МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

АРИФМЕТИЧНІ І ЛОГІЧНІ ОСНОВИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ

Конспект лекцій
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальностями 125 «Кібербезпека»
і 123 «Комп’ютерна інженерія»

Київ 2025

УДК 510.23:510.6
П49

Рецензент Є. В. Бородавка, д-р техн. наук, професор

Затверджено на засіданні навчально-методичної ради КНУБА, протокол № 4 від 30 січня 2025 року.

Полтораченко Н. І.
П49 Арифметичні і логічні основи обчислювальної техніки : конспект лекцій / Н. І. Полтораченко, С. А. Теренчук. – Київ : КНУБА, 2025. – 72 с.

Розглянуто арифметичні та логічні основи обчислювальної техніки відповідно до програми першого курсу. Наведено як теоретичний матеріал, так і практичні задачі, що ілюструють наукову базу.

Призначено здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями 125 «Кібербезпека» і 123 «Комп’ютерна інженерія».

УДК 510.23:510.6

Зміст

Вступ

Метою викладання дисципліни «Арифметичні і логічні основи обчислювальної техніки» є набуття знань з основ указаного курсу, формування в майбутніх фахівців як теоретичної бази, так і навичок застосування законів, принципів і методів математичної логіки в інженерній практиці, під час вирішення технічних задач.

Арифметичні і логічні основи обчислювальної техніки є дисципліною, яка спирається на курс математики в шкільній програмі та широко використовується в теорії алгоритмів, системах штучного інтелекту, математичній кібернетики тощо.

За результатами вивчення дисципліни студент має *знати*:

- позиційні системи числення, алгоритми переведення чисел з однієї системи числення в іншу, машинні коди арифметичних операцій;
- принципи побудови формальних теорій;
- властивості та закони операцій булевої алгебри;
- правила побудови нормальних форм логічних функцій;
- властивості та закони операцій алгебри Жегалкіна;
- типи булевих функцій і поняття повноти їх системи;
- основні закони та правила побудови формул числення висловлювань;
- аксіоми алгебри висловлювань і правила виведення в алгебрі висловлювань;

уміти:

- переводитти числа з однієї системи числення в іншу, користуватися прямим, додатковим, оберненим і модефікованим машинними кодами;
- виконувати операції над функціями з використанням апарата булевої алгебри;
- будувати нормальні форми логічних функцій;
- будувати поліноми Жегалкіна;
- застосовувати методи мінімізації булевих функцій;
- будувати формули алгебри висловлювань;
- доводити теореми в алгебрі висловлювань.

Лекція 1. Логіка систем числення

Системи числення

Системою числення називають систему відображення будь-яких чисел за допомогою обмеженої кількості знаків.

Позиційною системою числення називають систему, в якій кількісне значення кожної цифри залежить від її місця у відображенні числа. У такій системі числення будь-яке число, що має вигляд

$$A = \overline{a_1 a_2 \dots a_\iota \dots a_k},$$

може бути представлене у вигляді суми

$$A = a_1 \cdot q^{t-1} + a_2 \cdot q^{t-2} + \dots + a_i \cdot q^{t-i} + \dots + a_k \cdot q^{t-k},$$

де k – кількість розрядів у відображенні числа; a_i – цифра i-го розряду; q – основа системи числення; t – фіксоване число, яке визначає положення коми; цифра a_i має задовільняти умові $0 \le a_i \le q - 1$.

У двійковій системі числення $q = 2$, а для зображення чисел використовують символи 0 та 1. У вісімковій системі числення $q = 8$, а для зображення чисел використовують символи 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. У десятковій системі числення $q = 10$, а для зображення чисел використовують символи 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. У шістнадцятковій системі числення $q = 16$, а для зображення чисел використовують символи 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, де *A* = 10, *B* = 11, *C* = 12, *D* = 13, *E* = 14, *F* = 15.

Арифметичні та логічні операції в комп’ютерах базуються на двійковій системі числення, оскільки вона може бути реалізована через двопозиційні електронні елементи.

Переведення чисел у системах числення

Для переведення цілих чисел з однієї системи числення в іншу найчастіше використовують такий алгоритм:

1) розділити число, яке переводять, на основу p нової системи за правилами початкової системи;
2) перевірити, чи не дорівнює нулю частка; якщо не дорівнює, то вважати її новим числои і повернутися до до кроку 1;

3) якщо частка дорівнює нулю, то виписати всі отриманні залишки від ділення в порядку, зворотному їх отриманню;
4) отриманий результат і є записом числа в системі числення з основою p.

Приклад 1.1. Перевести число 1648 десяткової системи числення у: а) двійкову; б) вісімкову; в) шістнадцяткову. Зробити перевірку.

Розв'язання.

а)

```
1648|2
1648 824|2
   0|824 412|2
       0|412 206|2
           0|206 103|2
               0|102 51|2
                    1|50 25|2
                       1|24 12|2
                          1|12 6|2
                              0|6 3|2
                                0|2 1|2
                                  1|0 0
                                    1
```

Отже, $1648_{(10)} = 11001110000_{(2)}$.

Виконаємо перевірку:

$$1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + \\ + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 1024 + 512 + 64 + 32 + 16 = 1648.$$

б)

```
1648|8
1648 206|8
   0|200 25|8
        6|24 3|8
           1|0 0
             3
```

Отже, $1648_{(10)} = 3160_{(8)}$.

Виконаємо перевірку:

$$3 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8^1 + 0 \cdot 8^0 = 1536 + 64 + 48 = 1648.$$

в)

```
1648|16
1648 103|16
   0  96  6|16
       7|0  0
          6|
```

Отже, $1648_{(10)} = 670_{(16)}$.

Виконаємо перевірку:

$$6 \cdot 16^2 + 7 \cdot 16^1 + 0 \cdot 16^0 = 1536 + 112 = 1648.$$

Для переведення дробових чисел (ціла частина дорівнює нулю) використовують такий алгоритм:

1) помножити дробове число на основу системи числення, у яку його переводять; виділити цілу частину;
2) якщо точність результату потребує подальших перетворень, то виділяємо дробову частину й переходимо до пункту 1;
3) якщо точність результату задовільняє, то виділені цілі частини добутків і є цифрами дробової частини числа.

Приклад 1.2. Перевести число 0,64 десяткової системи числення у: а) двійкову; б) вісімкову; в) шістнадцяткову. Зробити перевірку.

Розв'язання. Розв'яжемо задачу з точністю до чотирьох знаків після коми.

а)	0,64	0,28	0,56	0,12
	2	2	2	2
	1,28	0,56	1,12	0,24

Отже, $0{,}64_{\ (10)} \approx 0{,}1010_{(2)}$.

Виконаємо перевірку:

$$1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 0{,}5 + 0{,}125 = 0{,}625.$$

б)

0,64	0,12	0,96	0,68
8	8	8	8
5,12	0,96	7,68	5,44

Отже, $0{,}64_{\ (10)} \approx 0{,}5075_{(8)}$.

Виконаємо перевірку:

$$5 \cdot 8^{-1} + 0 \cdot 8^{-2} + 7 \cdot 8^{-3} + 5 \cdot 8^{-4} = 0{,}625 + 0{,}0137 + 0{,}0012 = 0{,}6399.$$

в)

0,64	0,24	0,84	0,44
16	16	16	16
10,24	3,84	13,44	7,04

Отже, $0{,}64_{\ (10)} \approx 0, A3D7_{(16)}$.

Виконаємо перевірку:

$$10 \cdot 16^{-1} + 3 \cdot 16^{-2} + 13 \cdot 16^{-3} + 7 \cdot 8^{-4}$$
$$= 0{,}625 + 0{,}0117 + 0{,}0032 + 0{,}0001 = 0{,}64.$$

Щоб перевести числа, які містять і цілу, і дробову частини, треба виконати окремо переведення цих частин, а отримані результати з'єднати.

Приклад 1.3. Перевести число 1648,64 десяткової системи числення у:

а) двійкову; б) вісімкову; в) шістнадцяткову.

Розв'язання. Скористаємося результатами з попередніх прикладів:

а) $1648{,}64_{(10)} \approx 11001110000{,}1010_{(2)}$;

б) $1648{,}64_{(10)} \approx 3160{,}5075_{(8)}$;

в) $1648{,}64_{(10)} \approx 670, A3D7_{(16)}$.

Щоб перевести число з вісімкової системи числення у двійкову і навпаки, можна скористатися такими відповідностями (тріадами):

0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Приклад 1.4. Перевести числа 3168 та 324,61 вісімкової системи числення у двійкову.

Розв'язання.

$3160_{(8)} = 011\ 001\ 110\ 000_{(2)}$;

$324{,}61_{(8)} = 011\ 010\ 100{,}110\ 001_{(2)}$.

Приклад 1.5. Перевести число 101100011,011101 двійкової системи числення у вісімкову.

Розв'язання.

$101\ 100\ 011{,}011\ 101_{(2)} = 543{,}35_{(8)}$ (відраховуємо тріади від коми вліво та вправо).

Щоб перевести число із шістнадцяткової системи числення у двійкову і навпаки, можна скористатися такими відповідностями (тетрадами):

0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111

Приклад 1.6. Перевести числа 670 та *A*24,*B*3 шістнадцяткової системи числення у двійкову.

Розв'язання.

$670_{(16)} = 0110\ 0111\ 0\ 000_{(2)}$;

$\mathrm{A}24,\mathrm{B}3_{(16)} = 1010\ 0010\ 0100{,}1011\ 0011_{(2)}$.

Приклад 1.7. Перевести число 101100011,011101 двійкової системи числення у шістнадцяткову.

Розв'язання.

$1\,0110\,0011{,}0111\,01_{(2)} = 163{,}74_{(16)}$ (відраховуємо тетради від коми вліво та вправо).

Запитання для самоперевірки

1. Опишіть двійкову систему числення.
2. Опишіть вісімкову систему числення.
3. Опишіть шістнадцяткову систему числення.
4. Наведіть алгоритм переводу цілих і дробових чисел із десяткової системи числення у двійкову та навпаки.
5. Наведіть алгоритм переводу цілих і дробових чисел із десяткової системи числення у вісімкову та навпаки.
6. Наведіть алгоритм переводу цілих і дробових чисел із десяткової системи числення у шістнадцяткову та навпаки.

Лекція 2. Логіка арифметичних операцій над двійковими числами

Розглянемо операції додавання, віднімання, ділення та множення.

У разі *додавання* двійкових чисел мають виконуватися такі правила:

0 + 0 = 0; 0 + 1 = 1; 1 + 0 = 1; 1 + 1 = 10.

В останньому випадку виникає перенос 1 до сусіднього старшого розряду.

Приклад 2.1. Додати числа $11100011_{(2)}$ та $10101100_{(2)}$.

Розв'язання.

$$\begin{array}{r} 11 \\ 11100011 \\ \underline{10101100} \\ 110001111 \end{array}$$

Зробимо перевірку через десяткову систему:

$$11100011_{(2)} = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^1 + 2^0 = 128 + 64 + 32 + 2 + 1 = 227;$$

$$10101100_{(2)} = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^2 = 128 + 32 + 8 + 4 = 172;$$

$$110001111_{(2)} = 2^8 + 2^7 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 =$$
$$= 256 + 128 + 8 + 4 + 2 + 1 = 399;$$
$$227 + 172 = 399.$$

У разі *віднімання* двійкових чисел мають виконуватися такі правила:

0 – 0 = 0; 1 – 1 = 0; 1 – 0 = 1; 10 – 1 = 1.

Якщо в разі порозрядного віднімання потрібно відняти від нуля одиницю, то береться позичка в сусідньому розряді й операція виконується за правилом 10 – 1 = 1.

Приклад 2.2. Відняти числа $11100011_{(2)}$ та $10101100_{(2)}$.

Розв'язання.

$$\begin{array}{r} 11100011 \\ \underline{10101100} \\ 00110111 \end{array}$$

Зробимо перевірку через десяткову систему:

$$11100011_{(2)} = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^1 + 2^0 = 128 + 64 + 32 + 2 + 1 = 227;$$
$$10101100_{(2)} = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^2 = 128 + 32 + 8 + 4 = 172;$$
$$00110111_{(2)} = 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 32 + 16 + 4 + 2 + 1 = 55;$$
$$227 - 172 = 55.$$

Множення двох двійкових чисел виконується за аналогією з множенням десяткових чисел. Щоб врахувати вагу кожної цифри множника, проміжний результат зсувається або вліво, якщо множення відбувається, починаючи з молодшого розряду, або вправо, якщо множення відбувається, починаючи із старшого розряду множника.

Приклад 2.3. Знайти добуток чисел $11100011_{(2)}$ та $10101100_{(2)}$.

Розв'язання.

$$\begin{array}{l} 11100011 \\ \underline{10101100} \\ \quad\quad 11100011 \\ \quad\quad\quad\quad 11100011 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad 11100011 \\ \quad\quad \underline{\quad\quad\quad\quad\quad 11100011} \\ \quad\quad 1001100010000100 \end{array}$$

Зробимо перевірку через десяткову систему:

$$11100011_{(2)} = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^1 + 2^0 = 128 + 64 + 32 + 2 + 1 = 227;$$

$$10101100_{(2)} = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^2 = 128 + 32 + 8 + 4 = 172;$$

$$1001100010000100_{(2)} = 2^{15} + 2^{12} + 2^{11} + 2^7 + 2^2$$
$$= 32768 + 4096 + 2048 + 128 + 4 = 39044;$$

$$227 \cdot 172 = 39044.$$

Якщо множники мають цілу та дробову частини, то операція множення відбувається як добуток цілих чисел із подальшим виділенням дробових розрядів за аналогією множення десяткових дробових чисел.

Приклад 2.4. Знайти добуток чисел $1110{,}0011_{(2)}$ та $1010{,}11_{(2)}$.

Розв'язання.

$$\begin{array}{r} 1110{,}0011 \\ \underline{\quad 1010{,}11} \\ 11100011 \\ 11100011 \\ 11100011 \\ \underline{\qquad 11100011} \\ 10011000{,}100001 \end{array}$$

Ділення двох двійкових чисел відбувається аналогічно діленню десяткових чисел. Ділення розпочинається з того, що від цілого діленого зліва відділяється мінімально можлива група розрядів, яка дорівнює або перевищує дільник на один розряд. Якщо виділення такої групи можливе, то в старший розряд частки записують 1, якщо ні, то тоді записують 0. Далі записану 1 домножуємо на дільник і цей дільник підписуємо під виділеною частиною. Після віднімання приписуємо справа наступний розряд діленого та повторюємо описаний процес. У випадку запису нуля зразу приписуємо справа наступний розряд діленого та повторюємо описаний процес. Після закінчення розрядів діленого справа приписуються на кожному циклі нулі.

Приклад 2.5. Розділити число $11100011_{(2)}$ на число $10101100_{(2)}$.

Розв'язання. Результат шукаємо з точністю до чотирьох знаків.

$$\begin{array}{l|l} 11100011 & 10101100 \\ \cline{2-2} 10101100 & 1{,}0101 \end{array}$$
$$\begin{array}{l} \quad 11011100 \\ \quad \underline{10101100} \\ \qquad 11000000 \\ \qquad \underline{10101100} \end{array}$$

10100

Зробимо перевірку через десяткову систему:

$$11100011_{(2)} = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^1 + 2^0 = 128 + 64 + 32 + 2 + 1 = 227;$$

$$10101100_{(2)} = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^2 = 128 + 32 + 8 + 4 = 172;$$

$$1{,}0101_{(2)} = 2^0 + 2^{-2} + 2^{-4} = 1 + 0{,}25 + 0{,}0625 = 1{,}3125;$$

$$227 \div 172 \approx 1{,}3198.$$

Запитання для самоперевірки

1. Опишіть процес додавання двійкових чисел.
2. Опишіть процес віднімання двійкових чисел.
3. Опишіть процес множення двійкових чисел.
4. Опишіть процес ділення двійкових чисел.

Лекція 3. Логіка представлення двійкових чисел у прямому, додатковому, оберненому та модифікованому кодах

У комп’ютерах арифметичні операції кодуються спеціальними машинними кодами, а саме – прямим, додатковим, оберненим і модифікованим, у яких операцію віднімання замінюють на операцію додавання, що спрощує арифметико-логічний пристрій комп’ютера.

