча б одним елементом, називають *сполуками або комбінаціями.*

Наприклад: $\{1,2,3,4\} \Rightarrow \{1,2,3\},\{1,2,4\},\{2,3,4\}...$

$\{1,2,3,4\} \Rightarrow \{1,1,3\},\{1,1,4\},\{4,2,1\}...$

3. Перестановка (P_n без повторень, $P(k_1,...,k_m)$ з повтореннями)

(упорядкована повна вибірка без повторень та з повтореннями)

Вибірки, у які складаються з одних і тих самих елементів і які відрізняються тільки порядком їх слідування, називають *перестановками.*

Наприклад: $\{1,2,3\} \Rightarrow \{1,2,3\},\{1,3,2\},\{3,2,1\}...$

$\{1,2,3\} \Rightarrow \{1,1,3\},\{3,1,1\},\{3,3,1\}...$

<u>Сполучення без повторень</u>.

Різні невпорядковані підмножини по m елементів з даної множини, що містить n елементів, називаються сполученнями із n по m. Їх число дорівнює:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\left(n-m\right)!}$$

Зокрема, . Приклад. Скількома способами з групи в 25 чоловік можна вибрати баскетбольну команду з п'яти осіб?

Рішення . Так як з 25 осіб вибираються 5 і порядок не важливий, то число способів є число поєднань з 25 по 5, тобто:

$$C_{25}^5 = \frac{25!}{5!\left(25-5\right)!} = \frac{20! \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25}{5! \cdot 20!} = \frac{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$= \frac{7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 6 \cdot 5}{1} = 53130$$

Означення. ***Сполученнями з повтореннями*** із n елементів по k називається сполука, що містить k елементів взятих з даних n елементів серед яких є однакові.

Число всіх комбінацій з повтореннями із n елементів по k позначається $\overline{C}_n^k$ і обчислюється за формулою $\overline{C}_n^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

Задача 6. Скількома способами можна роздати десять однакових цукерок трьом дітям?

Розв'язання. Шукане число способів дорівнює $\overline{C}_3^{10} = \dfrac{13!}{10!\cdot 2!} = 66$.

Перестановки без повторень

<u>Означення.</u> ***Перестановкою без повторень*** *з n елементів називається впорядкована множина, яка складається з всіх елементів деякої заданої основної n-елементної множини.*

Число всіх перестановок без повторень з n елементів позначається P_n. Обчислюється за формулою:

$$P_n = n!$$

Рекурентна формула для обчислення числа перестановок:

$$P_n = n \cdot P_{n-1}$$

<u>Приклад</u><u>. </u>Скількома способами можна утворити всі можливі 3-значні числа з цифр 1, 2, 3 при умові, що цифри в записі числа не повторювалися?

<u>Розв'язання.</u> $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ (способами).

Перестановки з повтореннями

<u>Означення.</u> Перестановкою з повтореннями *з* n *елементів називається перестановка такої основної множини, серед* n *елементів якої є тільки* k *різних: перший елемент множини є в* n_1 *екземплярах, другий – в* n_2 *екземплярах і т. д.,* k *-й – в* n_k *екземплярах, причому* $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

Число перестановок з повтореннями з n елементів позначається $\overline{P}_n\left(n_1, n_2, \ldots, n_k\right)$. Обчислюється за формулою:

$$\overline{P}_n\left(n_1, n_2, \ldots, n_k\right) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

<u>Приклад</u>. Скільки перестановок можна зробити з букв слова “математика”?

<u>Розв’язання</u> В даному слові 10 букв: 3 букви а, 2 - м, 2 - т, і по 1 - к, и, е. Отже,

$$\overline{P_{10}}(3,2,2,1,1,1) = \frac{10!}{3!2!2!1!1!1!} = 151200$$ (перестановок).