Прямий, додатковий та обернений коди

Прямий код представляє двійкові числа через їх абсолютні значення з кодом знака «+» (0) або «–» (1) за формулою:

$$A_{\text{п}} = \begin{cases} A, \text{якщо } A \geq 0, \\ 1 - A, \text{якщо } A \leq 0, \end{cases}$$

де $A = \pm 0,\overline{a_1 a_2 \dots a_\iota \dots a_k}$.

Приклад 3.1. Записати двійкові числа $A_1 = +0{,}10101$ та $A_2 = -0{,}10101$ у прямому коді.

Розв’язання. За наведеною формулою $A_{1\text{п}} = 0{,}10101$, а $A_{2\text{п}} = 1 - (-0{,}10101) = 1{,}10101$.

З наведеної формули випливає, що нуль у прямому коді може бути як додатним, так і від'ємним.

Додатковий код представляє двійкові числа за формулою:

$$A_{\text{д}} = \begin{cases} A, \text{якщо } A \geq 0, \\ 10 + A, \text{якщо } A < 0, \end{cases}$$

де $A = \pm 0, \overline{a_1 a_2 \dots a_\iota \dots a_k}$.

Приклад 3.2. Записати двійкові числа $A_1 = +0{,}10101$ та $A_2 = -0{,}10101$ у додатковому коді.

Розв'язання. За наведеною формулою $A_{1\text{д}} = 0{,}10101$, а $A_{2\text{д}} = 10 + (-0{,}10101) = 1{,}01011$. Щоб перевести від'ємне число в додатковий код, на практиці можна в розряді знаку записати «1», а в усіх інших розрядах нулі замінити на одиниці, одиниці – на нулі та до молодшого розряду додати одиницю.

З наведеної формули випливає, що нуль у оберненому коді може бути тільки додатнім.

Обернений код представляє двійкові числа за формулою:

$$A_{\text{о}} = \begin{cases} A, \text{якщо } A \geq 0, \\ 10 + A - \dfrac{1}{10^k}, \text{якщо } A \leq 0, \end{cases}$$

де $A = \pm 0, \overline{a_1 a_2 \dots a_\iota \dots a_k}$.

Приклад 3.3. Записати двійкові числа $A_1 = +0{,}10101$ та $A_2 = -0{,}10101$ в оберненому коді.

Розв'язання. За наведеною формулою $A_{1о} = 0{,}10101$, а $A_{2о} = 10 + (-0{,}10101) - 0{,}00001 = 1{,}01011$. Щоб перевести від'ємне число в обернений код, на практиці можна в розряді знаку записати «1», а в усіх інших розрядах нулі замінити на одиниці, одиниці – на нулі.

В оберненому коді відображення нуля не є однозначним.

Модифіковані коди

Модифіковані коди використовують для виявлення переповнення розрядної сітки, що може статися в разі додавання двійкових чисел. У модифікованих кодах під знак відводиться два розряди, а саме знаку «+» ставлять у відповідність два нулі, а знаку «–» – дві одиниці.

Додавання чисел у модифікованому додатковому коді з фіксованою комою відбувається за правилами двійкової арифметики. Одиниця переносу, що виникає у старшому знаковому розряді суми, відкидається. Знаковим розрядом числа є другий зліва від коми розряд, а перший зліва від коми використовується для аналізу переповнення розрядної сітки.

Приклад 3.4. Додати двійкові числа в модифікованому додатковому коді:

а) $A_1 = +0{,}1011$ та $A_2 = +0{,}0011$;

б) $A_1 = +0{,}1011$ та $A_2 = -0{,}0011$;

в) $A_1 = -0{,}1011$ та $A_2 = +0{,}0011$;

г) $A_1 = -0{,}1011$ та $A_2 = -0{,}0011$.

Розв'язання.

а) $A_{1д}^{м} = 00{,}1011$ та $A_{2д}^{м} = 00{,}0011$;

$$\begin{array}{r} 00{,}1011 \\ \underline{00{,}0011} \\ 00{,}1110 \end{array}$$

$(A_1 + A_2)_{д}^{м} = 00{,}1110$;

б) $A_{1д}^{м} = 00{,}1011$ та $A_{2д}^{м} = 11{,}1101$;

$$\begin{array}{r} 00{,}1011 \\ \underline{11{,}1101} \\ 00{,}1000 \end{array}$$

$(A_1 + A_2)_{д}^{м} = 00{,}1000$; одиниця переносу із старшого знакового розряду не враховується;

в) $A_{1д}^{м} = 11{,}0101$ та $A_{2д}^{м} = 00{,}0011$;

$$\begin{array}{r} 11{,}0101 \\ \underline{00{,}0011} \\ 11{,}1000 \end{array}$$

$(A_1 + A_2)_{д}^{м} = 11{,}1000$;

г) $A_{1д}^{м} = 11{,}0101$ та $A_{2д}^{м} = 11{,}1101$;

$$\begin{array}{r} 11{,}0101 \\ \underline{11{,}1101} \\ 11{,}0010 \end{array}$$

$(A_1 + A_2)_{д}^{м} = 11{,}1110$; одиниця переносу із старшого знакового розряду не враховується.

Додавання чисел у модифікованому оберненому коді з фіксованою комою виконується так, як і в додатковому коді. Але одиницю переносу, що виникає у старшому знаковому розряді суми, потрібно додати до молодшого розряду суми.

Приклад 3.5. Додати двійкові числа в модифікованому оберненому коді:

а) $A_1 = +0{,}1011$ та $A_2 = +0{,}0011$;

б) $A_1 = +0{,}1011$ та $A_2 = -0{,}0011$;

в) $A_1 = -0{,}1011$ та $A_2 = +0{,}0011$;

г) $A_1 = -0{,}1011$ та $A_2 = -0{,}0011$.

Розв'язання.

а) $A_{1\text{о}}^{\text{м}} = 00{,}1011$ та $A_{2\text{о}}^{\text{м}} = 00{,}0011$;

$$\begin{array}{r} 00{,}1011 \\ \underline{00{,}0011} \\ 00{,}1110 \end{array}$$

$(A_1 + A_2)_{\text{о}}^{\text{м}} = 00{,}1110$;

б) $A_{1\text{о}}^{\text{м}} = 00{,}1011$ та $A_{2\text{о}}^{\text{м}} = 11{,}1100$;

$$\begin{array}{r} 00{,}1011 \\ \underline{11{,}1100} \\ 100{,}0111 \\ \underline{+1} \\ 00{,}1000 \end{array}$$

$(A_1 + A_2)_{\text{о}}^{\text{м}} = 00{,}1000$; циклічний перенос;

в) $A_{1\text{о}}^{\text{м}} = 11{,}0100$ та $A_{2\text{о}}^{\text{м}} = 00{,}0011$;

$$\begin{array}{r} 11{,}0100 \\ \underline{00{,}0011} \\ 11{,}0111 \end{array}$$

$(A_1 + A_2)_{\text{о}}^{\text{м}} = 11{,}1000$;

г) $A_{1\text{д}}^{\text{м}} = 11{,}0100$ та $A_{2\text{д}}^{\text{м}} = 11{,}1100$;

$$\begin{array}{r} 11{,}0100 \\ \underline{11{,}1100} \\ 111{,}0000 \\ \underline{+1} \\ 11{,}0001 \end{array}$$

$(A_1 + A_2)_{\text{д}}^{\text{м}} = 11{,}1110$; циклічний перенос.

Додавання двійкових чисел із плаваючою комою відбувається у три етапи: 1) вирівнювання порядків чисел; 2) додавання мантис; 3) нормалізація отриманого результату.

Приклад 3.6. Додати двійкові числа $A_1 = +0{,}10110 \cdot 10^{110}$ та $A_2 = -0{,}00110 \cdot 10^{101}$.

Розв'язання. Оскільки порядок A_1 на одиницю більший за порядок A_2, то рухаємо мантису A_2 вправо на один розряд, змінюючі порядок $A_2 = -0{,}00011 \cdot 10^{110}$. Далі працюємо з мантисами в модифікованому додатковому коді:

$$\begin{array}{c} 00{,}10110 \\ \underline{11{,}11101} \\ 00{,}10011 \end{array}$$

Оскільки $A_1 + A_2 = 0{,}10011 \cdot 10^{110}$, то результат не поторебує нормалізації.

Запитання для самоперевірки

1. Опишіть прямий, додатковий та обернений коди.
2. Яка різниця між додатковим і оберненим кодами?
3. З якою метою використовується модифікований код?
4. Опишіть процес додавання в модифікованому додатковому коді з фіксованою комою.
5. Опишіть процес додавання в модифікованому оберненому коді з фіксованою комою.
6. Опишіть процес додавання двійкових чисел із плаваючою комою.

Лекція 4. Основні засади математичної логіки. Поняття висловлювання

Основна проблема математичної логіки

Кожна формально-логічна теорія складається із *синтаксису* (правила побудови речень) та *семантики* (найчастіше ці речення приймають значення істинне та хибне).

Що стосується синтаксису, то вимоги до нього не викликають труднощів. Головне, щоб він був ефективним, тобто правила синтаксису допускали побудову всіх можливих речень за допомогою деякого алгоритму та перевірку речень на допустимість.

На відміну від синтаксису, семантика зазвичай є складною. Найчастіше вона пов'язана з нескінченними множинами. У цьому випадку неможливо говорити про алгоритми семантичних правил. Звідси випливає головна задача математичної логіки – створити таку синтаксичну систему, яка б породжувала всі семантично істинні речення (і тільки їх).

Принцип побудови формальних теорій

У загальному вигляді формальна теорія (числення) містить такі складові:

1) *алфавіт* теорії – набір основних символів;
2) *множина формул* – правильно побудовані вирази, які утворюють мову теорії;
3) *аксіоми* теорії – підмножина формул;
4) *правила виводу* теорії – причинно-наслідкові відношення (на відміну від булевої алгебри, у якій закладено ідею еквівалентності).

Правило виводу $R(F_1, F_2, \ldots, F_m, G)$ – це відношення (операція) на множині формул. Формулу G називають безпосередньо вивідною з формул $F_1, F_2, \ldots, F_m$ та інколи записують:

$$\frac{F_1, F_2, \ldots, F_m}{G}.$$

Формули $F_1, F_2, \ldots, F_m$ називають *припущеннями, гіпотезами,* а формулу G – *висновком, наслідком.*

Виведенням (виводом) формули B з формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називають таку послідовність формул $F_1, F_2, \ldots, F_m$, що $F_m = B$, а будь-яка формула $F_i (i = 1, \ldots, m)$ є:

1) або аксіомою;
2) або однією з початкових формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$;
3) або безпосередньо вивідною з формул $F_1, F_2, \ldots, F_{i-1}$ (або будь-якої їх підмножини) за одним із правил виводу.

Якщо існує виведення формули B з формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то кажуть, що B є *вивідною* з $A_1, A_2, \ldots, A_n$ та позначають: $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$. Формули $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називають *посилками, або гіпотезами*.

Теоремою називається формула B, для доведення якої використовуються як початкові формули тільки аксіоми. Позначається цей факт як $\vdash B$.

Означення висловлювання

Просте (елементарне) висловлювання (висловлення) – це просте твердження, тобто розповідне речення, щодо змісту якого доречно ставити питання про його правильність або неправильність. Правильні висловлювання називатимемо *істинними*, а неправильні – *хибними.* Елементарне висловлювання відносять до основних математичних понять та ще називають *атомами*.

Приклади висловлювань:

1) 1 – просте число;
2) 4 – просте число;
3) усі прості числа – натуральні;
4) усі натуральні числа – цілі;
5) усі дійсні числа – раціональні;
6) усі ірраціональні числа – дійсні.

Третє, четверте і шосте висловлювання є істинними, а перше, друге та п'яте – хибними.

Водночас речення «Учитесь, читайте, і чужому навчайтесь, й свого не цурайтесь» (Т. Г. Шевченко) не є висловлюванням, оскільки не є розповідним реченням.

У роботі з висловлюваннями виходитимемо з двох основних законів двозначної логіки:

1) кожне висловлювання є істинним або хибним (*закон виключення третього*);
2) жодне висловлювання не є одночасно істинним та хибним (*закон виключення суперечності*).

Елементарні висловлювання позначатимемо малими латинськими літерами $a, b, c, \ldots$ (можливо, з індексами), *змінні висловлювання* – малими латинськими літерами $x, y, z, \ldots$ (можливо, з індексами). Змінні висловлювання ще називають *пропозиційними змінними.*

Запитання для самоперевірки

1. У чому полягає основна проблема математичної логіки?
2. Наведіть основні складові частини побудови формальних теорій.
3. Як розуміємо правила виводу у формальній теорії? Охарактеризуйте процес виведення формули.
4. Що в математичній логіці називається теоремою?
5. Наведіть означення висловлювання.
6. Наведіть основні закони двозначної логіки, що використовуються в роботі з висловлюваннями.
7. Як позначаються елементарні висловлювання та пропозиційні висловлювання?

Лекція 5. Логічні операції над висловлюваннями. Алфавіт числення висловлювань

Основні логічні операції

Двозначна логіка має справу з такими об'єктами, які приймають одне з двох можливих значень (істинне або хибне твердження, висока або низька напруга, наявність або відсутність заданої ознаки в об'єкта). Об'єкти, які можуть приймати значення із скінченної множини, що містить понад два значення, називають многозначними. Вони або зводяться до двозначних, або обслуговуються апаратом многозначної логіки.

Прикладом двозначної логіки є *булева алгебра*, яка включає нульарні операції 0 та 1 (булеві змінні приймають тільки два значення), унарну операцію заперечення та бінарні операції диз'юнкції та кон'юнкції. Розглянемо ці операції за допомогою таблиць істинності.

Заперечення (логічний зв'язок «не», інверсія) означає заперечення висловлювання, проговорюється «не x» та позначається $\bar{x}$ або $\neg x$.

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Заперечення висловлювання x є істинним, коли x хибне, і хибним, коли x є істинним.

Диз'юнкція (логічний зв'язок «або») означає складне висловлювання, що містить два висловлювання x_1 та x_2, проговорюється «x_1 або x_2» та позначається $x_1 \vee x_2$.

x_1		$x_1 \vee x_2$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

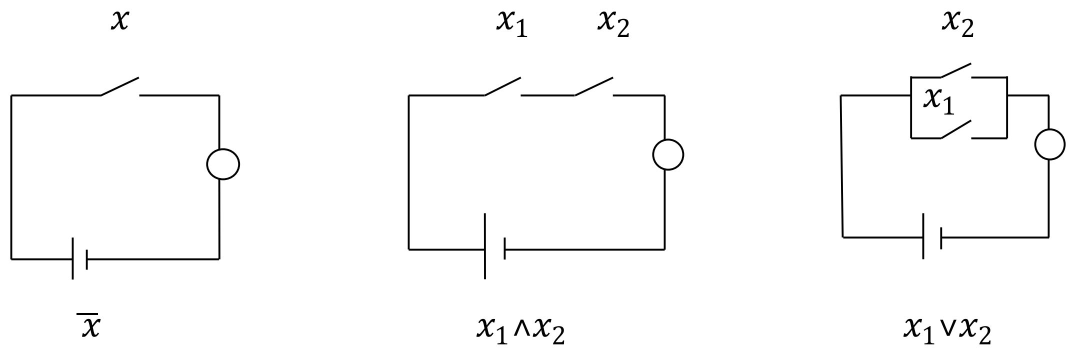
Диз'юнкція висловлювань x_1 та x_2 є істинною, коли хоча б одне з висловлювань x_1 та x_2 є істинним, і хибною, коли обидва висловлювання є хибними.

Кон'юнкція (логічний зв'язок «і») означає складне висловлювання, що містить два висловлювання x_1 та x_2, проговорюється «x_1 і x_2» та позначається $x_1 \wedge x_2$.

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Кон'юнкція висловлювань x_1 та x_2 є хибною, коли хоча б одне з висловлювань x_1 та x_2 є хибним, та істинною, коли обидва висловлювання є істинними.

Інтерпретація логічних операцій на прикладі електричних схем наведена нижче на рисунку:



Введемо операції імплікації та еквіваленції.

Імплікація означає складне висловлювання, що містить два висловлювання x_1 та x_2, проговорюється «з x_1 слідує x_2» та позначається $x_1 \rightarrow x_2$.

x_1	x_2	$x_1 \rightarrow x_2$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

Імплікація висловлювань x_1 та x_2 є хибною, коли з істинного висловлювання x_1 випливає хибне висловлювання x_2, та істинною, коли висловлювання x_1 є хибним або з істинного висловлювання x_1 випливає істинне висловлювання x_2.

Еквіваленція означає складне висловлювання, що містить два висловлювання x_1 та x_2, проговорюється «x_1 еквівалентне x_2» та позначається $x_1 \leftrightarrow x_2$.

x_1	x_2	$x_1 \leftrightarrow x_2$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Еквіваленція висловлювань x_1 та x_2 є хибною, коли одне з висловлювань є хибним, а інше – істинним, та істинною, коли обидва висловлювання є істинними або хибними.

Дві операції вважаються рівносильними, якщо за будь-яких значень змінних вони приймають однакові значення. Факт рівносильності фіксується позначкою «=». Рівносильність можна перевірити за таблицями основних операцій (таблицями істинності).

Властивості операцій

1. Комутативність: $x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x.$
2. Асоціативність: $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z.$
3. Дистрибутивність кон'юнкції $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,
   дистрибутивність диз'юнкції $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

4. Властивість констант: $x \vee 0 = x$(логічне додавання до нуля),

$x \wedge 1 = x$ (логічне множення на 1),

$x \wedge 0 = 0$ (логічне множення на 0),

$x \vee 1 = 1$ (логічне додавання до одиниці).

5. Властивість заперечення: $x \vee \bar{x} = 1$ (закон виключення третього),

$x \wedge \bar{x} = 0$ (закон протиріччя),

$\bar{\bar{x}} = x$ (закон подвійного заперечення).

Перевіримо дистрибутивність кон'юнкції шляхом застосування таблиць істинності:

x	y	z	$y \vee z$	$x \wedge y$	$x \wedge z$	$x \wedge (y \vee z)$	$(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Оскільки останні два стовпці збігаються, то властивість дистрибутивності кон'юнкції доведено.

Перевіримо дистрибутивність диз'юнкції шляхом застосування таблиць істинності:

x	y	z	$y \wedge z$	$x \vee y$	$x \vee z$	$x \vee (y \wedge z)$	$(x \vee y) \wedge (x \vee z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Оскільки останні два стовпці збігаються, то властивість дистрибутивності диз'юнкції доведено.

Наведені властивості є аксіомами булевої алгебри. Усі властивості пропонується перевірити шляхом застосування таблиць істинності.

Тотожні перетворення

Наведені властивості дають змогу отримати ряд інших важливих законів і тотожностей без застосування таблиць істинності.

Закони ідемпотентності: $x \vee x = x \wedge x = x$.

Доведення: 1) $x \vee x = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{констант}\end{matrix}\right| = (x \vee x) \wedge 1 = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{заперечення}\end{matrix}\right| =$

$$= (x \vee x) \wedge (x \vee \bar{x}) = |\text{дистрибутивність}| = x \vee (x \wedge \bar{x}) = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{заперечення}\end{matrix}\right| =$$

$$= x \vee 0 = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{констант}\end{matrix}\right| = x;$$

2) $x \wedge x = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{констант}\end{matrix}\right| = (x \wedge x) \vee 0 = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{заперечення}\end{matrix}\right| =$

$$= (x \wedge x) \vee (x \wedge \bar{x}) = |\text{дистрибутивність}| = x \wedge (x \vee \bar{x}) = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{заперечення}\end{matrix}\right| =$$

$$= x \wedge 1 = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{констант}\end{matrix}\right| = x.$$

Зміст цих законів полягає у тому, що повторна дія над об'єктом не змінює результат.

Закони поглинання: $x \vee (x \wedge y) = x \wedge (x \vee y) = x$.

Доведення: 1) $x \vee (x \wedge y) = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{констант}\end{matrix}\right| =$

$$= (x \wedge 1) \vee (x \wedge y) = |\text{дистрибутивність}| = x \wedge (1 \vee y) = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{констант}\end{matrix}\right| =$$

$$= x \wedge 1 = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{констант}\end{matrix}\right| = x;$$

4) $x\wedge(x\vee y) = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{констант}\end{matrix}\right| = (x\vee 0)\wedge(x\vee y) = |\text{дистрибутивність}| =$

$= x\vee(0\wedge y) = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{констант}\end{matrix}\right| = x\vee 0 = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{констант}\end{matrix}\right| = x.$

Закони де Моргана: $\overline{x\vee y} = \bar{x}\wedge\bar{y}$, $\overline{x\wedge y} = \bar{x}\vee\bar{y}$.

Доведення. На базі властивості заперечення рівність $\overline{x\vee y}$ та $\bar{x}\wedge\bar{y}$ має означати, що $(x\vee y)\vee(\bar{x}\wedge\bar{y}) = 1$ та $(x\vee y)\wedge(\bar{x}\wedge\bar{y}) = 0$. Дійсно,

$(x\vee y)\vee(\bar{x}\wedge\bar{y}) = |\text{дистрибутивність}| = \big((x\vee y)\vee\bar{x}\big)\wedge\big((x\vee y)\vee\bar{y}\big) =$

$$= \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{асоціативності}\end{matrix}\right| = \big((x\vee\bar{x})\vee y\big)\wedge(x\vee(y\vee\bar{y})) = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{заперечення}\end{matrix}\right| =$$

$$= (1\vee y)\wedge(x\vee 1) = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{констант}\end{matrix}\right| = 1\wedge 1 = 1,$$

а також

$(x\vee y)\wedge(\bar{x}\wedge\bar{y}) = |\text{дистрибутивність}| = \big(x\wedge(\bar{x}\wedge\bar{y})\big)\vee\big(y\wedge(\bar{x}\wedge\bar{y})\big) =$

$$= \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{асоціативності}\end{matrix}\right| = \big((x\wedge\bar{x})\wedge\bar{y}\big)\vee\big((y\wedge\bar{y})\wedge\bar{x}\big) = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{заперечення}\end{matrix}\right| =$$

$$= (0\wedge\bar{y})\vee(0\wedge\bar{x}) = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{констант}\end{matrix}\right| = 0\vee 0 = 0.$$

Як наслідок, співвідношення $\overline{x\vee y} = \bar{x}\wedge\bar{y}$ доведено.

Аналогічно, на базі властивості заперечення рівність $\overline{x\wedge y}$ та $\bar{x}\vee\bar{y}$ має означати, що

$(x\wedge y)\vee(\bar{x}\vee\bar{y}) = 1$ та $(x\wedge y)\wedge(\bar{x}\vee\bar{y}) = 0$. Дійсно,

$$(x\wedge y)\vee(\bar{x}\vee\bar{y}) = |\text{дистрибутивність}| = \big(x\vee(\bar{x}\vee\bar{y})\big)\wedge\big(y\vee(\bar{x}\vee\bar{y})\big) =$$

$$= \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{асоціативності}\end{matrix}\right| = \big((x\vee\bar{x})\vee\bar{y}\big)\wedge(\bar{x}\vee(y\vee\bar{y})) = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{заперечення}\end{matrix}\right| =$$

$$= (1\vee\bar{y})\wedge(\bar{x}\vee 1) = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{констант}\end{matrix}\right| = 1\wedge 1 = 1,$$

а також

$$(x\wedge y)\wedge(\bar{x}\vee\bar{y}) = |\text{дистрибутивність}| = \big((x\wedge y)\wedge\bar{x}\big)\vee\big((x\wedge y)\wedge\bar{y}\big) =$$

$$= \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{асоціативності}\end{matrix}\right| = \big((x\wedge\bar{x})\wedge y\big)\vee\big((y\wedge\bar{y})\wedge x\big) = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{заперечення}\end{matrix}\right| =$$

$$= (0\wedge y)\vee(0\wedge x) = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{констант}\end{matrix}\right| = 0\vee 0 = 0.$$

Як наслідок, співвідношення $\overline{x\wedge y} = \bar{x}\vee\bar{y}$ доведено.

Формули де Моргана можна використовувати і для випадку більшої кількості змінних:

$$x_1\vee x_2\vee \ldots \vee x_n = \overline{\overline{x_1}\wedge\overline{x_2}\wedge \ldots \wedge\overline{x_n}},$$
$$x_1\wedge x_2\wedge \ldots \wedge x_n = \overline{\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\vee \ldots \vee\overline{x_n}}.$$

Усі закони пропонується перевірити шляхом застосування таблиць істинності.

Операції диз'юнкції та кон'юнкції підкоряються законам комутативності й асоціативності, тому, якщо змінні зв'язані лише цими операціями, то їх можна виконувати в будь-якому порядку. Наприклад, $(x_1\vee x_2)\vee(x_3\vee x_4)\vee x_5$ можна замінити на $x_1\vee x_2\vee x_3\vee x_4\vee x_5$.

Наведені операції мають такий пріоритет їх виконання:

1) вираз в дужках;
2) заперечення $\neg$;
3) кон'юнкція $\wedge$;
4) диз'юнкція $\vee$;
5) імплікація $\rightarrow$;
6) еквіваленція $\leftrightarrow$.

Допускається явна відсутність операції кон'юнкції. Наприклад, $x\wedge\bar{x}$ можна замінити на $x\bar{x}$.

Алфавіт числення висловлювань

Алфавіт найпоширенішої формальної *мови* алгебри висловлювань складається з таких символів:

1) символи елементарних висловлювань і пропозиційних змінних: $a, b, c, \ldots$ і $x, y, z, \ldots$(можливо, з індексами);
2) символи операцій: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow, \sim$;
3) допоміжні символи – круглі дужки.

Наведемо вирази, що відповідають символам операцій:

1) $\wedge$ – і, але, а, хоч, незважаючи на…;

2) $\vee$ – або, чи, хоч одне з них…;

3) $\neg$ – не, неправильно, що…;

4) $\rightarrow$ – якщо…, то…; випливає…;

5) $\sim$ – …тоді й тільки тоді, коли…; …якщо й тільки якщо…; …еквівалентне (рівносильне)…

Приклад 5.1. Якщо вивчити математичну логіку, то якість підготовки випускника підвищиться. За покращення підготовки випускника його шанси на ринку праці збільшуються. Математична логіка була вивчена. Як наслідок, шанси випускника на ринку праці підвищилися. Побудувати формулу цього висловлювання.

Розв'язування. Введемо позначки елементарних висловлювань: a – випускник вивчив математичну логіку, b – якість підготовки випускника підвищилась, c – шанси випускника на ринку праці збільшуються. Тоді $a \rightarrow b$ відповідає фраза «Якщо вивчити математичну логіку, то якість підготовки випускника підвищиться», $b \rightarrow c$ відповідає фраза «За покращення підготовки випускника його шанси на ринку праці збільшуються», кон'юнкції $(a \rightarrow b)(b \rightarrow c)a$ відповідає фрагмент висловлювання «Якщо вивчити математичну логіку, то якість підготовки випускника підвищиться. За покращення підготовки випускника його шанси на ринку праці збільшуються. Математична логіка була вивчена», а все висловлювання матиме вигляд:

$$(a \rightarrow b)(b \rightarrow c)a \rightarrow c.$$

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть основні ознаки двозначної логіки.
2. Наведіть основні операції булевої алгебри.
3. Наведіть таблицю істинності операції заперечення.
4. Наведіть таблицю істинності операції диз'юнкції.
5. Наведіть таблицю істинності операції кон'юнкції.
6. Наведіть таблицю істинності операції імплікації.
7. Наведіть таблицю істинності операції еквіваленції.
8. Наведіть властивості операцій булевої алгебри. Побудуйте таблиці істинності для кожної з них.
9. Доведіть закони ідемпотентності.
10. Доведіть закони поглинання.

11. Доведіть закони де Моргана.

12. Наведіть пріоритет виконання операцій булевої алгебри.

13. Наведіть складові частини алфавіту мови алгебри висловлювань.

14. Наведіть вирази, що відповідають символам операцій булевої алгебри.

Лекція 6. Формули алгебри висловлювань. Тавтології

Логічні функції як відображення

Особливістю логічних функцій є той факт, що вони можуть приймати значення в скінченних множинах. Якщо область значень містить k різних елементів, то вона називається k-значною функцією.

Логічні функції можуть залежати від однієї, двох або взагалі будь-якої кількості змінних x_1, x_2, ..., x_n. На відміну від самої функції, аргументи можуть приймати значення як із скінченних, так і з нескінечних множин.

Логічну функцію можна розглядати як композицію

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \to Y,$$

де $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n, Y = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ – область значень.

Якщо аргументи приймають значення з тієї ж множини, що й сама функція, то її називають *однорідною*. У цьому випадку $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = Y$.

Областю визначення однорідної функції $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ слугує множина наборів $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що називаються словами, де кожний з аргументів $x_1, x_2, \dots, x_n$ замінюється буквами k-ічного алфавіту $\{0,1, \dots, k-1\}$. Кількість n букв у слові визначає його довжину. Ще такі слова називають кортежами, якщо $k = 2$, то матимемо справу з двійковими кортежами.

Кількість можливих слів довжиною n в k-ічному алфавіті дорівнює k^n (основний принцип комбінаторики). Оскільки кожному такому слову є можливість поставити у відповідність одне з k значень множини Y, то загальна кількість однорідних функцій від n змінних виражається числом k^{k^n}.

Якщо буквами алфавіту слугують числа від 0 до $k-1$, то кожне слово $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ розглядається як запис n-розрядного числа в позиційній системі числення з основою k, тобто $x_1k^{n-1} + x_2k^{n-2} + \ldots + x_nk^0 = q$. Числа $q = 0,1,\ldots,k^{n-1}$ слугують номерами слів.

Приклад. Тризначний алфавіт $\{0,1,2\}$ зі словами довжини 4 складається зі слів 0000, 0001, 0002, 0010, 0011, 0012, ... , 2221, 2222, які відповідають десятковим числам від 0 до $80 = 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$. Поставивши у відповідність кожному такому числу одну з букв алфавіту $\{0,1,2\}$, отримаємо функцію чотирьох змінних, при цьому кількість функцій обчислюється виразом 3^{81}.

Табличне зображення функцій

Таблиця містить k^n стовбців (кількість букв у слові) та k^{k^n} рядків (кількість функцій). Наприклад, для $k = 3$ та $n = 2$ таблиця матиме вигляд ($k^n = 3^2 = 9, k^{k^n} = 3^9 = 19683$):

x_1	0 0 0 1 1 1 2 2 2
x_2	0 1 2 0 1 2 0 1 2
y_0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
y_1	0 0 0 0 0 0 0 0 1
y_2	0 0 0 0 0 0 0 0 2
...	...
y_{2361}	0 1 0 0 1 2 2 0 1
...	...
y_{19682}	2 2 2 2 2 2 2 2 2

Булеві функції однієї змінної ($k = 2, n = 1, k^n = 2, k^{k^n} = 4$):

x	0	1	y	Назва функції
y_0	0	0	0	Константа нуля
y_1	0	1	x	Змінна
y_2	1	0	$\bar{x}$	Заперечення
y_3	1	1	1	Константа одиниці

Булеві функції двох змінних ($k = 2, n = 2, k^n = 4, k^{k^n} = 16$):

x_1 x_2	0 0 1 1 0 1 0 1	Позначка	Назва функції	Читання
y_0	0 0 0 0	0	Константа нуля (завжди хибно)	Тотожний 0
y_1	0 0 0 1	$x_1\, x_2$; $x_1 \wedge x_2$; $x_1 \& x_2$; $x_1 \cap x_2$	Кон'юнкція (добуток, перетин, логічне «і»)	x_1 і x_2
y_2	0 0 1 0	$x_1 \leftarrow x_2$	Заперечення імплікації	x_1, але не x_2
y_3	0 0 1 1	x_1	Повторення першого аргументу	Як x_1
y_4	0 1 0 0	$x_2 \leftarrow x_1$	Заперечення оберненої імплікації	Не x_1, але x_2
y_5	0 1 0 1	x_2	Повторення другого аргументу	Як x_2
y_6	0 1 1 0	$x_1 + x_2$; $x_1 \oplus x_2$	Сума за модулем 2 (антиеквівалентність)	x_1 не як x_2 (або x_1 або x_2)
y_7	0 1 1 1	$x_1 \vee x_2$; $x_1 \cup x_2$	Диз'юнкція (добуток, об'єднання, логічне «або»)	x_1 або x_2
y_8	1 0 0 0	$x_1 \downarrow x_2$; $\overline{x_1 \vee x_2}$	Стрілка Пірса; заперечення диз'юнкції	Ні x_1, ні x_2
y_9	1 0 0 1	$x_1 \leftrightarrow x_2$	Еквіваленція (рівнозначність)	x_1 як x_2
y_{10}	1 0 1 0	$\overline{x_2}$; $\neg x_2$	Заперечення другого аргументу	Не x_2
y_{11}	1 0 1 1	$x_2 \rightarrow x_1$	Обернена імплікації	Якщо x_2, то x_1
y_{12}	1 1 0 0	$\overline{x_1}$; $\neg x_1$	Заперечення першого аргументу	Не x_1
y_{13}	1 1 0 1	$x_1 \rightarrow x_2$	Імплікація	Якщо x_1, то x_2
y_{14}	1 1 1 0	$x_1 \mid x_2$; $\overline{x_1 \wedge x_2}$	Штрих Шеффера (заперечення кон'юнкції)	Не x_1 або не x_2
y_{15}	1 1 1 1	1	Константа одиниці (завжди істино)	Тотожна 1

Залежність між булевими функціями

Шість із наведених функцій (константи $y_0 = 0$, $y_{15} = 1$, повторення $y_3 = x_1$, $y_5 = x_2$, заперечення $y_{10} = \overline{x_2}$, $y_{12} = \overline{x_1}$) є константами або функціями одного аргументу. Ще дві $y_4 = x_2 \leftarrow x_1$ та $y_{11} = x_2 \rightarrow x_1$ (заперечення оберненої імплікації, обернена імплікації) відрізняються від відповідних $y_2 = x_1 \leftarrow x_2$ та $y_{13} = x_1 \rightarrow x_2$ (заперечення імплікації, імплікація) лише порядком розташування аргументів, тому не є самостійними. Як наслідок, із 16 булевих функцій двох змінних тільки вісім є оригінальними ($y_1, y_2, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{13}, y_{14}$).

З таблиць видно, що між функціями існує залежність $y_i = \overline{y_{15-i}}\ (i = 0, 1, \dots, 15)$ або навпаки. Тому для однієї змінної виконується залежність $x = \bar{\bar{x}}$, а для двох змінних –

$$x_1\, x_2 = \overline{x_1 |\, x_2}, (y_1, \overline{y_{14}}),$$
$$x_1 \leftarrow x_2 = \overline{x_1 \rightarrow x_2}, (y_2, \overline{y_{13}}),$$
$$x_1 \oplus\ x_2 = \overline{x_1 \leftrightarrow x_2}, (y_6, \overline{y_9}),$$
$$x_1 \vee x_2 = \overline{x_1 \downarrow x_2}, (y_7, \overline{y_8}\,)$$

або навпаки.

Із цих залежностей випливає, що будь-яка функція двох змінних виражається в аналітичній формі через сукупність шести функцій, що містить заперечення $\bar{x}$ і будь-яку функцію з кожної пари $\{y_0, y_{15}\}$, $\{y_1, y_{14}\}$, $\{y_2, y_{13}\}$, $\{y_6, y_9\}$, $\{y_7, y_8\}$. Наприклад, такою сукупністю можуть слугувати функції: константа 0, заперечення $\bar{x}$, кон'юнкція $x_1\, x_2$, диз'юнкція $x_1 \vee x_2$, еквіваленція $x_1 \leftrightarrow x_2$, імплікація $x_1 \rightarrow x_2$.

Побудована сукупність є надлишковою, оскільки еквіваленція та імплікація виражаються через інші функції: $x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$; $x_1 \leftrightarrow x_2 = (x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee x_2) = x_1 x_2 \vee \overline{x_1}\, \overline{x_2}$ (а ще $x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1}\, x_2 \vee \overline{x_2} x_1$). Це можна показати, побудувавши таблицю відповідності:

x_1 x_2	0 0 1 1 0 1 0 1	
$\overline{x_1}$ $\overline{x_2}$ $\overline{x_1} \vee x_2$	1 1 0 0 1 0 1 0 1 1 0 1	 $x_1 \rightarrow x_2$

$x_1 \vee \overline{x_2}$	1 0 1 1	
$(x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee x_2)$	1 0 0 1	$x_1 \leftrightarrow x_2$
$\overline{x_1}\, x_2$	0 1 0 0	
$\overline{x_2} x_1$	0 0 1 0	
$\overline{x_1}\, x_2 \vee \overline{x_2} x_1$	0 1 1 0	$x_1 \oplus x_2$

Таким чином, склад елементарних функцій зменшується до чотирьох: константа 0, заперечення $\bar{x}$, кон'юнкція $x_1\, x_2$, диз'юнкція $x_1 \vee x_2$. Цей склад дуже зручний і часто використовується на практиці. Але і він може бути зменшений за законами де Моргана та подвійного заперечення:

$x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}}$; $x_1\, x_2 = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}}$. Тобто булеві функції виражаються через заперечення і кон'юнкцію або через заперечення і диз'юнкцію. До того ж для запису будь-якої булевої функції достатньо однієї з двох елементарних функцій – стрілка Пірса або штрих Шеффера: $\bar{x} = x \downarrow x = x|x$; $x_1\, x_2 = (x_1|x_2)|(x_1|x_2)$; $x_1 \vee x_2 = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2)$. Перевіримо за таблицею відповідності:

x	0 1
$\bar{x}$	1 0
$x \downarrow x$	1 0
$x\|x$	1 0

x_1	0 0 1 1	
x_2	0 1 0 1	
$x_1\, x_2$	0 0 0 1	
$x_1\|x_2$	1 1 1 0	
$(x_1\|x_2)\|(x_1\|x_2)$	0 0 0 1	$x_1\, x_2$
$x_1 \vee x_2$	0 1 1 1	
$x_1 \downarrow x_2$	1 0 0 0	
$(x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2)$	0 1 1 1	$x_1 \vee x_2$

Розглянемо деякі важливі властивості функцій.

Для функції суми за модулем 2 мають місце закон комутативності

$$x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1,$$

закон асоціативності

$$x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3,$$

та закон дистрибутивності відносно кон'юнкції

$$x_1 \wedge (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \wedge x_2) \oplus (x_1 \wedge x_3).$$

Для функцій штрих Шеффера та стрілка Пірса виконується закон комутативності

$$x_1 | x_2 = x_2 | x_1,$$

Функції штрих Шеффера та стрілка Пірса пов'язані між собою співвідношеннями, які є аналогічними формулам де Моргана:

$$x_1 | x_2 = \overline{\overline{x_1} \downarrow \overline{x_2}},$$
$$x_1 \downarrow x_2 = \overline{\overline{x_1} | \overline{x_2}}.$$

Булеві функції багатьох змінних

За допомогою суперпозиції функцій можна отримати більш складні функції від будь-якої кількості змінних. Наприклад, $(x_1 \vee x_2)(x_2 \to \overline{x_3})$:

x_1 x_2 x_3	0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1
$x_1 \vee x_2$ $\overline{x_3}$ $x_2 \to \overline{x_3}$ $(x_1 \vee x_2)(x_2 \to \overline{x_3})$	0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 0

Формули алгебри висловлювань

Формули алгебри висловлювань будуються за такими правилами:

1) усі елементарні висловлювання та пропозиційні змінні є формулами;

2) якщо A та B – формули, то вирази $(A \wedge B), (A \vee B), (\neg A), (A \to B)$ – також формули;

3) інших формул, ніж побудовані за правилами 1) та 2), немає.

У математичній логіці формули позначають великими готичними літерами, але для зручності використовуватимемо великі латинські літери.

В імплікації $p \to q$ p називають *антецедентом* або *посилкою*, а q – *консеквентом* або *висновком.*

Тавтологія

Тавтологією називається формула алгебри висловлювань, функція істинності (таблиця істинності) якої тотожно дорівнює 1. Їх ще називають *тотожно істинними* формулами або *законами* алгебри висловлювань.

Тавтології в логіці висловлювань грають засадничу роль. Деякі приклади тавтологій:

1) $(a \vee (\neg a))$ (*закон виключення третього*);
2) $\left(\neg\left(a \wedge (\neg a)\right)\right)$ (*закон виключення суперечності*);
3) $(a \to a)$ (*закон тотожності*);
4) $a \to (b \to a)$ (*додавання антецедента* або *verum ex quodlibet* – істина з нічого);
5) $\neg a \to (a \to b)$ (*ex falso quodlibet* – з хиби що завгодно);
6) $(a \to b)a \to b$ (*закон відокремлення* або *modus ponens*);
7) $(a \to b)\neg b \to \neg a$ (*modus tollens*; використовується в разі доведення від супротивного);
8) $(a \to b)(b \to c) \to (a \to c)$ (*закон силогізму*);
9) $(a \to b) \to (\neg a \to \neg b)$ (*закон контрапозиції*).

Позначка того, що формула A є тавтології: $\vDash A$.

Суперечністю називається формула алгебри висловлювань, функція істинності (таблиця істинності) якої тотожно дорівнює 0.

Формулу, яка не є ні тавтологією, ні суперечністю, називають *нейтральною*.

Формулу, яка не є суперечністю, називають *виконуваною.*

Приклад 6.1. Довести, що висловлювання $(a \to b)(b \to c)a \to c$ є тавтологією.

Розв'язування. Наведена формула була побудована в попередньому прикладі 5.1 і відповідає висловлюванню «Якщо вивчити математичну логіку, то якість підготовки випускника підвищиться. За покращення підготовки випускника його шанси на ринку праці збільшуються. Математична логіка була вивчена. Як наслідок, шанси випускника на ринку праці підвищилися».

Побудуємо таблицю істинності:

$a\ b\ c$	$a \to b$	$b \to c$	$(a \to b)(b \to c)a$	$(a \to b)(b \to c)a \to c$
0 0 0	1	1	0	1
0 0 1	1	1	0	1
0 1 0	1	0	0	1
0 1 1	1	1	0	1
1 0 0	0	1	0	1
1 0 1	0	1	0	1
1 1 0	1	0	0	1
1 1 1	1	1	1	1

Одиниці останнього стовпця говорять про наявність тавтології. Ще один шлях – використання апарата булевої алгебри:

$$(a \to b)(b \to c)a \to c = (\neg a \vee b)(\neg b \vee c)a \to c = (\neg a \neg b \vee \neg ac \vee bc)a \to c = abc \to c = \neg(abc) \vee c = \neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee c = \neg a \vee \neg b \vee 1 = 1.$$

Тобто наведене твердження є тавтологією: $\vDash (a \to b)(b \to c)a \to c$.

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть означення логічної функції.
2. Що називається однорідною логічною функцією?
3. Чому дорівнює кількість можливих слів довжиною n в k-ічному алфавіті?
4. Чому дорівнює кількість однорідних функцій від n змінних в k-ічному алфавіті?
5. Наведіть таблицю булевих функцій від однієї змінної.
6. Наведіть таблицю булевих функцій від двох змінних.
7. Які залежності існують між булевими функціями від двох змінних?
8. Скориставшись властивостями функцій, виразити всі функції через:

а) константу 0, заперечення, кон'юнкцію та диз'юнкцію;

б) заперечення і кон'юнкцію;

в) заперечення і диз'юнкцію;

г) стрілку Пірса;

д) штрих Шеффера.

9. Сформулюйте правила побудови формул алгебри висловлювань.

10. Що таке антецедент та консеквент?

11. Наведіть означення тавтології.

12. Який вигляд має закон виключення третього?

13. Який вигляд має закон виключення суперечності?

14. Який вигляд має закон тотожності?

15. Який вигляд має закон додавання антецедента?

16. Який вигляд має закон ex falso quodlibet?

17. Який вигляд має закон modus ponens?

18. Який вигляд має закон modus tollens?

19. Який вигляд має закон силогізму?

20. Який вигляд має закон контрапозиції?

21. Наведіть означення суперечності.

22. Наведіть означення нейтральної формули.

Лекція 7. Нормальні форми логічних формул

Нормальні форми

З вищенаведеного матеріалу випливає, що та сама функція може бути представлена різними формулами. Тому виникає задача знаходження такої форми запису функції, за якої кожній функції відповідає одна і тільки одна формула, а формулі відповідає одна і тільки одна функція. Такі форми запису називаються канонічними, а в булевій алгебрі – досконалою диз’юнктивною нормальною формою (ДДНФ) та досконалою кон’юнктивною нормальною формою (ДКНФ).

Диз’юнктивна нормальна форма (ДНФ) – це диз’юнкція скінченної кількості різних членів, кожний з яких є кон’юнкцією окремих змінних або їх заперечень, що входять до кожного члену не більше ніж один раз.

Кон’юнктивна нормальна форма (КНФ) – це кон’юнкція скінченної кількості різних членів, кожний з яких є диз’юнкцією окремих змінних або їх заперечень, що входять до кожного члену не більше ніж один раз.

Алгоритм зведення формули до нормальної форми:

1) за допомогою законів де Моргана формула перетворюється так, щоб знаки заперечення стосувалися лише окремих змінних;

2) на основі властивості дистрибутивності формула зводиться до диз'юнкції кон'юнкцій або до кон'юнкції диз'юнкцій;

3) отримані вирази скорочуються за використання законів поглинання та властивостей заперечення.

Приклад 7.1. Звести формулу $(xy\vee\bar{y}z)\overline{\bar{x}a}$ до ДНФ та КНФ.

Розв'язування. $(xy\vee\bar{y}z)\overline{\bar{x}a} = \left|\begin{matrix}\text{закон}\\ \text{де Моргана}\end{matrix}\right| =$

$$= (xy\vee\bar{y}z)(x\vee\bar{a}) = |\text{дистрибутивність}| =$$

$$= (xy\vee\bar{y}z)x\vee(xy\vee\bar{y}z)\bar{a} = |\text{дистрибутивність}| =$$

$= xyx\vee\bar{y}zx\vee xy\bar{a}\vee\bar{y}z\bar{a} = \left|\begin{matrix}\text{закон}\\ \text{ідемпотентності}\end{matrix}\right| = xy\vee x\bar{y}z\vee xy\bar{a}\vee\bar{y}z\bar{a}$

(отримано диз'юнктивну нормальну форму)

або

$$(xy\vee\bar{y}z)\overline{\bar{x}a} = \left|\begin{matrix}\text{закон}\\ \text{де Моргана}\end{matrix}\right| =$$

$$= (xy\vee\bar{y}z)(x\vee\bar{a}) = |\text{дистрибутивність}| =$$

$$= (x\vee\bar{y}z)(y\vee\bar{y}z)(x\vee\bar{a}) = |\text{дистрибутивність}| =$$

$= (x\vee\bar{y})(x\vee z)(y\vee\bar{y})(y\vee z)(x\vee\bar{a}) = \left|\begin{matrix}\text{властивость}\\ \text{заперечення}\end{matrix}\right| =$

$(x\vee\bar{y})(x\vee z)(y\vee z)(x\vee\bar{a})$ (отримано кон'юнктивну нормальну форму).

Члени диз'юнктивної нормальної форми, які є елементарними кон'юнкціями k букв, називаються *мінтермами k-ого рангу.* А саме, xy – мінтерм другого рангу, $x\bar{y}z$ – мінтерм третього рангу.

Члени кон'юнктивної нормальної форми, які є елементарними диз'юнкціями k букв, називаються *макстермами k-ого рангу.* А саме, $x\vee\bar{y}$ – макстерм другого рангу.

Якщо початкова формула містить інші операції, то вони попередньо виражаються через диз'юнкцію, кон'юнкцію та заперечення.

Приклад 7.2. Звести формулу $\overline{x \to (\bar{x} \leftrightarrow z)}(y \to \bar{z})\vee\overline{x \to z}$ до ДНФ.

Розв'язування.

$$\overline{x \to (\bar{x} \leftrightarrow z)}(y \to \bar{z}) \vee \overline{x \to z} = |\text{еквіваленція}| =$$

$$= \overline{x \to (\bar{x} \to z)(z \to \bar{x})}(y \to \bar{z}) \vee \overline{x \to z} = \left|\begin{matrix}\text{імплікація,} \\ \text{подвійне заперечення}\end{matrix}\right| =$$

$$= \overline{\bar{x} \vee (x \vee z)(\bar{z} \vee \bar{x})}(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee \overline{\bar{x} \vee z} = \left|\begin{matrix}\text{закон} \\ \text{де Моргана,} \\ \text{подвійне заперечення}\end{matrix}\right| =$$

$$= x\overline{(x \vee z)(\bar{x} \vee \bar{z})}(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee x\bar{z} = \left|\begin{matrix}\text{закон} \\ \text{де Моргана}\end{matrix}\right| =$$

$$= x(\overline{x \vee z} \vee \overline{\bar{x} \vee \bar{z}})(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee x\bar{z} = \left|\begin{matrix}\text{закон} \\ \text{де Моргана,} \\ \text{подвійне заперечення}\end{matrix}\right| =$$

$$= x(\bar{x}\bar{z} \vee xz)(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee x\bar{z} = |\text{дистрибутивність}| =$$

$$= (x\bar{x}\bar{z} \vee xxz)(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee x\bar{z} = \left|\begin{matrix}\text{ідемпотентність,} \\ \text{властивість заперечення,} \\ \text{властивість констант}\end{matrix}\right| =$$

$$= xz(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee x\bar{z} = |\text{дистрибутивність}| =$$

$$= xz\bar{y} \vee xz\bar{z} \vee x\bar{z} = \left|\begin{matrix}\text{властивість констант,} \\ \text{властивість заперечення}\end{matrix}\right| =$$

$$x\bar{y}z \vee x\bar{z}.$$

Досконалі нормальні форми

Якщо в кожному члені нормальної форми містяться всі змінні, то вона називається *досконалою нормальною формою*. Якщо ця умова не виконується, то будь-яку змінну можна штучно ввести, використовуючи наступні властивості

$$x = x \cdot 1 = x(y \vee \bar{y}) = xy \vee x\bar{y},$$
$$x = x \vee 0 = x \vee y\bar{y} = (x \vee y)(x \vee \bar{y}).$$

Якщо продовжити приклад 7.2, отримаємо досконалу диз’юнктивну форму: $x\bar{y}z \vee x\bar{z} = x\bar{y}z \vee x\bar{z}(y \vee \bar{y}) = x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}$.

Приклад 7.3. Звести формулу $\overline{x \vee y\bar{z}}(x \vee z)$ до ДКНФ.

Розв’язування.

$$\overline{x \vee y \bar{z}}(x \vee z) = \bar{x}\overline{y\bar{z}}(x \vee z) = \bar{x}(\bar{y} \vee z)(x \vee z) = (\bar{x} \vee y\bar{y})(\bar{y} \vee z \vee x\bar{x})(x \vee z \vee y\bar{y}) =$$
$$= (\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})(\bar{y} \vee z \vee x)(\bar{y} \vee z \vee \bar{x})(x \vee z \vee y)(x \vee z \vee \bar{y}) =$$
$$= (\bar{x} \vee y \vee z\bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z\bar{z})(\bar{y} \vee z \vee x)(\bar{y} \vee z \vee \bar{x})(x \vee z \vee y)(x \vee z \vee \bar{y}) =$$
$$= (\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{y} \vee z \vee x)(\bar{y} \vee z \vee \bar{x})(x \vee z \vee y)(x \vee z \vee \bar{y}) =$$
$$= (\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee z \vee y).$$

Досконалі нормальні форми застосовуються для доведення рівносильності формул, яку можна перевірити за таблицями істинності, але велика кількість змінних занадто ускладнює цю задачу. Інший шлях – звести кожну формулу до досконалої нормальної форми. У разі їх збігу робиться висновок про рівносильність формул.

Побудова формули функції

Для сукупності змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вираз $\widetilde{x_1}\widetilde{x_2}\ldots\widetilde{x_n}$ називають конституентою одиниці, а вираз $\widetilde{x_1} \vee \widetilde{x_2} \vee \ldots \vee \widetilde{x_n}$ – конституентою нуля, де $\widetilde{x_i}$ означає x_i або $\overline{x_i}$. Такі конституенти одиниці (нуля) перетворюються в одиницю (нуль) тільки за одного відповідного набору значень змінних, який отримується, якщо всі змінні прирівняти до одиниці (нуля), а їх заперечення – до нуля (одиниці). Наприклад, конституенті одиниці $\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4$ відповідає набір 0011, а конституенті нуля $\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$ – набір 1000.

Правильним є і зворотне твердження, яке покладене в основу побудови досконалої нормальної форми будь-якої функції, що представлена таблицею істинності. Для цього треба записати диз'юнкції (кон'юнкції) конституент одиниці (нуля), що відповідають наборам значень змінних, де функція дорівнює одиниці (нулю). Наприклад, функція задана таблицею істинності:

x_1	0 0 0 0 1 1 1 1
x_2	0 0 1 1 0 0 1 1
x_3	0 1 0 1 0 1 0 1
y	1 0 1 1 0 0 1 0

Її можна представити як

$$y = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3}$$

(набори 000, 010, 011, 110 набувають значення 1) або

$$y = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

(набори 001, 100, 101, 111 набувають значення 0).

Графічний спосіб побудови досконалих нормальних форм

Графічний спосіб побудови досконалих нормальних форм проілюструємо за допомогою карт Карно.

Карта Карно – графічне зображення всіх мінтермів для заданої кількості змінних. Нижче зображені карти Карно для функцій двох, трьох і чотирьох змінних.

x_1 / x_2	0	1
0		
1		

x_1x_2 / x_3	00	01	11	10
0				
1				

x_1x_2 / x_3x_4	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

У лівому верхньому куті вказані змінні, а в першому рядку та в першому стовпці – значення цих змінних. У сусідніх клітинках мінтерми відрізняються значеннями тільки однієї змінної. У вільні клітини карти треба поставити 1, якщо відповідні мінтерми входять до складу функції, що розглядається. Якщо всі виділені одиницями мінтерми з’єднати знаком диз’юнкції, то буде отримана ДДНФ функції.

Приклад 7.4. Перетворити функцію $y = x_1x_2 \vee x_3$ з ДНФ у ДДНФ за допомогою карти Карно.

Розв'язування. Для функції $y = x_1x_2 \vee x_3$ побудуємо карту Карно:

x_1x_2 / x_3	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Тоді ДДНФ матиме вигляд:

$$y = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1x_2x_3 \vee x_1\,\overline{x_2}x_3.$$

Перехід від КНФ у ДКНФ також можна виконати за допомогою карти Карно.

Приклад 7.5. Перетворити функцію $y = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)$ з КНФ у ДКНФ за допомогою карти Карно.

Розв'язування. Для функції $y = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)$ отримаємо її заперечення (за законами де Моргана):

$$\bar{y} = \overline{(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)} = \overline{(x_1 \vee x_2 \vee x_3)} \vee \overline{(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)} = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_4}.$$

Для заперечення будуємо карту Карно:

x_1x_2 / x_3x_4	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	1	0	0

Тоді ДДНФ для заперечення матиме вигляд:

$$\bar{y} = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}.$$

Щоб отримати ДКНФ для цієї функції y, інвертуємо її заперечення $\bar{\bar{y}} = y$ та застосуємо закони де Моргана:

$$y = \overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}} =$$

$$= (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4).$$

Запитання для самоперевірки

1. Який вигляд має диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ) функції?
2. Який вигляд має кон'юнктивна нормальна форма (КНФ) функції?

3. Наведіть етапи побудови ДНФ та КНФ функції.

4. Який вигляд має досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ) функції?

5. Який вигляд має досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ) функції?

6. Як побудувати ДДНФ та ДКНФ функції?

7. Як використовуються ДДНФ та ДКНФ для доведення рівносильності формул?

8. Наведіть означення конституент нуля й одиниці.

9. Як конституенти нуля й одиниці використовуються для побудови формули будь-якої функції, що представлена таблицею істинності?

10. Як карти Карно використовуються для побудови ДДНФ та ДКНФ функції?

Лекція 8. Функціональна повнота системи функцій

Двоїстість формул булевої алгебри

Означення. Булева функція $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається *двоїстою* до функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$. Позначка: f^*, а саме

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}).$$

Прикладом двоїстості операцій можуть слугувати операції диз'юнкції та кон'юнкції:

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	1

Таблицю істинності функції f^* можна отримати з таблиці істинності функції f, якщо в останній інвертувати всі значення аргументів функції, а також усі значення в стовпчику значень функції. Із цього випливає, що двоїстою до функції f^* є функція f: $(f^*)^* = f$. За приклад можуть слугувати функція заперечення, функція медіана $m(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$.

Принцип двоїстості можна сформулювати так: якщо в булевій формулі F, яка зображує булеву функцію f, замінити всі операції кон'юнкції на операції диз'юнкції, а операції диз'юнкції – на операції кон'юнкції, усі операції 0 замінити на 1, а всі 1 – на 0, то одержимо формулу F^*, яка зображує бульову функцію f^*, що є двоїстою до функції f.

Формула або функція, що є рівносильною до своєї двоїстої, називається *самодвоїстою.*

Алгебра Жегалкіна

Алгебра Жегалкіна – це ще одна цікава алгебра, яка будується на додаванні за модулем 2, кон'юнкції та 1. Її основні властивості:

1) комутативність $x + y = y + x; xy = yx$;

2) асоціативність $x + (y + z) = (x + y) + z; x(yz) = (xy)z$;

3) дистрибутивність кон'юнкції щодо додавання $x(y + z) = xy + xz$ (дистрибутивність додавання щодо кон'юнкції не працює);

4) властивість констант $x \cdot 1 = x; x \cdot 0 = 0; x + 0 = x$.

Також для цієї алгебри працює закон приведення подібних $x + x = 0$ та закон ідемпотентності добутку $xx = x$.

За допомогою формул або таблиць істинності можна перевірити інші формули:

$$\bar{x} = 1 + x;\ \ x_1 \vee x_2 = x_1 + x_2 + x_1 x_2;\ x_1 + x_2 = x_1\overline{x_2} \vee \overline{x_1}x_2.$$

Перші дві з них дають змогу перейти від будь-якої формули булевої алгебри до алгебри Жегалкіна, а за допомогою третьої – забезпечити зворотній перехід. Наприклад,

$$x(\bar{x} \vee y) = x\big((1 + x) + y + (1 + x)y\big) =$$
$$= x(1 + x + y + y + xy) =$$
$$= x(1 + x + xy) = x + xx + xxy = x + x + xy = xy;$$
$$1 + x + y + xy = 1 + x + y(1 + x) = (1 + x)(1 + y) = \bar{x}\bar{y}.$$

Інші булеві функції:

$$x_1 \to x_2 =$$
$$= \overline{x_1} \vee x_2 = 1 + x_1 + x_2 + (1 + x_1)x_2 = 1 + x_1 + x_2 + x_2 + x_1 x_2 =$$
$$= 1 + x_1 + x_1 x_2;$$
$$x_1 \leftrightarrow x_2 =$$
$$= (\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_2}) = (1 + x_1 + x_1 x_2)(1 + x_2 + x_1 x_2) =$$

$$= 1 + x_1 + x_1x_2 + x_2 + x_1x_2 + x_1x_2x_2 + x_1x_2 + x_1x_1x_2 + x_1x_2x_1x_2 =$$
$$= 1 + x_1 + x_2;$$
$$x_1 \leftarrow x_2 =$$
$$= \overline{x_1 \rightarrow x_2} = \overline{1 + x_1 + x_1x_2} = 1 + 1 + x_1 + x_1x_2 = x_1 + x_1x_2;$$
$$x_1 | x_2 =$$
$$= \overline{x_1x_2} = 1 + x_1x_2;$$
$$x_1 \downarrow x_2 =$$
$$= \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1 + x_2 + x_1x_2} = 1 + x_1 + x_2 + x_1x_2.$$

Поліноми Жегалкіна

Будь-яка булева функція може бути зведена до канонічного многочлену, члени якого не містять числових коефіцієнтів і лінійні щодо будь-якої змінної. Для цього треба:

1) функцію звести до досконалої нормальної форми;
2) замінити всі знаки диз'юнкції знаками суми за модулем 2 (оскільки тільки одна елементарна кон'юнкція на кожному наборі перетворюється в одиницю, а решта дають нулі), заперечення змінних виразити через формулу $\bar{x} = 1 + x$;
3) розкрити дужки та використати закони $x + x = 0$ і $xx = x$.

Приклад 8.1. Звести функцію $(x \leftrightarrow y)(x|y) + (x \leftarrow y)y$ до полінома Жегалкіна.

Розв'язування. Скористаємося наведеним алгоритмом:

$$(x \leftrightarrow y)(x|y) + (x \leftarrow y)y = (\bar{x}\bar{y} \vee xy)\overline{xy} + \overline{x \rightarrow y}y =$$
$$= (\bar{x}\bar{y} \vee xy)(\bar{x} \vee \bar{y}) + \overline{\bar{x} \vee y}y = \bar{x}\bar{y} + x\bar{y}y = \bar{x}\bar{y} + 0 = \bar{x}\bar{y} = (1 + x)(1 + y)$$
$$= 1 + x + y + xy.$$

Застосуємо формули переходу від булевої алгебри до алгебри Жегалкіна:

$$(x \leftrightarrow y)(x|y) + (x \leftarrow y)y = (1 + x + y)(1 + xy) + (x + xy)y =$$
$$= 1 + x + y + xy + xxy + yxy + xy + xyy =$$
$$= 1 + x + y + xy + xy + xy + xy + xy = 1 + x + y + xy.$$

Переваги алгебри Жегалкіна полягають в арифметизації логіки, що дає змогу використовувати апарат перетворення алгебраїчних виразів. Недоліком вважається складність формул, особливо за великої кількості змінних.

Приклад 8.2. Звести функцію $x_1 \vee x_2 \vee x_3$ до полінома Жегалкіна.

Розв'язування. Скористаємося наведеним алгоритмом:

$$x_1 \vee x_2 \vee x_3 = x_1(x_2 \vee \overline{x_2})(x_3 \vee \overline{x_3}) \vee (x_1 \vee \overline{x_1})x_2(x_3 \vee \overline{x_3}) \vee (x_1 \vee \overline{x_1})(x_2 \vee \overline{x_2})x_3 =$$
$$= x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee x_1\overline{x_2x_3} \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_1x_2x_3 \vee$$
$$\vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee \overline{x_1x_2}x_3 =$$
$$= x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee x_1\overline{x_2x_3} \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1x_2}x_3 =$$
$$= x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x_3} + x_1\overline{x_2}x_3 + x_1\overline{x_2x_3} + \overline{x_1}x_2x_3 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3}$$
$$+ \overline{x_1x_2}x_3 =$$
$$= x_1x_2x_3 + x_1x_2(1 + x_3) + x_1(1 + x_2)x_3 + x_1(1 + x_2)(1 + x_3)$$
$$+ (1 + x_1)x_2x_3 + (1 + x_1)x_2(1 + x_3) + (1 + x_1)(1 + x_2)x_3 =$$
$$= x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2x_3 + x_1 + x_1x_3 + x_1x_2$$
$$+ x_1x_2x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3 + x_2 + x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_2x_3 + x_3$$
$$+ x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2x_3 =$$
$$= x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3.$$

Застосуємо формули переходу від булевої алгебри до алгебри Жегалкіна:

$$x_1 \vee x_2 \vee x_3 = (x_1 + x_2 + x_1x_2) \vee x_3 =$$
$$= x_1 + x_2 + x_1x_2 + x_3 + (x_1 + x_2 + x_1x_2)x_3 =$$
$$= x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3.$$

Метод невизначених коефіцієнтів для побудови полінома Жегалкіна

Ще один метод побудови полінома Жегалкіна – метод невизначених коефіцієнтів. Розглянемо його на попередньому прикладі 8.2. Виразимо функцію в загальному вигляді полінома Жегалкіна:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2 \vee x_3 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_1x_2 + a_5x_1x_3 +$$
$$a_6x_2x_3 + a_7x_1x_2x_3.$$

Підставимо замість змінних всі можливі набори їх значень та отримаємо відповідні значення функції і, як наслідок, значення коефіцієнтів:

$$f(0,0,0) = 0: a_0 = 0;$$
$$f(0,0,1) = 1: a_3 = 1;$$
$$f(0,1,0) = 1: a_2 = 1;$$
$$f(0,1,1) = 1: 1 + 1 + a_6 = 1; a_6 = 1;$$
$$f(1,0,0) = 1: a_1 = 1;$$
$$f(1,0,1) = 1: 1 + 1 + a_5 = 1; a_5 = 1;$$
$$f(1,1,0) = 1: 1 + 1 + a_4 = 1;\ a_4 = 1;$$

$$f(1,1,1) = 1: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + a_7 = 1;\ a_7 = 1.$$

Підставляємо отримані значення коефіцієнтів у поліном:

$$x_1 \vee x_2 \vee x_3 = x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3.$$

Типи булевих функцій

В алгебрі логіки з множини θ=2^{2^n} різних булевих функцій n змінних $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ виділяють такі 5 типів булевих функцій (класів Поста):

1. Функції, що зберігають константу 0, тобто $f(0,0,\dots,0) = 0$. Таких функцій $\theta - 2^{2^n - 1} = \theta - \frac{1}{2}2^{2^n} = \theta - \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\theta$. До таких функцій відносять диз'юнкцію, додавання за модулем 2 та кон'юнкцію, заперечення та імплікація не зберігають 0.

2. Функції, що зберігають константу 1, тобто $f(1,1,\dots,1) = 1$. Таких функцій $\theta - 2^{2^n - 1} = \theta - \frac{1}{2}2^{2^n} = \theta - \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\theta$. До таких функцій відносять диз'юнкцію, імплікацію та кон'юнкцію, заперечення та додавання за модулем 2 не зберігають 1.

3. Самодвоїсті функції – функції, для яких виконується умова $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$. Оскільки набори в таблицях відповідності є симетричними, то кількість незалежних наборів є $\frac{1}{2}2^n$, а самих функцій – $2^{\frac{1}{2}2^n} = \sqrt{\theta}$. Приклад – заперечення.

4. Лінійні функції – функції, які в алгебрі Жегалкіна можна представити поліномом Жегалкіна, що не містить добутку змінних, $a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + +a_nx_n$, де $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ дорівнюють 0 або 1. Оскільки коефіцієнтів $n + 1$, то кількість різних лінійних многочленів, а отже, і функцій – 2^{n+1}. До таких функцій відносять заперечення та додавання за модулем 2, а диз'юнкція і кон'юнкція не є лінійними ($x_1 \vee x_2 = x_1 + x_2 + x_1x_2$).

5. Монотонні функції - функції, для яких виконується умова: для будь-яких наборів $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \le (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, якщо $\alpha_i \le \beta_i$ $(i = 1,2, \dots, n)$, правильною є нерівність $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \le f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

Усі 5 типів функцій є замкненими щодо операції суперпозиції, тобто суперпозиція будь-якої кількості булевих функцій цього типу є функцією того ж типу.

Функціональна повнота

Систему булевих функцій називають *функціонально повною,* якщо будь-яку булеву функцію можна зобразити через функції системи. Якщо в такій системі допускаються константи 0 та 1, то її називають *послаблено функціонально повною.* Говорять, що функціонально повна система функцій утворює базис в логічному просторі. Система функцій називається мінімально повним базисом, якщо видалення з неї будь-якої функції перетворює систему в неповну.

Теорема (критерій повноти Поста). Для того щоб система булевих функцій була функціонально повною, необхідно і достатньо, щоб вона не містилася цілком у жодному з п'яти замкнених типів функцій.

Інакше кажучи, щоб система булевих функцій була функціонально повною, необхідно і достатньо, щоб вона містила: 1) хоча б одну функцію, яка не зберігає 0; 2) хоча б одну функцію, яка не зберігає 1; 3) хоча б одну несамодвоїсту функцію; 4) хоча б одну нелінійну функцію; 5) хоча б одну немонотонну функцію. У таблиці наведені властивості булевих функцій з позиції функціональної повноти:

Булева функція	Формули	Збереження 0	Збереження 1	Самодвоїстість	Лінійність	Монотонність
Константа 0	0	+	–	–	+	+
Константа 1	1	–	+	–	+	+
Заперечення	$\bar{x}$	–	–	+	+	–
Кон'юнкція	$x_1 x_2$	+	+	–	–	+
Диз'юнкція	$x_1 \vee x_2$	+	+	–	–	+
Імплікація	$x_1 \rightarrow x_2$	–	+	–	–	–
Еквіваленція	$x_1 \leftrightarrow x_2$	–	+	–	+	–
Заперечення імплікації	$x_1 \leftarrow x_2$	+	–	–	–	–
Сума за модулем 2	$x_1 + x_2$	+	–	–	+	–
Штрих Шеффера	$x_1 \vert x_2$	–	–	–	–	–
Стрілка Пірса	$x_1 \downarrow x_2$	–	–	–	–	–

Приклади функціонально повних систем – $\{\vee, \neg\}$, $\{\wedge, \neg\}, \{|\}$, $\{\downarrow\}$, послаблено функціонально повна – $\{\wedge, \oplus, 1\}$. Оскільки в останній системі $\bar{x} = x \oplus 1$, то вона зводиться до другої. Водночас $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}, \{\vee, \wedge, \rightarrow\}, \{\vee, \wedge, \leftrightarrow\}, \{\vee, \wedge\}$ не є функціонально повними, оскільки неможливо виразити $\bar{x}$, тому що всі функції на наборі (1;1) набувають значення тільки 1. Аналогічні твердження щодо систем $\{\vee, \oplus\}$, $\{\wedge, \oplus\}$, $\{\oplus, \leftrightarrow\}$ тощо.

Отже, існують системи булевих функцій, за допомогою яких можна аналітично подати будь-яку скільки завгодно складну булеву функцію. Проєктування цифрових автоматів основане на знанні саме таких систем булевих функцій.

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть означення двоїстої функції.
2. Сформулюйте принцип двоїстості.
3. Наведіть означення самодвоїстої функції.
4. Наведіть основні властивості алгебри Жегалкіна.
5. Наведіть основні етапи побудови полінома Жегалкіна.
6. Опишіть метод невизначених коефіцієнтів для побудови полінома Жегалкіна.
7. Наведіть типи булевих функцій.
8. Опишіть функції, що зберігають константу 0.
9. Опишіть функції, що зберігають константу 1.
10. Опишіть лінійні функції.
11. Опишіть монотонні функції.
12. Яку систему булевих функцій називають функціонально повною? Чим відрізняється послаблено функціонально повна система функцій?
13. Сформулюйте критерій повноти Поста.
14. Наведіть приклади функціонально повних і послаблено функціонально повних систем функцій.

Лекція 9. Логіка мінімізації булевих функцій

Основні визначення

Мінімальною диз'юнктивною нормальною формою булевої функції називається ДНФ, що містить найменшу кількість змінних щодо всіх інших ДНФ цієї функції.

Функція $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається *імплікантою функції* $f(\, x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо на будь-якому наборі значень змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ виконується умова

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f(\, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Елементарні кон'юнкції, що входять до складу ДНФ функції, є її імплікантами. Диз'юнкція будь-якої кількості імплікант булевої функції також є імплікантою цієї функції.

Приклад 9.1. Для функції $y = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 x_3$ знайти всі її імпліканти.

Розв'язування. Напишемо всі кон'юнкції функції та їх диз'юнкції:

$$\varphi_1 = x_1 x_2 x_3,$$
$$\varphi_2 = x_1 x_2 \overline{x_3},$$
$$\varphi_3 = \overline{x_1} x_2 x_3,$$
$$\varphi_4 = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} = x_1 x_2,$$
$$\varphi_5 = x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 = x_2 x_3,$$
$$\varphi_6 = x_1 x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 x_3,$$
$$\varphi_7 = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 x_3.$$

Побудуємо таблицю істинності для перевірки виконання означення імпліканти:

x_1	x_2	x_3	y	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1

На всіх наборах змінних значення всіх імплікант не перевищують значення функції $y = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2x_3$.

Простими імплікантами булевої функції називають такі її імпліканти, які самі входять до даної функції, але жодна їх власна частина не є імплікантою функції. У вищенаведеному прикладі простими імплікантами є $\varphi_4 = x_1x_2$ та $\varphi_5 = x_2x_3$.

Будь-яка булева функція еквівалентна диз'юнкції всіх своїх простих імплікант. Така форма подання функції називається *скороченою* ДНФ (СДНФ).

Тупикова ДНФ складається тільки з простих імплікант. Кожна логічна функція має єдину СДНФ та може мати кілька тупикових ДНФ.

Мінімальною ДНФ (МДНФ) логічної функції називають одну з тупикових ДНФ, якій відповідає найменше значення критерію мінімізації ДНФ (найменша кількість змінних відносно всіх інших ДНФ цієї функції).

У разі мінімізації логічної функції використовуються такі формули булевої алгебри. Операція *повного диз'юнктивного склеювання*

$$Ax \vee A\bar{x} = A$$

слідує з властивості дистрибутивності кон'юнкції, операція *диз'юнктивного поглинання*

$$A \vee Ax = A$$

випливає із законів поглинання, та операція *неповного диз'юнктивного склеювання*

$$Ax \vee A\bar{x} = A \vee Ax \vee A\bar{x},$$

яку можна отримати таким чином:

$$A = A \vee A = A \vee Ax \vee Ax \vee A\bar{x} = A \vee Ax \vee A\bar{x},$$

підставляючи попередні формули.

Функція $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається *імпліцентою функції* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо на всіх наборі значень змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, де $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ також дорівнює нулю.

Елементарні диз'юнкції, що входять до складу КНФ функції, є її імпліцентами.

Кон’юнкція будь-якої кількості імпліцент булевої функції також є імпліцентою цієї функції.

Простими імпліцентами булевої функції називають такі її імпліценти, які самі входять до даної функції, але жодна їх власна частина не є імпліцентою функції.

Будь-яка булева функція еквівалентна кон’юнкції всіх своїх простих імпліцент. Така форма подання функції називається *скороченою* КНФ (СКНФ).

Тупикова КНФ складається тільки з простих імпліцент. Кожна логічна функція має єдину СКНФ та може мати кілька тупикових КНФ.

Мінімальною КНФ (МКНФ) логічної функції називають одну з тупикових КНФ, якій відповідає найменше значення критерію мінімізації КНФ (найменша кількість змінних щодо всіх інших КНФ цієї функції).

За мінімізації логічної функції використовуються такі формули булевої алгебри. Операція *повного кон’юнктивного склеювання*

$$(A \vee x)(A \vee \bar{x}) = A$$

слідує з властивості дистрибутивності диз’юнкції, операція *кон’юнктивного поглинання*

$$A(A \vee x) = A$$

випливає із законів поглинання, та операція *неповного кон’юнктивного склеювання*

$$(A \vee x)(A \vee \bar{x}) = A(A \vee x)(A \vee \bar{x}),$$

яку можна отримати таким чином:

$$A = A \wedge A = A(A \vee x)(A \vee x)(A \vee \bar{x}) = A(A \vee x)(A \vee \bar{x}),$$

підставляючи попередні формули.

Метод Вейча

Метод Вейча застосовують для мінімізації логічних функцій, що містять невелику кількість змінних, зазвичай не більше ніж чотири. На початковому етапі методу заповнюються таблиці (діаграми Вейча, карти Вейча), вигляд яких наведено нижче.

	x_1	$\overline{x_1}$
x_2		
$\overline{x_2}$		

	x_1		$\overline{x_1}$	
x_2				
$\overline{x_2}$				
	$\overline{x_3}$	x_3		$\overline{x_3}$

	x_1		$\overline{x_1}$		
x_2					$\overline{x_4}$
					x_4
$\overline{x_2}$					
					$\overline{x_4}$
	$\overline{x_3}$	x_3		$\overline{x_3}$	

Таблиці Вейча заповнюються аналогічно заповненню карт Карно, але треба звернути увагу, що функція, для якої вибудовується таблиця, має бути обов’язково представлена у ДДНФ (заповнення одиницями) або у ДКНФ (заповнення нулями).

З побудови таблиці випливає, що дві сусідні клітинки відрізняються значенням тільки однієї змінної. У разі їх заповнення до відповідних конституент можна застосувати операцію склеювання. Загалом робота з таблицями Вейча має відбуватися за такими правилами.

Клітинки об’єднуються у групи, що позначають операції склеювання. В об’єднанні беруть участь тільки ті сусідні клітинки, у яких містяться одиниці (для ДДНФ) або нулі (для ДКНФ).

Дозволяється об’єднувати в групи 2^n, $n = 1, 2, 3 \ldots$ клітинок, а сама група має мати тільки прямокутну форму.

Для склеювання треба знайти набір максимальних груп клітинок, тобто група не може цілком входити до складу жодної іншої групи, а кількість груп у наборі має бути мінімальною. Тоді група відповідатиме мінімальній тупиковій ДНФ (КНФ). Кожна одиниця (нуль) таблиці Вейча має входити хоча б до однієї групи, що забезпечує покриття функції отриманим набором імплікант (імпліцент).

Кожна група клітинок відповідає імпліканті (імпліценті), яка складається зі змінних, що є однаковими для всіх клітинок групи.

Диз’юнкція (кон’юнкція) всіх отриманих простих імплікант (імпліцент) і буде мінімальною ДНФ (КНФ).

Приклад 9.2. Побудувати МДНФ функції $y = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2x_3$.

Розв'язування. Оскільки функція $y = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2x_3$ представлена у вигляді ДДНФ, то для неї зразу будуємо таблицю Вейча й заповнюємо одиницями.

	x_1		$\overline{x_1}$	
x_2	1	1	1	
$\overline{x_2}$				
	$\overline{x_3}$	x_3		$\overline{x_3}$

Кожні дві сусідні клітинки об'єднуються в групи, до яких застосовується операція склеювання. У першій групі однаковими змінними є x_1та x_2, тому цій групі відповідає проста імпліканта x_1x_2, а в другій групі однаковими змінними є x_2та x_3, тому цій групі відповідає проста імпліканта x_3x_3. Отже, МДНФ функції $y = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2x_3$ матиме вигляд

$$y = x_1x_2 \vee x_2x_3.$$

Приклад 9.3. Побудувати МДНФ функції

$$y = x_1x_2x_3\overline{x_4} \vee x_1\overline{x_2}x_3x_4 \vee x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4} \vee$$
$$\vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\overline{x_4}.$$

Розв'язування. Оскільки функція y представлена у вигляді ДДНФ, то для неї зразу будуємо таблицю Вейча й заповнюємо одиницями.

	x_1		$\overline{x_1}$		
x_2		1	1	1	$\overline{x_4}$
					x_4
$\overline{x_2}$		1	1		
	1	1	1	1	$\overline{x_4}$
	$\overline{x_3}$	x_3		$\overline{x_3}$	

Зверніть увагу, що жирними лініями виділені групи, які утворені одиницями першого й останнього рядків. Перша така група накривається імплікантою $x_3\overline{x_4}$, а друга – імплікантою $\overline{x_1}\,\overline{x_4}$. Загалом МДНФ функції матиме вигляд

$$y = x_3\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_4}.$$

Приклад 9.4. Побудувати МКНФ функції

$$y = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}).$$

Розв'язування. Оскільки функція y представлена у вигляді ДКНФ, то для неї зразу будуємо таблицю Вейча й заповнюємо нулями.

	x_1		$\overline{x_1}$	
x_2		0	0	
$\overline{x_2}$	0			0
	$\overline{x_3}$	x_3		$\overline{x_3}$

МКНФ функції матиме вигляд

$$y = (x_2 \vee x_3)(\overline{x_2} \vee \overline{x_3}).$$

Метод Карно

Метод Карно є модифікацією метода Вейча. Відповідно карти Карно заповнюються аналогічно заповненню таблиць Вейча, а правила склеювання аналогічні правилам склеювання метода Вейча.

Приклад 9.5. Побудувати МДНФ функції

$$y = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee$$
$$\vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}.$$

Розв'язування. Оскільки функція y представлена у вигляді ДДНФ, то для неї зразу будуємо карту Карно й заповнюємо одиницями.

x_1x_2 \ x_3	00	01	11	10
0	1		1	1
1	1	1	1	1

МДНФ функції матиме вигляд

$$y = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3.$$

Приклад 9.6. Побудувати МДНФ функції

$$y = x_1x_2x_3\overline{x_4} \vee x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1\overline{x_2}x_3x_4 \vee x_1\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee$$
$$\vee \overline{x_1}x_2x_3x_4 \vee \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}x_4 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}.$$

Розв'язування. Оскільки функція y представлена у вигляді ДДНФ, то для неї зразу будуємо карту Карно й заповнюємо одиницями.

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1		
11		1		1
10	1	1	1	1

МДНФ функції матиме вигляд

$$y = x_1\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}\,x_2 \vee \overline{x_4}.$$

Приклад 9.7. Побудувати МКНФ функції

$$y = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}).$$

Розв'язування. Оскільки функція y представлена у вигляді ДКНФ, то для неї зразу будуємо карту Карно й заповнюємо нулями.

x_1x_2 \ x_3	00	01	11	10
0	0			0
1			0	0

МКНФ функції матиме вигляд

$$y=(x_2\vee x_3)(\overline{x_1}\vee x_2)(\overline{x_1}\vee\overline{x_3}).$$

Метод Квайна

Метод Квайна забезпечує мінімізацію ДДНФ (ДКНФ) через застосування операцій склеювання та поглинання. Алгоритм метода Квайна містить такі ітерації.

Ітерація 1. Побудувати ДДНФ (ДКНФ) функції.

Ітерація 2. Виконати всі операції неповного диз'юнктивного (кон'юнктивного) склеювання (попарно перебираємо всі наявні конституенти одиниці (конституенти нуля)). На цьому етапі вибудовується диз'юнкція (кон'юнкція) всіх можливих імплікант (імпліцент) функції.

Ітерація 3. Виконати всі операції диз'юнктивного (кон'юнктивного) поглинання. На цьому етапі вибудовується СДНФ (СКНФ) функції.

Ітерація 4. Сформувати імплікантну (імпліцентну) таблицю, у якій по рядках розташовуються прості імпліканти (імпліценти) функції, а по стовбцях – конституенти одиниці (конституенти нуля) функції. На перетині відмічаються клітинки у випадку, коли відповідна імпліканта (імпліцента) буде власною частиною конституенти одиниці (конституенти нуля). Шляхом покриття всіх конституент мінімальною кількістю імплікант (імпліцент імпліцент) побудувати всі тупикові ДНФ (КНФ) функції.

Ітерація 5. Серед тупикових ДНФ (КНФ) функції знайти МДНФ (МКНФ) функції.

Приклад 9.8. Побудувати МДНФ функції

$$y=\overline{\overline{x_1(x_2\vee x_3)}(x_1\vee x_2x_3)}.$$

Розв'язування. Оскільки функція y не представлена у вигляді ДДНФ, то для неї попередньо виконуємо перетворення, щоб отримати ДДНФ:

$$y=\overline{\overline{x_1(x_2\vee x_3)}(x_1\vee x_2x_3)}=\overline{\overline{x_1(x_2\vee x_3)}}\vee\overline{(x_1\vee x_2x_3)}=x_1(x_2\vee x_3)\vee\overline{x_1}\,\overline{(x_2x_3)}=$$

$$=x_1(x_2\vee x_3)\vee\overline{x_1}(\overline{x_2}\vee\overline{x_3})=x_1x_2\vee x_1x_3\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}\vee\overline{x_1}\,\overline{x_3}=$$

$$=x_1x_2(x_3\vee\overline{x_3})\vee x_1x_3(x_2\vee\overline{x_2})\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}(x_3\vee\overline{x_3})\vee\overline{x_1}\,\overline{x_3}(x_2\vee\overline{x_2})=$$

$$=x_1x_2x_3\vee x_1x_2\overline{x_3}\vee x_1\overline{x_2}x_3\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\vee\overline{x_1}x_2\overline{x_3}.$$

Після побудови ДДНФ застосовуємо операцію склеювання:

$$y=(x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3}) \vee (x_1x_2x_3 \vee x_1\overline{x_2}x_3) \vee (x_1x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}) \vee$$
$$\vee (x_1\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3) \vee (\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}) \vee (\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}) =$$
$$= x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3}.$$

До отриманих кон’юнкцій не може бути застосована операція склеювання. Отже, диз’юнкція всіх можливих імплікант матиме вигляд:

$$y = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3}.$$

Ця ж формула буде СДНФ функції. Далі складаємо імплікантну таблицю:

	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2\overline{x_3}$	$x_1\overline{x_2}x_3$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$	$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}$
x_1x_2	*	*				
x_1x_3	*		*			
$x_2\overline{x_3}$		*				*
$\overline{x_2}x_3$			*	*		
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$				*	*	
$\overline{x_1}\,\overline{x_3}$					*	*

За покриття всіх конституент одиниці мінімальною кількістю імплікант маємо дві тупикові ДНФ функції:

$$y_1 = x_1x_2 \vee \overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3}$$

та

$$y_2 = x_1x_3 \vee x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}.$$

Оскільки за критерієм мінімізації кількості змінних отримані ДНФ еквівалентні, то кожна з них є МДНФ функції.

Приклад 9.9. Побудувати МДНФ функції

$$y = \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 \vee \overline{x_1}x_2x_3x_4 \vee$$
$$\vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 \vee x_1\overline{x_2}x_3x_4 \vee x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1x_2\overline{x_3}x_4.$$

Розв’язування. Оскільки функція y представлена у вигляді ДДНФ, то зразу знаходимо всі її імпліканти. Спочатку перебираємо всі конституенти одиниці:

	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$ x_3x_4	$\overline{x_1}x_2$ $\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	$\overline{x_1}x_2$ $\overline{x_3}x_4$	$\overline{x_1}x_2$ x_3x_4	$x_1\overline{x_2}$ $\overline{x_3}x_4$	$x_1\overline{x_2}$ x_3x_4	x_1x_2 $\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	x_1x_2 $\overline{x_3}x_4$
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4$	1			$\overline{x_1}x_3x_4$		$\overline{x_2}x_3x_4$		
$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$		1	$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}$				$x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	

$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4$		$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}$	1	$\overline{x_1}x_2x_4$				$x_2\overline{x_3}x_4$
$\overline{x_1}x_2x_3x_4$	$\overline{x_1}x_3x_4$		$\overline{x_1}x_2x_4$	1				
$x_1\overline{x_2}\overline{x_3}x_4$					1	$x_1\overline{x_2}x_4$		$x_1\overline{x_3}x_4$
$x_1\overline{x_2}x_3x_4$	$\overline{x_2}x_3x_4$				$x_1\overline{x_2}x_4$	1		
$x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$		$x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$					1	$x_1x_2\overline{x_3}$
$x_1x_2\overline{x_3}x_4$			$x_2\overline{x_3}x_4$		$x_1\overline{x_3}x_4$		$x_1x_2\overline{x_3}$	1

Для отриманих терм третього порядку будуємо свою таблицю щодо попарного перебору:

	$\overline{x_1}x_3x_4$	$\overline{x_2}x_3x_4$	$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}$	$x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	$\overline{x_1}x_2x_4$	$x_2\overline{x_3}x_4$	$x_1\overline{x_2}x_4$	$x_1\overline{x_3}x_4$	$x_1x_2\overline{x_3}$
$\overline{x_1}x_3x_4$	1								
$\overline{x_2}x_3x_4$		1							
$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}$			1						$x_2\overline{x_3}$
$x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$				1		$x_2\overline{x_3}$			
$\overline{x_1}x_2x_4$					1				
$x_2\overline{x_3}x_4$				$x_2\overline{x_3}$		1			
$x_1\overline{x_2}x_4$							1		
$x_1\overline{x_3}x_4$								1	
$x_1x_2\overline{x_3}$			$x_2\overline{x_3}$						1

Далі складаємо імплікантну таблицю, у якій перший рядок – усі конституенти одиниці, а перший стовбець – терм другого порядку $x_2\overline{x_3}$ та терми третього порядку, які не містять терм $x_2\overline{x_3}$:

	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4$	$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4$	$\overline{x_1}x_2x_3x_4$	$x_1\overline{x_2}\overline{x_3}x_4$	$x_1\overline{x_2}x_3x_4$	$x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	$x_1x_2\overline{x_3}x_4$
$\overline{x_1}x_3x_4$	*			*				
$\overline{x_2}x_3x_4$	*					*		
$\overline{x_1}x_2x_4$			*	*				
$x_1\overline{x_2}x_4$					*	*		
$x_1\overline{x_3}x_4$					*			*
$x_2\overline{x_3}$		*	*				*	*

Оскільки в таблиці присутні стовбці тільки з однією позначкою, то імпліканта $x_2\overline{x_3}$, яка відповідає цим стовбцям, є суттєвою і разом із відповідними конституентами одиниці вибуває з подальшого процесу мінімізації (імпліканта $x_2\overline{x_3}$ обов'язково присутня в МДНФ функції):

	$\overline{x_1}\ \overline{x_2}x_3x_4$	$\overline{x_1}x_2x_3x_4$	$x_1\overline{x_2}\ \overline{x_3}x_4$	$x_1\overline{x_2}x_3x_4$
$\overline{x_1}x_3x_4$	*	*		
$\overline{x_2}x_3x_4$	*			*
$\overline{x_1}x_2x_4$		*		
$x_1\overline{x_2}x_4$			*	*
$x_1\overline{x_3}x_4$			*	

Якщо в таблиці є два стовбці, що мають однакові позначки, то один із них викреслюється (у наведеному прикладі така ситуація відсутня). Якщо після викреслювання з'являються рядки, які не містять жодної позначки, то відповідні імпліканти видаляються з подальшого процесу мінімізації. Після аналізу останньої таблиці покриття всіх конституент одиниці мінімальною кількістю імплікант забезпечують імпліканти $\overline{x_1}x_3x_4$ та $x_1\overline{x_2}x_4$, а МКНФ функції матиме вигляд:

$$y = \overline{x_1}x_3x_4 \vee x_1\overline{x_2}x_4 \vee x_2\overline{x_3}.$$

Приклад 9.10. Побудувати МКНФ функції

$$y = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}).$$

Розв'язування. Оскільки функція y представлена у вигляді ДКНФ, то зразу знаходимо всі її імпліценти. Застосовуємо операцію склеювання:

$$y = \big((x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})\big)\big((x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)\big) \wedge$$
$$\wedge \big((x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})\big)\big((\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)\big) \wedge$$
$$\wedge \big((\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})\big)\big((x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})\big) =$$
$$= (x_1 \vee x_2)(x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(\overline{x_2} \vee \overline{x_3}).$$

До отриманих диз'юнкцій не може бути застосована операція склеювання. Отже, кон'юнкція всіх можливих імпліцент матиме вигляд:

$$y = (x_1 \vee x_2)(x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(\overline{x_2} \vee \overline{x_3}).$$

Ця ж формула буде СКНФ функції. Далі складаємо імплікантну таблицю:

	$x_1 \vee x_2 \vee x_3$	$x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$	$\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3$	$\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3$	$x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$	$\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$
$x_1 \vee x_2$	*	*				
$x_2 \vee x_3$	*		*			
$x_1 \vee \overline{x_3}$		*			*	
$\overline{x_1} \vee x_3$			*	*		
$\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$				*		*
$\overline{x_2} \vee \overline{x_3}$					*	*

За покриття всіх конституент нуля мінімальною кількістю імпліцент маємо дві тупикові КНФ функції:

$$y_1 = (x_1 \vee x_2)(\overline{x_1} \vee x_3)(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

та

$$y_2 = (x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2}).$$

Оскільки за критерієм мінімізації кількості змінних отримані КНФ еквівалентні, то кожна з них є МКНФ функції.

Метод Мак-Класкі

Суттєвим недоліком метода Квайна є потреба попарного порівняння усіх простих імплікант (імпліцент), що значно ускладнює процес у разі зростання кількості мінтермів (макстермів). Метод Мак-Класкі є модернізацією метода Квайна щодо зменшення кількості порівнянь мінтермів (макстермів).

Алгоритм методу Мак-Класкі містить такі ітерації.

Ітерація 1. Побудувати ДДНФ (ДКНФ) функції.

Ітерація 2. Записати всі наявні конституенти одиниці (конституенти нуля) у вигляді двійкового коду.

Ітерація 3. Згрупувати всі отримані двійкові коди за однаковою кількістю одиниць (нулів) і призначити цим групам номер k (кількість одиниць (нулів)).

Ітерація 4. Починаючи з номера $k = 0$, виконати порівняння кожного двійкового коду з групи k з кожним двійковим кодом з групи $k + 1$. Якщо двійкові коди різняться тільки одним розрядом, то до таблиці наступного циклу записати відповідний їм двійковий код із позначкою «–» на місці відповідного розряду.

Ітерація 5. Серед однакових отриманих імплікант (імпліцент) залишити тільки одну.

Ітерація 6. Циклічно повторювати ітерації алгоритму 3–5 доти, поки існує можливість отримувати нові коди імплікант (імпліцент).

Приклад 9.11. Побудувати МДНФ функції

$$y = \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 \vee \overline{x_1}x_2x_3x_4 \vee$$
$$\vee x_1\overline{x_2}\overline{x_3}x_4 \vee x_1\overline{x_2}x_3x_4 \vee x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1x_2\overline{x_3}x_4.$$

Розв'язування. Так як функція y представлена у вигляді ДДНФ, то зразу знаходимо всі її конституенти одиниці у вигляді двійкового коду:

Конституенти одиниці	Двійкові коди	Десяткові номери
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4$	0011	3
$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	0100	4
$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4$	0101	5
$\overline{x_1}x_2x_3x_4$	0111	7
$x_1\overline{x_2}\overline{x_3}x_4$	1001	9
$x_1\overline{x_2}x_3x_4$	1011	11
$x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	1100	12
$x_1x_2\overline{x_3}x_4$	1101	13

Групуємо всі отримані двійкові коди за однаковою кількістю одиниць:

Цикл 0		
k	Код	Номер
1	0100	4
2	0011 0101 1001 1100	3 5 9 12

3	0111 1011 1101	7 11 13

Порівнюємо двійкові коди сусідніх груп:

Цикл 1		
k	Код	Номер
1	**010–** –100	4, 5 4, 12
2	**0–11** **–011** **01–1** –101 **10–1** **1–01**	3, 7 3, 11 5, 7 5,13 9, 11 9, 13

Продовжуємо порівнювати двійкові коди сусідніх груп:

Цикл 2		
k	Код	Номер
1	**–10–**	(4, 12), (5,13)

Оскільки в побудові останньої таблиці були задіяні тільки дві імпліканти, то всі інші є простими (виділені жирним шрифтом). У рамках другого циклу немає із чим порівнювати імліканту, тому будуємо імплікантну таблицю (перший рядок – усі конституенти одиниці, перший стовпчик – усі прості мпліканти):

	0011	0100	0101	0111	1001	1011	1100	1101
010–		*	*					
0–11	*			*				
–011	*					*		
01–1			*	*				
10–1					*	*		
1–01					*			*

–10-		*	*				*	*

Після аналізу останньої таблиці покриття всіх конституент одиниці мінімальною кількістю імплікант забезпечують прості імпліканти $\overline{x_1}x_3x_4$, $x_1\overline{x_2}x_4$ та $x_2\overline{x_3}$, а МКНФ функції матиме вигляд:

$$y = \overline{x_1}x_3x_4 \vee x_1\overline{x_2}x_4 \vee x_2\overline{x_3}.$$

Отриманий результат збігається з розв’язком цієї ж задачі за методом Квайна.

Запитання для самоперевірки

1. Яку диз’юнкцію нормальних форм називають мінімальною формою логічної функції?
2. Яку кон’юнкцію нормальних форм називають мінімальною формою логічної функції?
3. Наведіть означення простої імплікати логічної функції.
4. Наведіть означення простої імпліценти логічної функції.
5. Наведіть означення СДНФ.
6. Наведіть означення СКНФ.
7. Які закони булевої алгебри використовуються за мінімізації логічної функції?
8. Як використовуються таблиці Вейча за мінімізації логічної функції?
9. Як використовуються карти Карно за мінімізації логічної функції?
10. Наведіть алгоритм роботи за методом Квайна за мінімізації логічної функції.
11. Наведіть алгоритм роботи за методом Мак-Класкі за мінімізації логічної функції.

Лекція 10. Логічний висновок на базі алгебри висловлень

Аксіоми

Одним з етапів побудови формальних теорій є виділення формул, які називаються аксіомами. Однією з найрозповсюдженіших систем аксіом числення висловлювань є:

$A1.\, a \to (b \to a)$;

$A2.\, (a \to b) \to ((a \to (b \to c)) \to (a \to c))$;

$A3.\, (a \wedge b) \to a$;

$A4.\, (a \wedge b) \to b$;

$A5.\, (a \to b) \to ((a \to c) \to \big(a \to (b \wedge c)\big))$;

$A6.\, a \to (a \vee b)$;

$A7.\, b \to (a \vee b)$;

$A8.\, (a \to c) \to ((b \to c) \to \big((a \vee b) \to c\big))$;

$A9.\, (a \to b) \to ((a \to \neg b) \to \neg a)$;

$A10.\, \neg\neg a \to a$.

Перевіримо першу аксіому $a \to (b \to a)$, використовуючи таблицю істинності:

a	b	$b \to a$	$a \to (b \to a)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Аналітично ця формула доводиться таким чином:

$$a \to (b \to a) = \neg a \vee (\neg b \vee a) = \neg a \vee \neg b \vee a = 1 \vee \neg b = 1.$$

Самостійно перевірте інші гіпотези.

Рівносильність

Дві формули A і B алгебри висловлювань називаються *рівносильними*, якщо їм відповідає та сама функція істинності, і позначаються: $A = B$ або $A \Leftrightarrow B$. Рівносильність можна перевірити за таблицями істинності.

Але застосування таблиць істинності не може повністю закрити питання доведення рівносильності, оскільки, по-перше, за великої кількості змінних ця задача стає складною, а, по-друге, в алгебрі висловлювань найчастіше стоїть питання доведення рівносильності нескінченної кількості пар формул певного типу. А це потребує загальних міркувань та інших методів.

Теорема. Формули A і B алгебри висловлювань рівносильні, тоді і тільки тоді, коли формула $(A \to B)(B \to A)$ є тавтологією. Більш короткий запис – $A \sim B$.

Властивості рівносильності:

1) рефлексивність ($A \Leftrightarrow A$);
2) симетричність (якщо $A \Leftrightarrow B$, то $B \Leftrightarrow A$);
3) транзитивність (з $A \Leftrightarrow B$ та $B \Leftrightarrow C$ слідує, що $A \Leftrightarrow C$).

Логічне слідування

Формула B є логічним слідування формули A, якщо формула B істинна на всіх наборах змінних, для яких формула A істинна. Легко переконатися, що $A \Rightarrow B$, якщо $\vDash A \to B$ (с. 20).

Цю думку можна поширити на більшу кількість посилок: $A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow B$, якщо $\vDash A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$.

Приклад 10.1. Перевірити коректність наведених логічних міркувань формальними методами.

а) Якщо Тетяна поїде до Ужгорода, то Олександра поїде до Одеси. Тетяна поїде до Ужгорода або до Трускавця. Якщо Тетяна поїде до Трускавця, то Єгор залишиться в Києві. Однак Єгор не залишиться в Києві. Отже, Олександра поїде до Одеси.

Розв'язування. Введемо позначки елементарних висловлювань: a – Тетяна поїде до Ужгорода, b – Олександра поїде до Одеси, c – Тетяна поїде до Трускавця; d – Єгор залишиться в Києві.

Тоді формули-посилки мають вигляд: $a \to b, a \vee c, c \to d, \neg d$. Роль висновку виконує b. Тоді треба перевірити твердження: $a \to b, a \vee c, c \to d, \neg d \vdash b$. Побудуємо таблиці істинності:

$a\ b\ c\ d$	$a \to b$	$a \vee c$	$c \to d$	$\neg d$	b
0 0 0 0	1	0	1	1	0
0 0 0 1	1	0	1	0	0
0 0 1 0	1	1	0	1	0
0 0 1 1	1	1	1	0	0
0 1 0 0	1	0	1	1	1
0 1 0 1	1	0	1	0	1

0 1 1 0	1	1	0	1	1
0 1 1 1	1	1	1	0	1
1 0 0 0	0	1	1	1	0
1 0 0 1	0	1	1	0	0
1 0 1 0	0	1	0	1	0
1 0 1 1	0	1	1	0	0
1 1 0 0	1	1	1	1	1
1 1 0 1	1	1	1	0	1
1 1 1 0	1	1	0	1	1
1 1 1 1	1	1	1	0	1

З таблиці видно, що існує лише один набір (1,1,0,0), на якому всі посилки істинні. На цьому наборі й висновок є істинним. Як наслідок, наведені міркування коректні.

б) Для того, щоб бути допущеним до іспитів, потрібно отримати залік із математичної логіки. Я отримаю цей залік, якщо навчуся розв’язувати логічні задачі. Я не навчився розв’язувати логічні задачі, що означає, що я не буду допущений до іспитів.

Розв’язування. Введемо позначки елементарних висловлювань: a – я допущений до іспитів, b – я отримав залік із математичної логіки, c – я навчився розв’язувати логічні задачі.

Тоді формули-посилки мають вигляд: $b \to a,\ c \to b, \neg c$. Роль висновку виконує $\neg a$. Тоді треба перевірити твердження: $b \to a,\ c \to b, \neg c \vdash \neg a$. Побудуємо таблиці істинності:

$a\ b\ c$	$b \to a$	$c \to b$	$\neg c$	$\neg a$
0 0 0	1	1	1	1
0 0 1	1	0	0	1
0 1 0	0	1	1	1
0 1 1	0	1	0	1
1 0 0	1	1	1	0
1 0 1	1	0	0	0
1 1 0	1	1	1	0
1 1 1	1	1	0	0

З таблиці видно, що існує набори (1,0,0) та (1,1,0), на яких всі посилки істинні, але на цих наборах висновок є хибним. Як наслідок, наведені міркування не є коректними.

Множину висловлювань називають *несуперечною (сумісною)*, якщо існує такий набір значень для пропозиційних змінних, на якому кон'юнкція висловлювань набуває значення 1. В іншому випадку висловлювання несумісні.

Властивості слідування:

1) рефлексивність ($A \Rightarrow A$);
2) антисиметричність (з $A \Rightarrow B$ та $B \Rightarrow A$ слідує $A \Leftrightarrow B$);
3) транзитивність (з $A \Rightarrow B$ та $B \Rightarrow C$ слідує, що $A \Rightarrow C$).

Правила виведення

Правилами виведення в численні висловлювань, що розглядається, є:

1) *правило підстановки.* Якщо A – вивідна формула (тавтологія), яка містить літеру a (тобто $A(a)$), то вивідною (тавтологією) є і формула $A(B)$, де B – довільна формула, що записується

$$\frac{A(a)}{A(B)};$$

2) *правило висновку (modus ponens).* Якщо A та $A \to B$ – вивідні формули (тавтології), то вивідною (тавтологією) є і формула B, що записують

$$\frac{A, A \to B}{B}.$$

Аксіоми числення висловлювань разом із правилами виведення повністю визначають поняття теореми числення висловлювань.

Приклад 10.2. Показати, що $\vdash a \to a$ для довільної формули a.

Розв'язування. Візьмемо аксіому $A2. (a \to b) \to ((a \to (b \to c)) \to (a \to c))$ та в ній за правилом підстановки поміняємо c на a, а b на $b \to a$. Тоді:

$$(a \to (b \to a)) \to ((a \to \left((b \to a) \to a\right)) \to (a \to a)).$$

Проаналізуємо отриману формулу. Вираз у перших дужках є аксіомою $A1$. Тоді за правилом висновку (modus ponens) вивідною є і формула

$$\left(a \to \left((b \to a) \to a\right)\right) \to (a \to a).$$

Якщо в аксіомі $A1.(a \to (b \to a))$ замінити b на $b \to a$ за правилом підстановки, то отримаємо $\big(a \to \big((b \to a) \to a\big)\big)$, що є посилкою в останній формулі. Тоді за правилом висновку (modus ponens) з істинності

$\big(a \to \big((b \to a) \to a\big)\big)$ випливає істинність $(a \to a)$.

Тобто $\vdash a \to a$ (закон тотожності).

Інший спосіб подачі цієї інформації:

$F1: S^{b,c}_{b \to a, a} A2 = \big(a \to (b \to a)\big) \to \Big(\big(a \to \big((b \to a) \to a\big)\big) \to (a \to a)\Big)$

$F2: MP(A1, F1) = (\big(a \to \big((b \to a) \to a\big)\big) \to (a \to a))$

$F3: S^{b}_{b \to a} A1 = \big(a \to \big((b \to a) \to a\big)\big)$

$F4: MP(F3, F2) = (a \to a)$,

де $S^a_B A$ реалізує правило підстановки $\frac{A(a)}{A(B)}$, а $MP(A, A \to B) = B$ реалізує правило висновку (modus ponens) $\frac{A, A \to B}{B}$ [8].

Приклад 10.3. Показати, що $\vdash a \wedge b \to b \wedge a$ для довільних формул a та b.

Розв'язування. Візьмемо аксіому $A5.(a \to b) \to ((a \to c) \to \big(a \to (b \wedge c)\big))$ та в ній за правилом підстановки поміняємо c на a, а a на $a \wedge b$. Тоді:

$$((a \wedge b) \to b) \to \Big(\big((a \wedge b) \to a\big) \to \big((a \wedge b) \to (b \wedge a)\big)\Big).$$

Проаналізуємо отриману формулу. Вираз у перших дужках є аксіомою $A4$. Тоді за правилом висновку (modus ponens) вивідною є і формула

$$\big((a \wedge b) \to a\big) \to \big((a \wedge b) \to (b \wedge a)\big).$$

Знову вираз у перших дужках є аксіомою $A3$. Тоді за правилом висновку (modus ponens) вивідною є і формула $(a \wedge b) \to (b \wedge a)$. Тобто $\vdash a \wedge b \to b \wedge a$.

Інший спосіб подачі цієї інформації:

$F1: S^{a,c}_{a \wedge b, a} A5 = ((a \wedge b) \to b) \to \Big(\big((a \wedge b) \to a\big) \to \big((a \wedge b) \to (b \wedge a)\big)\Big)$

$F2: MP(A4, F1) = \Big(\big((a \wedge b) \to a\big) \to \big((a \wedge b) \to (b \wedge a)\big)\Big)$

$F3: MP(A3, F2) = \big((a \wedge b) \to (b \wedge a)\big)$.

Приклад 10.4. Показати, що $a \to b, b \to c \vdash a \to c$ для довільних формул a та b.

Розв'язування.

$F1: a \to b$

$F2: b \to c$

$F3: S^{a,b}_{b\to c,a}A1 = (b \to c) \to (a \to (b \to c))$

$F4: MP(F2, F3) = a \to (b \to c)$

$F5: MP(F1, A2) = ((a \to (b \to c)) \to (a \to c))$

$F6: MP(F4, F5) = a \to c.$

Довели закон силогізму.

Приклад 10.5. Показати, що $a \to b, \neg\, b \vdash \neg a$ для довільних формул a та b.

Розв'язування.

$F1: a \to b$

$F2: \neg\, b$

$F3: S^{a,b}_{\neg\, b,a}A1 = \neg\, b \to (a \to \neg\, b)$

$F4: MP(F2, F3) = a \to \neg\, b$

$F5: MP(F1, A9) = ((a \to \neg\, b) \to \neg a)$

$F6: MP(F4, F5) = \neg a.$

Довели закон modus tollens (введення заперечення).

Із цього доведення випливає закон контрапозиції $a \to b \vdash \neg\, b \to \neg a.$

Приклад 10.6. Показати, що $a, \neg a \ \vdash\ b$ для довільних формул a та b.

Розв'язування.

$F1: a$

$F2: S^{b}_{\neg\, b}A1 = a \to (\neg\, b \to a)$

$F3: MP(F1, F2) = (\neg\, b \to a)$

$F4: \neg a$

$F5: S^{a,b}_{\neg a,\neg\, b}A1 = \neg a \to (\neg\, b \to \neg a)$

$F6: MP(F4, F5) = (\neg\, b \to \neg a)$

$F7: S^{a,b}_{\neg b,a}A9 = (\neg\, b \to a) \to ((\neg\, b \to \neg a) \to \neg\neg\, b)$

$F8: MP(F3, F7) = ((\neg\, b \to \neg a) \to \neg\neg\, b)$

$F9: MP(F6, F8) = \neg\neg\, b$

$F10: S^{a}_{b}A10 = \neg\neg\, b \to b$

$F11: MP(F9, F10) =\ b.$

Довели закон «з хиби що завгодно».

Приклад 10.7. Показати, що $a \vdash \neg\neg a$ для довільних формул a.

Розв'язування.

$F1: a$

$F2: S^{b}_{\neg\, a}A1 = a \to (\neg\, a \to a)$

$F3: MP(F1, F2) = \neg\, a \to a$

$F4: S^{a}_{\neg a}(\text{закон тотожності}) = \neg\, a \to \neg\, a$

$F5: S^{a,b}_{\neg\, a,a}A9 = (\neg\, a \to a) \to ((\neg\, a \to \neg\, a) \to \neg\neg a)$

$F6: MP(F3, F5) = (\neg\, a \to \neg\, a) \to \neg\neg a$

$F7: MP(F4, F6) = \neg\neg a.$

Тобто $a \to \neg\neg a$.

Приклад 10.8. Показати, що $\neg(a \vee b) \vdash \neg a \neg\, b$ для довільних формул a та b.

Розв'язування.

$F1: MP(A6, \text{закон контрапозиції }) = \neg(a \vee b) \to \neg a$

$F2: MP(A7, \text{закон контрапозиції }) = \neg(a \vee b) \to \neg b$

$$F3: S^{a,b,c}_{\neg(a\vee b),\neg a,\neg b}A5 = (\neg(a \vee b) \to \neg a) \to ((\neg(a \vee b) \to \neg b) \to \big(\neg(a \vee b) \to (\neg a \wedge \neg b)\big))$$

$F4: MP(F3, F1) = (\neg(a \vee b) \to \neg b) \to \big(\neg(a \vee b) \to (\neg a \wedge \neg b)\big)$

$F5: MP(F4, F2) = \neg(a \vee b) \to (\neg a \wedge \neg b)$

Формалізація процесу виводу має велике теоретичне значення і дає змогу побудувати схему доведення, яка може бути реалізована обчислювальною технікою. Складність аксіоматичного підходу примушує застосовувати правила, які скорочують багатократне застосування основних правил виводу.

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть аксіоми алгебри висловлювань. Доведіть кожну з них за допомогою таблиць істинності.
2. Наведіть означення рівносильних формул.
3. Наведіть властивості рівносильних формул.
4. Наведіть означення логічного слідування.
5. Наведіть властивості логічного слідування.
6. Наведіть правила виведення алгебри висловлювань.
7. Сформулюйте правило підстановки.
8. Сформулюйте правило висновку (modus ponens).

9. Доведіть закон тотожності, використовуючи аксіоми алгебри висловлювань.
10. Доведіть закон силогізму, використовуючи аксіоми алгебри висловлювань.
11. Доведіть закон modus tollens, використовуючи аксіоми алгебри висловлювань.
12. Доведіть закон ex falso quodlibet, використовуючи аксіоми алгебри висловлювань.
13. Доведіть комутативність кон’юнкції, використовуючи аксіоми алгебри висловлювань.

Список літератури

1. Шкільняк С. С. Математична логіка. Приклади й задачі : навчальний посібник. – Київ : ВПЦ «Київський університет», 2022. – 304 с.

2. Безущак О., Ганюшкін О. Математична логіка : навчальний посібник. – Київ : ВПЦ «Київський університет», 2023. – 143 с.

3. Комп’ютерна логіка : навчальний посібник / В. А. Лахно, Б. С. Гусєв, Д. Ю. Касаткін. – Київ : КОМПРІНТ, 2018. – 422 с.

4. Матвієнко М. П., Шаповалов С. П. Математична логіка та теорія алгоритмів : навчальний посібник. – Київ : Ліра, 2021. – 212 с.

5. Ємець О. О. , Парфьонова Т. О. Дискретна математика : навчальний посібник. – Полтава : ПУЕТ, 2023. – 282 с.

6. Полтораченко Н. І. Математична логіка і числення предикатів : конспект лекцій. – Київ : КНУБА, 2022. – 60 с.

Навчально-методичне видання

ПОЛТОРАЧЕНКО Наталія Іванівна
ТЕРЕНЧУК Світлана Анатоліївна

АРИФМЕТИЧНІ І ЛОГІЧНІ ОСНОВИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ

Конспект лекцій

Редагування та коректура *Т. В. Івченко*
Комп’ютерне верстання *Т. І. Кукарєвої*

Підписано до друку 03.09.2025. Формат $60\times84_{1/16}$
Ум. друк. арк. 4,18. Обл.-вид. акр. 4,5.
Електронний документ. Вид. № 19/І-25.

Видавець і виготовлювач
Київський національний університет будівництва і архітектури

Проспект Повітряних сил України, 31, Київ, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб’єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002